УДК 517.968

Ю. В. ГАНДЕЛЬ, И. К. ЛИФАНОВ

О РЕШЕНИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАДАЧИ РОБЕНА

В настоящей заметке речь пойдет о новом подходе к решению основной задачи электростатики [1,2] в двумерном случае. Он основан на применении метода дискретных особенностей [3,4] к системе сингулярных интегральных уравнений рассматриваемой задачи, которая состоит в нахождении равновесного распределения зарядов на (бесконечных) цилиндрических проводниках (образующие цилиндров параллельны одному направлению — пусть это ось z декартовой системы координат), при котором поле внутри проводников отсутствует. Пусть линии пересечения цилиндров с плоскостью xOy —

гладкие кривые L_k, $k=1, 2, \ldots, m$, среди которых могут быть как замкнутые, так и разомкнутые. Обозначим q_k — полный заряд, приходящийся на единицу длины вдоль оси z соответствующего цилиндра, $\sigma_k=\sigma_k(x, y)$ — плотность распределения зарядов кривой L_k. Тогда

$$\int_{L_k} \sigma_k\, ds = q_k. \tag{1}$$

Используя выражение напряженности электростатического поля в случае двумерного распределения зарядов и непрерывность тангенциальной составляющей напряженности [5], приходим к системе интегральных уравнений

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{L_k} \frac{\sigma_k\, ds\, (\vec{r}_0-\vec{r}, \vec{\tau}_0)}{2\pi\,|\vec{r}_0-\vec{r}|^2}\bigg|_{(x_0,\, y_0)\in L_j} = 0, \tag{2}$$
$$j=1, 2, \ldots, m.$$

где $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$ — радиусы-векторы точек $(x, y)\in L_k$ и (x_0, y_0), а $\vec{\tau}_0$ — единичный вектор, касательный к кривой L_j в точке (x_0, y_0). В случае, когда $k=j$, берется главное значение интеграла.

Пусть $L_1, \ldots, L_{m_1}$ — замкнутые кривые, а $L_{m_1+1}, \ldots, L_m$ — разомкнутые; пусть, далее, при $j=1, 2, \ldots, m_1$ имеются взаимно однозначные гладкие отображения единичной окружности на замкнутые кривые L_j и $x=x_j(\varphi)$, $y=y_j(\varphi)$ — периодические функции с периодом 2π, а при $j=m_1+1, \ldots, m$ имеются взаимно-однозначные гладкие отображения отрезка $[-1; 1]$ на кривые $\overline{L}_j$: $x=x_j(t)$, $y=y_j(t)$, $-1\leqslant t\leqslant 1$. Обозначим $\sigma_j \frac{ds}{d\varphi}=u_j(\varphi)$, $j=1, 2, \ldots, m_1$, и $\sigma_j \frac{ds}{dt}=\frac{u_j(t)}{\sqrt{1-t^2}}$, $-1<t<1$ при $j=m_1+1, \ldots, m$.

Из (2) получаем систему сингулярных интегральных уравнений

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\, u_j(\varphi)\, d\varphi + \sum_{k=1}^{m_1}\int_0^{2\pi} K_{jk}(\varphi_0, \varphi)\, u_k(\varphi)\, d\varphi +$$
$$+\sum_{k=m_1+1}^{m}\int_{-1}^{1} K_{jk}(\varphi_0, t)\, u_k(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=0, \quad j=1, 2, \ldots, m_1, \tag{3}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u_j(t)}{t_0-t}\cdot\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \sum_{k=1}^{m_1}\int_0^{2\pi} K_{jk}(t_0, \varphi)\, u_k(\varphi)\, d\varphi +$$
$$+\sum_{k=m_1+1}^{m}\int_{-1}^{1} K_{jk}(t_0, t)\, u_k(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=0, \quad -1<t<1, \tag{4}$$

где все гладкие функции K_{jk} (2π-периодические по φ и φ_0) известны, Искомые функции u_k в силу (1) удовлетворяют условиям

$$\int_0^{2\pi} u_k(\varphi)\, d\varphi = q_k, \quad k = 1, \dots, m_1, \tag{5}$$

$$\int_{-1}^{1} u_k(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = q_k, \quad k = m_1 + 1, \dots, m. \tag{6}$$

Система сингулярных интегральных уравнений (3)—(4) с дополнительными условиями (5)—(6) эквивалентна исходной задаче Робена и имеет единственное решение.

Пусть

$$\varphi_{k,p} = \frac{2p\pi}{2n_k+1}, \quad \varphi_{k,op} = \frac{2p+1}{2n_k+1}\pi, \quad p = 0, 1, \dots, 2n_k. \tag{7}$$

$$t_{k,p} = \cos\frac{2p-1}{2n_k}\pi, \quad t_{k,os} = \cos\frac{s}{n_k}\pi, \tag{8}$$

$$p = 1, 2, \dots, n_k; \quad s = 1, 2, \dots, n_k - 1.$$

Функции $K_{jk}(\varphi_0, \varphi)$, $1 \leqslant k, j \leqslant m_1$; $K_{jk}(\varphi_0, t)$, $1 \leqslant k \leqslant m_1$, $m_1 + 1 \leqslant j \leqslant m$; $K_{jk}(t_0, \varphi)$, $m_1 + 1 \leqslant k \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant m_1$; $K_{kj}(t_0, t)$, $m_1 + 1 \leqslant k, j \leqslant m$; 2π-периодические функции по φ_0 и φ; $-1 \leqslant t_0, t \leqslant +1$ имеют непрерывные производные до r-го порядка включительно, которые принадлежат гельдеровскому классу $H(\alpha)$. Используя методы, развитые в [3, 4], можно доказать следующий результат.

Теорема. *Если система уравнений (3), (4) при дополнительных условиях (5), (6) однозначно разрешима, то система линейных алгебраических уравнений*

$$\gamma_{j,n_j} + \sum_{p=0}^{2n_j} \operatorname{ctg}\frac{\varphi_{j,os} - \varphi_{j,p}}{2} u_{j,n_j}(\varphi_{j,p}) \frac{1}{2n_j+1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{p=1}^{n_k} K_{jk}(\varphi_{j,os}, \varphi_{k,p}) u_{k,n_k}(\varphi_{k,p}) \frac{2\pi}{2n_k+1} +$$

$$+ \sum_{k=m_1+1}^{m_1} \sum_{p=1}^{n_k} K_{jk}(\varphi_{j,os}, t_{k,p}) u_{k,n_k}(t_{k,p}) \frac{\pi}{n_k} = 0,$$

$$s = 0, 1, \dots, 2n_j; \quad j = 1, 2, \dots, m_1$$

$$\sum_{p=1}^{n_j} u_{j,n_j}(\varphi_{j,p}) \frac{2\pi}{2n_j+1} = q_j,$$

$$j = 1, 2, \dots, m_1$$

$$\sum_{p=1}^{n_j} \frac{u_{j,n_j}(t_{j,p})}{t_{j,os}-t_{j,p}} \cdot \frac{1}{n_j} + \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{p=0}^{2n_k} K_{jk}(t_{j,os}, \varphi_{k,p}) u_{k,n_k}(\varphi_{k,p}) \frac{2\pi}{2n_k+1} +$$

$$+ \sum_{k=m_1+1}^{m} \sum_{p=1}^{n_k} K_{jk}(t_{j,os}, t_{k,p}) u_{k,n_k}(t_{k,p}) \frac{\pi}{n_k} = 0,$$

$$s = 1, \ldots, n_j - 1, \; j = m_1 + 1, \ldots, m$$

$$\sum_{p=1}^{n_j} u_{j,n_j}(t_{j,p}) \cdot \frac{\pi}{n_j} = q_j; \;\; (s = n_j), \; j = m_j + 1, \ldots, m,$$

относительно γ_{j,n_j}; $u_{j,n_j}(\varphi j, p), u_{k,n_k}(t_{k,p})$ *при достаточно больших* $n = \min\{n_1, \ldots, n_m\}$ *имеет единственное решение и выполняются следующие соотношения:*

$$\gamma_{j,n_j} \to 0, \; n \to \infty, \; j = 1, 2, \ldots, m_1,$$

$$u_j(\varphi_{j,p}) - u_{j,n_j}(\varphi_{j,p}) = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right), \; n \to \infty$$

$$p = 0, 1, \ldots, 2n_j; \; j = 1, 2, \ldots, m_1;$$

$$u_j(t_{j,s}) - u_{j,n_j}(t_{j,s}) = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right), \; n \to \infty$$

$$s = 1, 2, \ldots, n_j; \; j = m_1 + 1, \ldots, m.$$

Список литературы: 1. *Стеклов В. А.* Основные задачи математической физики/ Под ред. В. С. Владимирова.— 2-е изд.— М.: Наука, 1983.—432 с. 2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Наука, 1968.— 599 с. 3. *Лифанов И. К.* О некорректности и регуляризации численного решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. Докл. АН СССР, 1980, 255, № 5, с. 1046—1050. 4. *Лифанов И. К.*, Матвеев А. Ф. О сингулярном интегральном уравнении на системе отрезков.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1983, вып. 40, с. 104—110. 5. *Смайт В.* Электростатика и электродинамика.— М.: Изд-во иностр. лит., 1954.—604 с.

Поступила в редколлегию 13.04.84.