будем иметь, согласно следствию 5,

$$Z = \left(\sum_{n \in N_2}, L_p \{-1, 1\}^{M_n^{(2)}} \right)_p \subset UX.$$

Пусть $\delta > 0$ таково, что если $x \in UX$, $y \in UY$ и $\|x\| = \|y\| = 1$, то $\|x - y\| \geqslant \delta$. Фактор-отображение T из $L_p(\mu_2)$ на $L_p(\mu_2)/Z$ изоморфно вкладывает UY в $L_p(\mu_2)/Z$, поскольку $\|x - y\| \geqslant \delta$, как только $x \in Z$, $y \in UY$ и $\|x\| = \|y\| = 1$, в силу включения $Z \subset UX$. Итак, Y изоморфно вкладывается в $L_p(\mu_2)/Z$, которое, в свою очередь, изоморфно $\left(\sum_{n \in N_2 \setminus N_2'}, L_p \{-1, 1\}^{M_n^{(2)}} \right)_p$. Согласно теореме 10, существует $n \in N_2 \setminus N_2'$ такое, что $\overline{\overline{M}}{}_n^{(2)} \geqslant \overline{\overline{M}}{}_{n_1}^{(1)}$. С другой стороны, $\overline{\overline{M}}{}_n^{(2)} \leqslant \overline{\overline{M}}{}_{n_1}^{(1)}$, согласно определению N_2. Итак,

$$\{\overline{\overline{M}}{}_n^{(1)} : n \in N_1\} \subset \{\overline{\overline{M}}{}_n^{(2)} : n \in N_2\}$$

в силу произвольности $n_1 \in N_1$. Обратное включение доказывается аналогично. Доказательство изоморфности (даже изометричности) $L_p(\mu_1)$ и $L_p(\mu_2)$ в случае равенства соответствующих множеств мощностей не представляет труда.

Следствие 13. *Пусть $0 < p < 1$. Если пространства $L_p(\mu_1)$ и $L_p(\mu_2)$ изоморфны, то они изометричны.*

Список литературы: 1. *Maharam D.* On gomogeneous measure algebras. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1942, 28, p. 108—111. 2. *Lacey H. E.* The isometric theory of classical Banach spaces. — Berlin — Heidelberg — New York: Springer Verl., 1974.—270 p. 3. *Rosenthal H. P.* On injective Banach spaces and the spaces $L^\infty(\mu)$ for finite measures μ. — Acta Math., 1970, **124**, № 3—4, p. 205—248. 4. *Попов М. М.* О коразмерности пространств $L_p(\mu)$ при $p < 1$. — Функцион. анализ и его прил., 1984, **18**, № 2, с. 94—95.

Поступила в редколлегию 08.07.85.

УДК 517.5

О. В. ЕПИФАНОВ, Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК

О СОХРАНЕНИИ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

1. Пусть $a(D) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{(k)}(0)}{k!} \frac{d^k}{dz^k}$ — дифференциальный оператор бесконечного порядка с характеристической функцией $a(z)$, $f(z)$— целая функция экспоненциального типа, сопряженную диаграмму

которой обозначим символом $I(f)$ (используемые в работе определения и характеристики целых функций берутся из [1]). Вершинами сопряженной диаграммы назовем точки, являющиеся общими концами смежных отрезков, лежащих на границе выпуклого компакта $I(f)$. В частности, если $I(f)$ отрезок, то вершинами считаются его концы. В работе [2] И. В. Островский выдвинул гипотезу, согласно которой, если $f(z)$ имеет вполне регулярный рост (в. р. р.), а характеристическая функция дифференциального оператора целая экспоненциального типа и не обращается в ноль в вершинах $I(f)$, то $a(D)f(z)$ также имеет в. р. р. Справедливость этой гипотезы следует из «достаточной» части теоремы, доказанной в настоящей работе.

Пусть $0 \leqslant \sigma < \infty$, $K_\sigma = \{z: |z| \leqslant \sigma\}$, $[1, \sigma]$ — класс всех целых функций роста не выше, чем первого порядка и типа σ, $H(K_\sigma)$ — множество всех аналитических на компакте K_σ функций.

Все рассматриваемые в статье дифференциальные операторы бесконечного порядка с постоянными коэффициентами

$$a(D)\,y(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k(z) \tag{1}$$

удовлетворяют условию

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, /a_k/^{1/k} < 1/\sigma. \tag{2}$$

Иначе говоря, предполагается, что характеристические функции $a(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ принадлежат $H(K_\sigma)$.

Напомним некоторые известные свойства операторов вида (1).

1. Для того, чтобы ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k y^k(z)$ сходился для всех $z \in \boldsymbol{C}$ и $y \in [1, \sigma]$, а также для того, чтобы ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k| \max\limits_{|z|<R} |y^{(k)}(z)|$ сходился для всех $R < \infty$ и $y \in [1, \sigma]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (2) (см. [3, 4]).

2. Оператор (1) при выполнении условия (2) действует из $[1, \sigma]$ в $[1, \sigma]$, причем $I(a(D)\,y) \subset I(y)$ (см. [3]).

3. Если выполнено условие (2), то уравнение $a(D)\,y = f$ для любой функции f из $[1, \sigma]$ имеет частное решение y из $[1, \sigma]$ такое, что $I(y) = I(f)$ (см. [3]).

4. Совокупность операторов (1), удовлетворяющих (2), образует коммутативную алгебру операторов на $[1, \sigma]$.

Свойство 4 известно и неоднократно использовалось при исследовании операторов (1); но так как здесь трудно указать первоисточник, то мы приведем краткое его доказательство.

Пусть $a(z), b(z) \in H(K_\sigma)$ и $c(z) = a(z) \cdot b(z)$, тогда $c(z) \in H(K_\sigma)$. Применяя последовательно операторы $a(D)$ и $b(D)$ к произвольной функции y из $[1, \sigma]$, представленной в виде

$y(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\sigma+\varepsilon} Y(t)\,e^{zt}dt$, где $Y(t)$ ассоциирована с y по Борелю, а $\varepsilon>0$ достаточно мало, получим $a(D)\,y(z)=\frac{1}{2\pi i}\int a(t)\,Y(t)\,e^{zt}dt$, $b(D)\,a(D)\,y(z)=\frac{1}{2\pi i}\int b(t)\,a(t)\,Y(t)\,e^{zt}dt=a(D)\,b(D)\,y(z)=c(D)y(z)$.

2. Покажем сначала, что гипотеза И. В. Островского справедлива для дифференциального оператора конечного порядка. Пусть $f(z)$ имеет экспоненциальный тип и вполне регулярный рост. Из результатов работы [5] фактически следует, что гипотеза справедлива для $a(D)=\frac{d}{dz}$. Поэтому, если $z=0$ не вершина $I(f)$, то $f'(z)$ — в. р. р. Пусть $\lambda\in \boldsymbol{C}$, λ — не вершина $I(f)$; тогда $z=0$ — не вершина сопряженной диаграммы $I(f_1)=I(f)-\lambda$ функции $f_1(z)=e^{-\lambda z}f(z)$, имеющей, как и $f(z)$, в. р. р. В силу [5] $f_1'(z)$ имеет вполне регулярный рост. Из представления $f_1'(z)=$ $=e^{-\lambda z}(f'(z)-\lambda f(z))$ заключаем, что $f'-\lambda f$ имеет в. р. р. Таким образом, $\frac{d}{dz}-\lambda\mathrm{I}$ сохраняет вполне регулярный рост. Кроме того, оператор $\frac{d}{dz}-\lambda\mathrm{I}$ не меняет сопряженной диаграммы: $I(f'-\lambda f)=I(f)$. Действительно, включение $I(f'-\lambda f)\subset I(f)$ всегда выполняется [3]. Допустим от противного что сопряженная диаграмма функции $y(z)=f'(z)-\lambda f(z)$ не совпадает с $I(f)$, то есть является собственным подмножеством $I(f)$. Согласно свойству 3 найдется решение $x(z)$ уравнения $x'-\lambda x=y$ такое, что $I(x)\doteq$ $=I(y)$. Отсюда получим, что $f(z)=e^{\lambda z}c+x(z)$.

Следовательно, $I(f)$ совпадает с выпуклой оболочкой множества $I(x)\cup\{\lambda\}$: $I(f)=\operatorname{conv}(I(x)\cup\{\lambda\})$. Учитывая, что $I(x)$ — собственное подмножество $I(f)$, получим из последнего равенства, что $\lambda\notin I(x)$ (иначе бы $I(x)=I(f)$), но тогда из того же равенства находим, что λ — вершина $I(f)$, и мы пришли к противоречию. Далее, оператор $a(D)$ конечного порядка представим в виде суперпозиции $a(D)=\prod\limits_{k=1}^{m}\left(\frac{d}{dz}-\lambda_k I\right)$, где λ_k, $k=1,2,3,\ldots,$ — все нули характеристической функции. Применяя последовательно операторы $\frac{d}{dz}-\lambda_k I$ и учитывая, что λ_k — не вершины $I(f)$, получим, что $a(D)f$ — в. р. р.

Следующая теорема является основной в данной работе.

Теорема. *Пусть для дифференциального оператора* $a(D)=$ $=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\frac{d^k}{dz^k}$ *выполнено условие (1); T — произвольный выпуклый компакт в круге $|z|\leqslant\sigma$ и $P(T)$ — класс всех целых функций экспоненциального типа с сопряженной диаграммой T. Для того, чтобы оператор $a(D)$ сохранял в. р. р. для любой функции из $P(T)$, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль $a(z)$ не являлся вершиной T.*

Доказательство. Установим сначала один вспомогательный результат. В работе [6] для более общих операторов, чем $a(D)$, доказано утверждение, из которого вытекает, в частности, что при выполнении условия (1) оператор $a(D)$ сохраняет нерегулярность роста любой функции из $[1, \sigma]$ по каждому фиксированному лучу. Применим этот результат в доказательстве следующей леммы

Лемма. *Если $b(D)$ удовлетворяет (1) и $b(z) \neq 0$, $z \in K_\sigma$, то $b(D)y(z)$ в. р. р для любой функции $y(z)$ в. р. р. из класса $[1, \sigma]$.*

Действительно, если найдется функция $y_0(z) \in [1, \sigma]$ в. р. р. такая, что $f = b(D)y_0$ не имеет в. р. р. по некоторому лучу $\arg z = \theta_0$, то применив к f дифференциальный оператор $c(D)$ с характеристической функцией $c(z) = 1/b(z)$ из $H(K_\sigma)$ и учитывая, что $c(D)b(D) = I$, получим $c(D)f = c(D)b(D)y_0 = y_0$. Но тогда, согласно [6], $y_0(z)$ должна быть нерегулярного роста на луче arg, $z = \theta_0$, что невозможно.

Возвращаясь к доказательству теоремы, установим сначала достаточность ее условий. Пусть $Q(z)$ — полином, все нули которого совпадают с нулями $a(z)$, лежащими в круге K_σ. Тогда $a(z)$ можно представить в виде: $a(z) = Q(z)b(z)$, где $b(z) \in H(K_\sigma)$ и $b(z) \neq 0$, $z \in K_\sigma$. Но тогда $\forall f \in P(T)$ $a(D)f = b(D)Q(D)f$. Если f имеет в. р. р., то как установлено выше, в предположениях теоремы $Q(D)f$ сохраняет в. р. р. Используя лемму, устанавливаем, что $a(D)f$ также имеет в. р. р.

Необходимость. Пусть $a(\lambda_0) = 0$ и λ_0 — вершина T. Из простых геометрических соображений ясно, что опорная прямая к T, соответствующая некоторому направлению θ_0, опирается лишь на одну точку λ_0 из T, причем T представимо в виде выпуклой области $\operatorname{conv}(T_1 \cup \{\lambda_0\})$, где T_1 — выпуклый компакт, содержащийся в T и такой, что $\sup\{\operatorname{Re} ze^{-i\theta} : z \in T_1\} < \operatorname{Re} \lambda_0 e^{-i\theta}$ для всех θ из некоторой окрестности $U = (-\varepsilon + \theta_0, \varepsilon + \theta_0)$ направления θ_0. Выберем функцию g из $P(T_1)$ так, чтобы она не имела в. р. р. на каждом луче $\arg z = \theta$, θ из U, и была в. р. р. на остальных лучах (существование такой функции доказано в [7]). Функция $f(z) = e^{\lambda_0 z} + g(z)$ принадлежит $P(T)$ и, очевидно, имеет в. р. р. при всех θ, кроме, быть может, $\theta = \theta_0 - \varepsilon$ и $\theta = \theta_0 + \varepsilon$. Но множество лучей в. р. р. замкнуто (см. [1, с. 186], и потому f имеет в. р. р. В то же время функция $a(D)f(z) = a(D)g(z)$ не имеет в. р. р. на луче $\arg z = \theta_0$ в силу указанного выше результата из [6].

Список литературы: 1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: Гос. изд-во тех.-теорет. лит., 1956. — 632 с. 2. *Островский И. В.* Операторы, сохраняющие вполне регулярный рост. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1978, 78, с. 271—273. 3. *Muggli H.* Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit konstanten Koeffizienten. — Comment. Mathem. Helvetici, 1938, № 1, p. 151—179. 4. *Коробейник Ю. Ф.* О некоторых характеристических свойствах дифференциальных операторов бесконечного порядка. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1966, 30, № 5, с. 933—1016. 5. *Гольдберг А. А., Островский И. В.*

О производных и первообразных целых функций вполне регулярного роста. — Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1973, вып. 18, с. 70—81. 6. *Епифанов О. В.* О сохранении оператором свертки не вполне регулярного роста функций. — Сиб. мат. журн., 1979, 20, № 2, с. 420—422. 7. *Аварин В. С.* О лучах вполне регулярного роста целой функции. — Мат. сб., 1969, 79, № 4, с. 463—476.

Поступила в редколлегию 27.05.85.

УДК 517.982

К. Э. КАИБХАНОВ

О ВОЗМУЩЕНИИ ω-ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫХ СИСТЕМ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ, СОДЕРЖАЩЕМ СВОЙ КВАДРАТ

Последовательность $(x_n)_1^\infty$ элементов банахова пространства X над полем действительных или комплексных чисел называется ω-линейно независимой, если сходимость ряда $\sum\limits_1^\infty a_n x_n$ к нулю влечет обращение в нуль всех коэффициентов a_n [1, с. 50]. Понятие линейной независимости тесно связано с понятием обычной (алгебраической) линейной независимости. Так, каждая ω-линейно независимая система является линейно независимой; в банаховом пространстве каждая линейно независимая последовательность содержит ω-линейно независимую последовательность [2, с. 162, 858; 3].

Цель настоящей статьи — исследование устойчивости ω-линейной независимости по отношению к возмущениям ограниченных последовательностей элементов банахова пространства.

Все рассматриваемые банаховы пространства считаются бесконечномерными, над полем комплексных чисел, однако результаты переносятся и на вещественный случай. Обозначения: S_X — единичная сфера пространства X; $d(X, Y)$ — дистанция Банаха — Мазура между изоморфными пространствами X и Y, т. е. $d(X, Y) = \inf\{\|A\| \cdot \|A^{-1}\| : A : X \to Y \text{ — изоморфизм}\}$; $X \sim Y$ — пространства X и Y изоморфны между собой.

Введем необходимые определения.

Определение 1. *Для банахова пространства X обозначим через $\Gamma(X)$ множество всех числовых последовательностей $c = (\nu_n)_1^\infty$ с таким свойством: для последовательности $(\nu_n)_1^\infty$ найдется ограниченная система $(x_n)_1^\infty \subset X$ такая, что любая система $(y_n)_1^\infty \subset X$, подчиненная условию $\|x_n - y_n\| \leqslant |\nu_n| \; \forall n$, оказывается ω-линейно независимой. В этом случае будем говорить, что система $(x_n)_1^\infty$ соответствует системе $c = (\nu_n)_1^\infty$.*

Определение 2. *Для введения топологической структуры на множестве* $\Gamma(X)$ *определим функционал:* $\rho_X(c) = \inf\{h$: *существует система* $(x_n)_1^\infty \subset X$ *соответствующая* c *и такая, что* $\|x_n\| \leqslant h \ \forall n\}$.

Легко доказывается, что в определении 2 знак неравенства ($\leqslant h$) можно заменить равенством. Индекс X будем опускать, если ясно о каком пространстве идет речь.

Предложение 1. *Если в определениях 1, 2 условие* ω-*линейной независимости заменить условием линейной независимости, то от этого не изменяется ни множество* $\Gamma(X)$, *ни функционал* ρ_X.

Доказательство. Обозначим через $\Gamma'(X)$, ρ' множество и функционал в определениях 1, 2 с заменой условия ω-линейной независимости на линейную независимость. Тогда, очевидно, $\Gamma(X) \subset \Gamma'(X)$ и $\rho'(c) \leqslant \rho(c)\ \forall c \in \Gamma(X)$. Пусть, не ограничивая общности, $(x_n)_1^\infty \subset S_X$ и $(\nu_n)_1^\infty$ обладают тем свойством, что любая система $(y_n)_1^\infty$ с условием $\|y_n - x\| \leqslant |\nu_n\ \forall_n$ является линейно независимой. Достаточно доказать, что для любого $\alpha > 1$ найдется система $(z_n)_1^\infty \subset \alpha S_X$, соответствующая $(\nu_n)_1^\infty$ (отсюда будет следовать $\Gamma'(X) \subset \Gamma(X)$ и $\rho\left((\nu_n)_1^\infty\right) \leqslant \rho'\left((\nu_n)_1^\infty\right)$. Пусть $\alpha > 1$ задано. Разобьем множество натуральных чисел N на два подмножества: $M_1 = \{n \in N;\ \nu_n \neq 0\}$ и $M_2 = \{n \in N : \nu_n = 0\}$. Из системы $(x_n)_{n \in M_2}$, которая линейно независима, выберем ω-линейно независимую подсистему $(u_n)_{n \in M_2}$ [3]. Ясно, что система $((1/\alpha) z_n)_1^\infty$, где

$$z_n = \begin{cases} \alpha x_n, & n \in M_1, \\ \alpha u_n, & n \in M_2, \end{cases}$$

обладает тем же свойством, что и $(x_n)_1^\infty$: при возмущении на величины $(|\nu_n|)_1^\infty$ сохраняется линейная независимость. Покажем, что $(z_n)_1^\infty$ соответствует $(\nu_n)_1^\infty$. Допустим обратное, пусть существует система $(y_n)_1^\infty$, такая что

$$\|y_n - z_n\| \leqslant |\nu_n| \quad \forall_n,\ \sum_1^\infty a_n y_n = 0,\ \sum_1^\infty |a_n| \neq 0.$$

Тогда найдется $m \in M_1$ с $|a_m| \cdot |\nu_m| > 0$, иначе система $(u_n)_{n \in M_2}$ оказалась бы ω-линейно зависимой. Выбрав $n_0 > m$ настолько большим, чтобы $\left\|\sum_1^{n_0} a_n y_n\right\| < (\alpha - 1)|a_m\|\nu_m|$ и положив $y'_m = y_m - a_m^{-1} \sum_1^{n_0} a_n y_n$, $y' = y_n$ для остальных n, получим

$$\left\|\frac{y'_n}{\alpha} - \frac{z_n}{\alpha}\right\| \leqslant |\nu_n|\ \forall n,\ \sum_1^{n_0} a_n y'_n = 0,$$

что противоречит сказанному выше.

Предложение 2. *Пусть X — банахово пространство. Тогда а) если $(\nu_n)_1^\infty \in \Gamma(X)$ и $(\nu_n') \subset C$ такова, что $|\nu_n' \leqslant \alpha|\nu_n|$ $\forall_n$, $\alpha \geqslant 0$, то $(\nu_n')_1^\infty \in \Gamma(X)$, и $\rho((\nu_n')_1^\infty) \leqslant \alpha\rho((\nu_n)_1^\infty)$; б) если банаховы пространства X и Y изоморфны, то $\Gamma(X) = \Gamma(Y)$ и $\forall (\nu_n)_1^\infty \in \Gamma(X)$,*

$$\frac{1}{d(X,\ Y)} \rho_Y((\nu_n)_1^\infty) \leqslant \rho_X((\nu_n)_1^\infty) \leqslant d(X,\ Y)\rho_Y((\nu_n)_1^\infty).$$

Доказательство. Поскольку а) очевидно, докажем б). Пусть $A: X \to Y$ — изоморфизм, $(\nu_n)_1^\infty \in \Gamma(X)$ и ей соответствует $(x_n)_1^\infty \subset X$. Для любой системы $(y_n)_1^\infty \subset Y$, такой что $\|y_n - Ax_n\| \leqslant A^{-1}\|^{-1}|\nu_n|$ $\forall n$, имеем $\|A^{-1}(y_n - Ax_n\| \leqslant |\nu_n|$, т. е. система $(A^{-1}y_n)_1^\infty$ ω-линейно независима. Так как A — изоморфизм, то и $(y_n)_1^\infty$ ω-линейно независима, $(\|A^{-1}\|^{-1}\nu_n)_1^\infty \in \Gamma(Y)$ и ей соответствует $(Ax_n)_1^\infty$. Из а) следует

$$(\nu_n)_1^\infty \in \Gamma(Y), \text{ и } \rho_Y((\nu_n)_1^\infty) \leqslant \|A^{-1}\| \sup_n \|Ax_n\| \leqslant$$
$$\leqslant A^{-1}\| \cdot \|A\| \sup_n \|x_n\|.$$

Лемма. *Для любого банахова пространства*

$$\Gamma(X) = \left\{(\nu_n)_1^\infty \subset \mathrm{C} : \inf_{(x_n) \subset S_X} \sup_{(\alpha_n) \subset \mathrm{C}} \frac{\Sigma|\alpha_n\|\nu_n|}{\|\Sigma\alpha_n x_n\|} < \infty\right\},$$

при этом

$$\rho((\nu_n)_1^\infty) = \inf_{(x_n) \subset S_X} \sup_{(\alpha_n) \subset \mathrm{C}} \frac{\Sigma|\alpha_n\|\nu_n|}{\|\Sigma\alpha_n x_n\|}. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть правая часть в (1) больше, чем α и $(y_n)_1^\infty \subset \alpha S_X$ — произвольная система. Покажем, что $(y_n)_1^\infty$ не может соответствовать $(\nu_n)_1^\infty$. Согласно (1), существует система $(\alpha_n^0) \subset \mathrm{C}$, такая что

$$\sup_{(\alpha_n) \subset \mathrm{C}} \frac{\sum|\alpha_n\|\nu_n|}{\|\sum \alpha_n y_n\|} \geqslant \frac{\sum|\alpha_n^0\|\nu_n|}{\|\sum \alpha_n^0 y_n\|} > 1.$$

Положим $z_n = y_n - \frac{\sigma\theta_n|\ \nu_n|}{\|\sum \alpha_n^0 y_n\|}(\sum \alpha_n^0 y_n)$, где

$$\sigma = \frac{\|\sum \alpha_n^0 y_n\|}{\sum|\alpha_n^0\|\nu_n|} < 1, \quad \theta_n\alpha_n^0 = |\alpha_n^0|\ \forall_n.$$

Непосредственно проверяется, что $\|z_n - y_n\| \leqslant |\nu_n|$ и $\sum \alpha_n^0 z_n = 0$. Тем самым доказано, что $\rho((\nu_n)_1^\infty) \geqslant \alpha$. В обратную сторону. Пусть $\inf\sup$ (выражение в (1)) $< \alpha < \infty$. Тогда найдется система $(\bar{x}_n)_1^\infty \subset S_X$ такая, что

$$\sup_{(\alpha_n) \subset \mathrm{C}} \frac{\Sigma|\alpha_n||\nu_n|}{\|\Sigma\alpha_n\bar{x}_n\|} < \alpha.$$

Пусть $(y_n)_1^\infty$ — произвольная система с условием $\| y_n - \alpha\bar{x}_n \| < |\nu_n|$. Тогда для любой нетривиальной системы $(a_n)_1^m \subset C$ имеем

$$\left\| \sum_1^m a_n y_n \right\| = \left\| \alpha \sum_1^m a_n \bar{x}_n + \sum_1^m a_n (y_n - \alpha\bar{x}_n) \right\| \geqslant$$
$$\geqslant \alpha \left\| \sum_1^m a_n \bar{x}_n \right\| - \sum_1^m |a_n| \, |\nu_n| > 0,$$

т. е. система $(y_n)_1^\infty$ оказывается линейно независимой и по предложению 1 $\rho((\nu_n)_1^\infty \leqslant \alpha$.

Следствие 1. *Пусть Y — бесконечномерное подпространство банахова пространства X. Тогда $\Gamma(Y) \subset \Gamma(X)$ и $\rho_Y((\nu_n)_1^\infty) \geqslant \geqslant \rho_X((\nu_n)_1^\infty \forall (\nu_n)_1^\infty \in \Gamma(Y)$.*

Напомним, что функция $f: X \to R$, заданная на векторном пространстве X, называется квазинормой, если она удовлетворяет следующим трем условиям: 1) $f(x) \geqslant 0 \forall x \in X$, и $f(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$; 2) $f(\lambda x) = |\lambda| f(x) \forall \lambda \in C$, $x \in X$ 3) существует $K \geqslant 1$, такое что $\forall x,\ y \in X f(x+y) \leqslant K(f(x) + f(y))$. Квазинорма f на X порождает линейную топологию, которую обозначим (X, f).

Теперь перейдем к основному результату.

Теорема. *Пусть банахово пространство X содержит подпространство, изоморфное его квадрату: $X_1 \oplus X_2 \subset X$, $X_1 \sim X_2 \sim X$. Тогда $\Gamma(X)$ — векторное пространство относительно операций покоординатного сложения и умножения на скаляр, а функционал ρ_X — квазинорма на $\Gamma(X)$.*

Доказательство. Фактически в доказательстве нуждается лишь то, что, если $(\nu_n)_1^\infty$, $(\nu_n^1)_1^\infty \in \Gamma(X)$, то $(\nu_n + \nu_n')_1^\infty \in \Gamma(X)$ и существует постоянная $K \geqslant 1$, такая, что $\rho_X((\nu_n + \nu_n')_1^\infty \leqslant K \times \times (\rho_X((\nu_n)_1^\infty) + \rho_X((\nu_n')_1^\infty))$. Остальные аксиомы векторного пространства и квазинормы очевидны. Пусть $(\nu_n)_1^\infty$, $(\nu_n')_1^\infty \in \Gamma(X)$, $\alpha > > \rho_X((\nu_n)_1^\infty)$, $\beta > \rho_X((\nu_n')_1^\infty)$ произвольны. Тогда найдутся соответствующие им $(x_n)_1^\infty \subset \alpha S_X$, $(y_n)_1^\infty \subset \beta S_X$. По предложению 2, $(\nu_n)_1^\infty \in \Gamma(X_1)$, $(\nu_n^1)_1^\infty \in \Gamma(X_2)$ и им соответствуют некоторые $(x_n')_1^\infty \subset \subset \alpha d(X, X_1) S_{X_1}$, $(y_n')_1^\infty \subset \beta d(X, X_2) S_{X_2}$. Пусть P_i: $X_1 \oplus X_2 \to X_i$ — естественные проекторы и $\| P \| = \max\limits_{i=1,2} \| P_i \|$. Покажем, что система $(z_n)_1^\infty = (2\|P\|(x_n', y_n'))_1^\infty \subset X_1 \oplus X_2$ соответствует $(|\nu_n| + + |\nu_n'|)_1^\infty$ в пространстве $X_1 \oplus X_2$. Допустим противное. Тогда найдется система $(u_n)_1^\infty = ((u_n', u_n''))_1^\infty$, такая что

$$|\nu_n| + |\nu_n'| \geqslant \| u_n - z_n \| \geqslant \frac{1}{2\|P\|} (\| u_n' - 2\|P\| x_n' \| +$$
$$+ \| u_n'' - 2\|P\| y_n' \|) \qquad (2)$$

и $(u_n)_1^\infty$ линейно зависимы, т. е. существует нетривиальная система $(a_n)_1^m \subset C$, для которой

$$\sum_1^m a_n u_n = \sum_1^m a_n (u_n', \ u_n'') = 0.$$

Из (2) следует, что хотя бы одна из следующих сумм:

$$\sum_{n=1}^m |a|_n \left(|\nu_n| - \frac{1}{2\|P\|} \| u_n' - 2\|P\| x_n' \| \right),$$

$$\sum_{n=1}^m |a_n| \left(|\nu_n'| - \frac{1}{2\|P\|} \| u_n' - 2\|P\| y_n' \| \right),$$

неотрицательна. Пусть для определенности $\sum_{n=1}^m |a_n| \Big(|\nu_n| - \frac{1}{2\|P\|} \times$ $\times \| u_n' - 2\|P\| x_n' \| \geqslant 0$. Положим

$$\overline{u}_k' = 2\|P\| x_k' + \frac{\theta_k |\nu_k|}{\sum_1^m |a_n| |\nu_n|} \left(\sum_1^m a_n (u_n' - 2\|P\| x_n'), \quad 1 \leqslant k \leqslant m, \right.$$

где $(\theta_k)_1^m$ таковы, что $\theta_k a_k = |a_k|$. Непосредственно проверяется, что $\| \overline{u}_n' - 2\|P\| x_n' \| \leqslant 2\|P\| |\nu_n|$. Имеем

$$\sum_1^m a_n \overline{u}_n' = 2\|P\| \sum_1^m a_n x_n' + \frac{\sum_1^m |a_n| |\nu_n|}{\sum_1^m |a_n| |\nu_n|} \left(\sum_1^m a_n u_n' - \right.$$

$$\left. - 2\|P\| \sum_1^m a_n x_n' \right) = \sum_1^m a_n u_n' = 0,$$

в то время как

$$\left\| \frac{\overline{u}_n'}{2\|P\|} - x_n' \right\| \leqslant |\nu_n|, \quad 1 \leqslant n \leqslant m,$$

противоречит тому, что $(x_n')_1^\infty$ соответствует $(\nu_n)_1^\infty$. Итак, мы установили, что $(2\|P\| (x_n', \ y_n')_1^\infty$ соответствует системе $(|\nu_n| + |\nu_n'|)_1^\infty$ в пространстве $X_1 \oplus X_2$. Используя предложение 2 и следствие 1, имеем

$$(\nu_n + \nu_n')_1^\infty \in \Gamma(X),$$

$$\rho_X((\nu_n + \nu_n')_1^\infty) \leqslant \rho_X((|\nu_n| + |\nu_n'|)_1^\infty \leqslant \rho_{X_1 \oplus X_2}((|\nu_n| + |\nu_n'|))_1^\infty) \leqslant$$

$$\leqslant 2\|P\| \sup_n \| (x_n', \ y_n') \| \leqslant 2\|P\| \sup_n (\| x_n' \| + \| y_n' \|) \leqslant$$

$$\leqslant 2\|P\| (\alpha d(X, \ X_1) + \beta d(X, \ X_2)).$$

Так как $\alpha > \rho_X((\nu_n)_1^\infty$, $\beta > \rho_X((\nu_n')_1^\infty)$ выбраны произвольно, то окончательно получаем

$$\rho_X((\nu_n + \nu_n')_1^\infty) \leqslant 2\|P\|\left(\max_{i=1,2} d(X, X_i)\right)(\rho_X((\nu_n)_1^\infty + \rho_X((\nu_n)_1^\infty)),$$

т. е. ρ_X — квазинорма на $\Gamma(X)$. Теорема доказана.

Следствие 2. *Если банахово пространство X содержит подпространство, изоморфное его квадрату, то* $(\Gamma(X), \rho_X)$ — *квазинормированное пространство.*

Следствие 3. *Для того, чтобы банахово пространство X не содержало своего квадрата, достаточно выполнения хотя бы одного из следующих условий:* 1) $\Gamma(X)$ *не векторно;* 2) ρ_X — *не квазинорма.*

Было бы интересно знать, справедлива ли теорема для всех банаховых пространств. Похоже, что ответ отрицательный и примером может служить пространство Фигеля $X = \left(\sum_{i=1}^\infty \oplus l_{p_i}^{n_i}\right)_2$ при некоторых ограничениях на $p_i \uparrow 2$ и $n_i \uparrow \infty$ [4]. Отметим, что в данном случае для X^* теорема верна, хотя X^* тоже не содержит своего квадрата, т. е. содержание своего квадрата не является необходимым условием.

Список литературы: 1. *Singer J.* Bases in Banach Spaces. I. — Berlin: Springer, 1970.—668 p. 2. *Singer J.* Bases in Banach Spaces. II. — Berlin: Springer, 1981.—880 p. 3. *Гурарий В. И.* Счетно-линейно независимые последовательности в банаховых пространствах. — Усп. мат. наук, 1981, **36**, вып. 5, с. 171—172. 4. *Figiel T.* On example of an infinitedimensional Banach space non isomorphic to its Cartesian squre.— Studia Math, 1972.-42.—P. 295—306.

Поступила в редколлегию 05.09.85.

УДК 517.925.71

В. Р. СМИЛЯНСКИЙ

СВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РАНГА К СИСТЕМЕ ПЕРВОГО РАНГА. 2*

2. *Вычисление матрицы* z^Q. Пусть $G = HG_gH^{-1}$, где G_g — жорданова форма матрицы G, H — постоянная неособая матрица. Тогда (см. (16)) $Q = H(i\alpha_0)^{-1}(\operatorname{Ln} G_g)H^{-1}$ и

$$z^Q = H\exp\left\{\frac{\operatorname{Ln} z}{i\alpha_0}\operatorname{Ln} G_g\right\}H^{-1}. \tag{40}$$

* Часть I настоящей статьи опубликована в сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», 1986, вып. 46.

Следовательно, задача сводится к вычислению G_g, H, H^{-1}.

Матрица G получена из единичной матрицы перемещением строк (17). При этом *из всей совокупности* n^{r+1} *строк не меняют своего положения только* n *строк с номерами*

$$s = m + \frac{(m-1)\,n\,(n^r - 1)}{(n-1)},\ m = \overline{1, n} \tag{41}$$

соответствующие значениям

$$i_0 = i_1 = \ldots = i_r = m,\ m = \overline{1,\ n}. \tag{42}$$

Доказательство. Как видно из (17), строка переходит сама в себя, если

$$n^r(i_r - i_{r-1}) + n^{r-1}(i_{r-1} - i_{r-2}) + \ldots + n(i_1 - i_0) + (i_0 - i_r) = 0. \tag{43}$$

Выражение (43) формально можно рассматривать как уравнение r-й степени с целыми коэффициентами относительно n. Так как $|i_0 - i_r| < n$, то для целых положительных n отношение $(i_0 - - i_r)/n$ не равно целому, если $i_0 - i_r \neq 0$, и такие n не являются корнями (43). Потребовав $i_0 - i_r = 0$, придем к уравнению $(r-1)$-й степени со свободным членом $(i_1 - i_0)$, относительно которого можно повторить то же самое, и т. д.

Пусть условие (42) не выполнено. Применяя (17) к правой половине (17), имеем

$$[i_r,\ i_0,\ \ldots,\ i_{r-1}] \to [i_{r-1},\ i_r,\ i_0,\ \ldots,\ i_{r-2}]. \tag{44}$$

Продолжая этот процесс, получим замыкающее соотношение

$$[i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_r,\ i_0] \to [i_0,\ i_1,\ \ldots,\ i_r]. \tag{45}$$

Следовательно, *остальные* $n(n^r - 1)$ *строк можно разбить на непересекающиеся подсовокупности из* $(r+1)$ *строк каждая, в которых строки меняются местами по типу круговой перестановки, т. е. в каждой подсовокупности можно расположить номера строк* $s_1, s_2, \ldots, s_{r+1}$ *так, что* $s_1 \to s_2$, $s_2 \to s_3$, $\ldots$, $s_{r+1} \to s_1$. Будем искать характеристические корни γ и собственные векторы h матрицы G из уравнения

$$(G - E\gamma)\,h = 0,\ h = \{h_1,\ \ldots,\ h_{n^{r+1}}\}. \tag{46}$$

Каждый столбец и каждая строка матрицы G имеют только один ненулевой элемент (он равен единице). Если этот элемент соответствует строке единичной матрицы, не меняющей своего положения, то он находится на главной диагонали. Соответствующий элемент матрицы $(G - E\gamma)$ есть $(1-\gamma)$ (тоже на главной диагонали), а скалярное уравнение из (46) — $(1-\gamma)\,h_s = 0$, где s находим из выражения (41). Отсюда $\gamma = 1$. Полагая $h_s = 1$, а прочие компоненты собственного вектора $h_\mu = 0$ для $\mu \neq s$, получаем n собственных значений $\gamma = 1$ и n соответствующих им *линейно независимых векторов* h.

Рассмотрим теперь подсовокупность ненулевых элементов матрицы G, соответствующую подсовокупность из $(r+1)$ строк $s_1, s_2 \ldots, s_{r+1}$ единичной матрицы, которые меняются местами по типу круговой перестановки. Соответствующие единичные (ненулевые) элементы G есть

$$[G]_{s_2, s_1}, [G]_{s_3, s_2}, \ldots, [G]_{s_{r+1} s_r}, [G]_{s_1 s_{r+1}}. \tag{47}$$

В строках $s_1, s_2, \ldots, s_{r+1}$ матрицы $(G - E\gamma)$ имеются два ненулевых элемента: 1) один из подсовокупности (47); 2) $(-\gamma)$ на главной диагонали. Этим строкам соответствует следующая подсистема из $(r+1)$ скалярных уравнений системы (46):

$$h_{s_m} - \gamma h_{s_{m+1}} = 0 \ (m = \overline{1, r}); \ h_{s_{r+1}} - \gamma h_{s_1} = 0. \tag{48}$$

Из подсистемы (48) находим

$$h_{s_m} = \gamma^{r-m+1} h_{s_{r+1}} \ (m = \overline{1, r}); \ \gamma_k = \varepsilon^k \ (k = \overline{1, r+1}). \tag{49}$$

Полагая равными нулю все компоненты h_μ с номерами $\mu \neq s_1, s_2, \ldots, s_{r+1}$, а $h_{s_{r+1}} = 1$, получаем с помощью (49) $(r+1)$ *линейно независимых* собственных векторов h. Как видно из структуры матриц G и $(G - E\gamma)$, в разных подсистемах рассмотренного типа остаются ненулевыми *разные* (и не пересекающиеся по номеру компоненты μ) подсовокупности из $(r+1)$ компонент h_μ. Поэтому *число линейно независимых векторов h совпадает с порядком n^{r+1} матрицы G*, хотя она имеет кратные характеристические корни. *Следовательно, ее жорданова форма Gg диагональна;* а $\exp\left\{\frac{(\mathrm{Ln}\, z)}{i\alpha_0} \times \times (\mathrm{Ln}\, Gq)\right\}$ — *тоже диагональная матрица, которую, в частности, можно выбрать с диагональными элементами* $1, z, z^2, \ldots, z^r$. Кроме того, собственные векторы h являются столбцами матрицы H.

Перейдем к определению H^{-1}. Будем искать H^{-1} из условия $HH^{-1} = E$. В каждой строке (и соответственно в каждом столбце) матрица H имеет 1) либо один ненулевой элемент, равный единице; 2) либо $(r+1)$ ненулевых элементов. Первый случай соответствует вектору h, найденному из уравнения $(1-\gamma) h_s = 0$, (42), второй — $(r+1)$ линейно независимым вектором h, полученным из (49). Во втором случае можно выделить $(r+1)$ строк, ненулевые элементы которых лежат в одних и тех же столбцах. Вектор-столбец матрицы H^{-1} обозначим через h'. Матричное уравнение $HH^{-1} = E$ дает следующую скалярную систему уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n^{r+1}} [H]_{jk} [H^{-1}]_{k\mu} = \delta_{j\mu}, \ j, r = \overline{1, n^{r+1}}, \tag{50}$$

где $\delta_{j\mu}$ — символ Кронекера. Пусть в μ-й строке матрицы H имеется только один ненулевой элемент $[H]_{\mu, k_0} = 1$. Тогда решение системы (50) (для этого значения μ) будет $[H^{-1}_{k_0 \mu} = 1$; $[H^{-1}]_{k\mu} = 0$ для

$k \neq k_0$ (так как k_0-й столбец матрицы H в этом случае, как указано выше, не содержит других ненулевых элементов). Пусть строки $s_1, s_2, \ldots, s_{r+1}$ матрицы H содержат по $(r+1)$ ненулевых элементов, лежащих в одних и тех же столбцах с номерами $k_1, k_2, \ldots, k_{r+1}$. Полагая в этом случае $[H^{-1}]_{k\mu}=0$ для $k \neq k_1, k_2, \ldots, k_{r+1}$ и $\mu = s_1, s_2, \ldots, s_{r+1}$, получаем из (50) подсистему

$$\sum_{\rho=1}^{r+1} [H]_{jk_\rho} [H^{-1}]_{k_\rho \mu} = \delta_{j\mu} \; j,\; r = s_1, s_2, \ldots, s_{r+1}, \tag{51}$$

которая определяет $(r+1)$ линейно независимых векторов h' для $\mu = s_1, s_2, \ldots, s_{r+1}$. Подставляя уравнение (49) в (51), имеем $([H]_{s_{r+1}k}=1)$

$$\begin{gathered}
\gamma_1^r [H^{-1}]_{k_1\mu} + \gamma_2^r [H^{-1}]_{k_2\mu} + \ldots + \gamma_{r+1}^r [H^{-1}]_{k_{r+1}\mu} = \delta_{s_1\mu};\\
\gamma_1^{r-1} [H^{-1}]_{k_1\mu} + \gamma_2^{r-1} [H^{-1}]_{k_2\mu} + \ldots + \gamma_{r+1}^{r-1} [H^{-1}]_{k_{r+1}\mu} = \delta_{s_2\mu};\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\gamma_1 [H^{-1}]_{k_1\mu} + \gamma_2 [H^{-1}]_{k_2\mu} + \ldots + \gamma_{r+1} [H^{-1}]_{k_{r+1}\mu} = \delta_{s_r\mu};\\
[H^{-1}]_{k_1\mu} + [H^{-1}]_{k_2\mu} + \ldots + [H^{-1}]_{k_{r+1}\mu} = \delta_{s_{r+1}\mu};\\
r = s_1, s_2, \ldots, s_{r+1}.
\end{gathered} \tag{52}$$

Определитель D системы (52) является определителем Вандермонда*.

Пусть $\mu = s_\xi$. Тогда

$$[H^{-1}]_{k_\rho s_\xi} = (-1)^{\rho+\xi} \frac{D_\rho}{D} \quad \rho,\; \xi = \overline{1,\; r+1} \tag{53}$$

где минор D_ρ получается из определителя D вычеркиванием ξ-й строки и ρ-го столбца. Минор D_ρ приводится к определителю Вандермонда.

3. *Случай* $n=2$, $r=1$. Для примера выпишем матрицы $A(z)$, z^Q и $M(z)$, соответствующие этому случаю. Обозначим элементы матрицы $B(z)$ через $b_{ik}(z)$;

$$\beta_{ik}(\pm) = b_{ik}(z) \pm b_{ik}(-z); \quad \beta(+) = \beta_{22}(+) + \\ + \beta_{11}(+); \quad \beta(-) = \beta_{22}(-) - \beta_{11}(-),$$

а элементы матрицы $M(z)$ — через m_{ik}. Тогда

$$A(z) = z \begin{pmatrix}
\begin{matrix} b_{11}(z) + \\ + b_{11}(-z), \end{matrix} & b_{12}(z), & b_{12}(-z), & 0 \\
b_{21}(z), & \begin{matrix} b_{22}(z) + \\ + b_{11}(-z), \end{matrix} & 0, & b_{12}(-z) \\
b_{21}(-z), & 0, & \begin{matrix} b_{11}(z) + \\ + b_{22}(-z), \end{matrix} & b_{12}(z) \\
0, & b_{21}(-z), & b_{21}(z), & \begin{matrix} b_{22}(z) + \\ + b_{22}(-z) \end{matrix}
\end{pmatrix}$$

* Мишина А. П., Проскуряков И. В. Высшая алгебра (линейная алгебра, многочлены, общая алгебра).—М.: Наука, 1965.—300 с.

одно из возможных значений

$$z^Q = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0,5(1+z), & 0,5(1-z), & 0 \\ 0, & 0,5(1-z), & 0,5(1+z), & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

элементы m_{ik}, соответствующие этому значению z^Q, будут

$$m_{11} = z\beta_{11}(+);\ m_{44} = z\beta_{22}(+);\ m_{41} = m_{14} = 0;$$

$$m_{21} = 0,5z[\beta_{21}(+) + z^{-1}\beta_{21}(-)];\quad m_{43} = 0,5z[\beta_{21}(+) + z\beta_{21}(-)];$$

$$m_{31} = 0,5z[\beta_{21}(+) - z^{-1}\beta_{21}(-)];\quad m_{42} = 0,5z[\beta_{21}(+) - z\beta_{21}(-)];$$

$$m_{34} = 0,5z[\beta_{12}(+) + z^{-1}\beta_{12}(-)];\quad m_{12} = 0,5z[\beta_{12}(+) + z\beta_{22}(-)];$$

$$m_{24} = 0,5z[\beta_{12}(+) - z^{-1}\beta_{12}(-)];\quad m_{13} = 0,5z[\beta_{12}(+) - z\beta_{12}(-)];$$

$$m_{23} = 0,25z[2z^{-2} - (z - z^{-1})\beta(-)];\ m_{32} = 0,25z[2z^{-2} + \\ + (z - z^{-1})\beta(-)];$$

$$m_{22} = 0,25z[2\beta(+) + (z + z^{-1})\beta(-) - 2z^{-2}];$$

$$m_{33} = 0,25z[2\beta(+) - (z + z^{-1})\beta(-) - 2z^{-2}].$$

§ 4. *Полилинейное преобразование.* Рассмотрим некоторые свойства полилинейного преобразования, необходимые для доказательства п. А) теоремы 1.1. Везде по двум одинаковым нижним индексам предполагается суммирование. Пусть задана система

$$\frac{du_i}{dz} = a_{ik}u_k;\quad i,\ k = 1,\ n \tag{54}$$

и l_q систем

$$\frac{dw_j}{dz} = b^q_{j\nu}w^q_\nu;\quad j,\ \nu = \overline{1,\ n_q};\ q = \overline{1,\ l} \tag{55}$$

(значок сверху означает индекс, а не степень). Произведем полилинейное преобразование системы (54), т. е. представим каждую компоненту u_i в виде полилинейной формы:

$$u_i = p_{i\omega_1\omega_2\ldots\omega_l}w^1_{\omega_1}w^2_{\omega_2}\ldots w^l_{\omega_l};\quad i = \overline{1,\ n};\ \omega_q = \overline{i,\ n_q}. \tag{56}$$

Предложение 4.1. *Коэффициенты $p_{i\omega_1\omega_2\ldots\omega_l}$ полилинейной формы (56) удовлетворяют следующей системе уравнений:*

$$a_{ik}p_{k\omega_1\ldots\omega_l} = p_{i\xi\omega_2\ldots\omega_l}b^1_{\xi\omega_1} + p_{i\omega_1\xi\omega_3\ldots\omega_l}b^2_{\xi\omega_2} + \\ + \ldots + p_{i\omega_1\ldots\omega_{l-1}\xi}b_{\xi\omega_l} + \frac{dp_{i\omega_1\ldots\omega_l}}{dz}, \tag{57}$$

$$i,\ k = \overline{1,\ n};\ \xi,\ \omega_q = \overline{1,\ n_q};\ q = \overline{1,\ l}.$$

Пусть $n = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_l$. Систему (57) при фиксированном i можно рассматривать как систему из n алгебраических линейных неоднородных уравнений относительно n элементов i-й строки матрицы $(a_{ik})^n_1$ системы (54). Обозначим (квадратную) матри-

цу этой системы через X; k-й столбец матрицы — это n коэффициентов $p_{k\omega_1 \ldots \omega_l}$ (для фиксированного k). Вместе с тем k-й столбец матрицы X — это совокупность коэффициентов полилинейной формы для компоненты u_k. Поэтому условие $\det X \neq 0$ совпадает с условием линейной независимости компонент $u_1, \ldots, u_n$.

Доказательство предложения 4.1. Подставляем уравнение (56) в (54), а затем в полученном выражении заменяем все $dw^q_{\omega_q} / dz$ согласно (55). Это дает

$$\begin{gathered} w^1_{\omega_1} \ldots w^l_{\omega_l} \frac{dp_{i\omega_1 \ldots \omega_l}}{dz} + p_{i\omega_1 \ldots \omega_l} b^1_{\omega_1 \nu} w^1_\nu w^2_{\omega_2} w^l_{\omega_l} + \\ + p_{i\omega_1 \ldots \omega_l} b^2_{\omega_2 \nu} w^1_{\omega_1} w^2_\nu w^3_{\omega_3} \ldots w^l_{\omega_l} + \ldots + \\ + p_{i\omega_1 \ldots \omega_l} b^l_{\omega_l \nu} w^1_{\omega_1} \ldots w^{l-1}_{\omega_{l-1}} w^l_\nu = \\ = a_{i\nu} p_{\nu\omega_1 \ldots \omega_l} w^1_{\omega_1} \ldots w^l_{\omega_l}; \quad i = \overline{1, n}. \end{gathered} \tag{58}$$

Производя в (58) в соответствующих слагаемых переобозначение индексов суммирования $(\omega_q, \nu) \to (\nu, \omega_q)$ и соответственно перегруппировку слагаемых, имеем

$$\begin{gathered} \left(\frac{dp_{i\omega_1 \ldots \omega_l}}{dz} + p_{i\nu\omega_2 \ldots \omega_l} b^1_{\nu\omega_1} + \ldots + p_{i\omega_1 \ldots \omega_{l-1}\nu} b^l_{\nu\omega_l} - \right. \\ \left. - a_{i\nu} p_{\nu\omega_1 \ldots \omega_l} \right) w^1_{\omega_1} \ldots w^l_{\omega_l} = 0 \quad i = \overline{1, n}. \end{gathered} \tag{59}$$

Для того чтобы левая часть (59) тождественно равнялась нулю, нужно потребовать, чтобы выражение в круглых скобках равнялось нулю при любых $i, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_l$. Это уравнение (57).

Поступила в редколлегию 29.08.85.

УДК 517.9

И. Д. ЧУЕШОВ

СТРУКТУРА МАКСИМАЛЬНОГО АТТРАКТОРА МОДИФИЦИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ КАРМАНА

---

1. Рассмотрим систему уравнений

$$L_t u + \Delta^2 u - [u, v + \theta] = f(x); \tag{1а}$$

$$\Delta^2 v + [u, u] = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0; \tag{1б}$$

$$u \Big|_\Gamma = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_\Gamma = 0, \quad v \Big|_\Gamma = \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_\Gamma = 0; \tag{1в}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x); \quad \dot{u}|_{t=0} = u_1(x). \tag{1г}$$

Здесь Ω — гладкая ограниченная область в R^2, $\Gamma = \partial\Omega$, $L_t(u) = (1 - \alpha\Delta)\ddot{u} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2\Delta)\dot{u}$, $\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$, Δ — оператор Лапласа, $\Delta^2 = \Delta \cdot \Delta$,

$$[u,\ v] = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}. \tag{2}$$

Система (1) описывает нелинейные колебания пластины, защемленной по контуру с учетом инерции вращения [1]. В (1) u — прогиб пластины; v — функция напряжений; $\theta \in H^4(\Omega)$ — функция, описывающая горизонтальные (в плоскости пластины) усилия; $f \in L^2(\Omega)$ — функция, задающая нормальные к пластине нагрузки. Предполагается, что $u_0 \in H_0^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$. Здесь и ниже $H^l(\Omega)$ — соболевское пространство порядка l; $\|\cdot\|_l$ — норма в H^l; $\|\cdot\|$ — норма в L^2. В случае пространств H_0^2 и H_0^1 будем полагать $\|\cdot\|_2 = \|\Delta\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1 = \|\nabla\cdot\|$. С помощью (1б) функцию v всегда можно исключить из системы (1). Поэтому решением задачи (1) будем называть функцию $u(t,\ x)$, которая удовлетворяет граничным (1в), начальным (1г) условиям и уравнению (1а) с учетом зависимости (1б) v от u. Пусть $L^\infty(0,\ T;\ X)$ — пространство существенно ограниченных на $[0,\ T]$ функций со значениями в X. При сделанных предположениях [1, 2] задача (1) однозначно разрешима на любом интервале $[0,\ T]$ в классе функций

$$\mathscr{L} = \{u \in L^\infty(0,\ T;\ H_0^2(\Omega)) \mid \dot{u} \in L^\infty(0,\ T,\ H_0^1(\Omega))\}.$$

Поэтому в силу леммы 8.1 [3, гл. 3] $y(t) = \{u(t),\ \dot{u}(t)\}$ — слабо непрерывная функция со значениями в гильбертовом пространстве $E_1 = H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ с нормой $|y|_1^2 = \|u_0\|_2^2 + \|u_1\|_1^2$, $y_0 = \{u_0,\ u_1\}$. Следовательно, в E_1 можно определить слабо непрерывную полугруппу S_t, $t > 0$, действующую по формуле

$$S_t y_0 = y(t),\ y_0 = \{u_0,\ u_1\} \in E_1,\ y(t) = \{u(t),\ \dot{u}(t)\} \in E_1, \tag{3}$$

где $u(t)$ определяется по $\{u_0,\ u_1\}$ из системы (1).

Заметка посвящена изучению свойств полугруппы S_t и описанию структуры ее максимального аттрактора. Показано, что в рассматриваемом случае можно воспользоваться одной теоремой А. В. Бабина и М. И. Вишика [4], относящейся к абстрактным эволюционным уравнениям, и доказать, что при фиксированном θ для f общего положения S_t обладает регулярным максимальным $(E_2,\ E_1)$-аттрактором, где $E_2 = (H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega)$ с нормой $|y|_2^2 = \|u_0\|_3^2 + \|u_1\|_2^2$, $y = \{u_0,\ u_1\}$. Напомним, что максимальным $(E_2,\ E_1)$-аттрактором полугруппы S_t называется ограниченное замкнутое множество A в E_1, такое, что $S_t A = A$ для всех $t > 0$ и для любого ограниченного множества $B \subset E_2$, $\operatorname{dist}(S_t B,\ A) \to 0$ при $t \to \infty$. Определение регулярности см. в [4].

2. Полугруппа S_t обладает следующими свойствами.

Теорема 1. *Пусть $i = 1$ или $i = 2$. Если $y_0 \in E_i$, то $S_t y_0 \in E_i$ и отображение*

$$\{y_0,\ t\} \to S_t y_0 \tag{4}$$

непрерывно из $E_i \times [0, T]$ в E_i *для любого* $T > 0$. *Кроме того, выполнено условие обобщенной диссипативности в каждом из пространств* E_i, *т. е. существует константа* $C(R)$, *такая, что из* $|y_0|_i < R$ *следует* $|S_t y_0|_i < C(R)$.

Доказательство проводится по общепринятой схеме. Укажем основные этапы рассуждений.

Лемма 1. *Пусть* $[u, v]$ *определяется формулой* (2). *Тогда для достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *имеют место неравенства*

$$\text{а)}\ \| [u, v] \|_{L^q} \leqslant C \| u \|_2 \cdot \| v \|_{3-\varepsilon},\quad q = 2(1+\varepsilon)^{-1};$$

$$\text{б)}\ \| [u, v] \|_{-1+\varepsilon} \leqslant C \| u \|_2 \| v \|_{2+\varepsilon};$$

$$\text{в)}\ \| [u, v] \|_{-1} \leqslant C \| u \|_1 \| v \|_{3+\varepsilon};$$

$$\text{г)}\ \| [u, v] \|_{-1-\varepsilon} \leqslant C \| u \|_2 \cdot \| v \|_2.$$

Доказательство леммы вытекает из непрерывности следующих вложений: $H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ для всех $p < \infty$, $H^{1+\varepsilon}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ для любых $\varepsilon > 0$, $H^{1-\varepsilon}(\Omega) \subset L^{2/\varepsilon}(\Omega)$ для малых $\varepsilon > 0$. Подробности см. в работах [2, 5].

Пусть $y(t) = S_t y_0 = \{u(t), \dot{u}(t)\}$. Определим энергию пластины $E(y)$ формулой $E(y(t)) = T(\dot{u}(t)) + \Pi(u(t))$, где кинетическая T и потенциальная Π энергии:

$$T(u) = \frac{1}{2}(\| \dot{u} \|^2 + \alpha \| \dot{u} \|_1^2);$$

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}\Big(\| \Delta u \|^2 + \frac{1}{2} \| \Delta v \|^2 - ([u, \theta], u) - 2(u, f)\Big),$$

а v определяется по u согласно (1б).

Лемма 2. *Для почти всех* $t, s \geqslant 0$

$$E(y(t)) - E(y(s)) = -\varepsilon_1 \int_s^t \| \dot{u}(\tau) \|^2 d\tau - \varepsilon_2 \int_s^t \| \dot{u}(\tau) \|_1^2 d\tau. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть $s = 0$. Предельным переходом от галеркинских приближений устанавливается энергетическое неравенство [2]. Далее следует использовать методику, развитую для абстрактных линейных дифференциальных уравнений второго порядка [3, гл. 3, § 8]. Имеющейся гладкости решения для этого достаточно.

Непрерывность отображения (4) при $i = 1$ вытекает из слабой непрерывности функции $S_t y_0$ по t и энергетического равенства (5) (нужно рассуждать так же, как и в случае линейных уравнений [3, гл. 3, § 8]).

Чтобы установить принадлежность $S_t y_0$ к E_2 при $y_0 \in E_2$, необходимо получить дополнительные априорные оценки. Для этого рассмотрим линейную относительно $\{w, \tilde{w}\}$ систему

$$L_t w + \Delta^2 w - [w, v + \theta] - [u, \tilde{w}] = 0;$$

$$\Delta^2 \tilde{w} + 2[u, w] = 0,\quad x \in \Omega,\quad t > 0; \qquad (6)$$

$$w|_\Gamma = \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_\Gamma = \tilde{w}\Big|_\Gamma = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0, \ w|_{t=0} = h_0, \ \dot{w}|_{t=0} = h_1,$$

где u и v определяются из (1). Если в (6) в качестве начальных условий взять $h_0 = u_1$, $h_1 = \ddot{u}(0)$, то эта система получается дифференцированием (1) по t и введением обозначений $w = \dot{u}$, $\tilde{w} = \dot{v}$. Рассматривая галеркинские приближения задачи (6) и используя оценки для u_m, стандартным методом [2, гл. 1] получаем априорные оценки для w_m, $\dot{w}_m$. Из них в силу теоремы единственности [2] для системы (1) вытекает, что $w(t) = \dot{u}(t)$ лежит в $\mathcal{L}$ и удовлетворяет (6) с $h_0 = u_1$, $h_1 = \ddot{u}(0)$, причем

$$\|\ddot{u}(0)\|_1 \leqslant C|y_0|_2^3 + C'. \tag{7}$$

Используя (1а), (1б) и лемму 1, получаем

$$u(t) \in L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega) \cap H^3(\Omega)).$$

Поэтому, как и в случае $i = 1$, лемма 8.1 [3, гл. 3] гарантирует слабую непрерывность $S_t y_0$ в E_2. Для доказательства сильной непрерывности можно рассуждать следующим образом. Так как $w(t) = \dot{u}(t)$ удовлетворяет (6), то

$$\frac{d}{dt}\left[T(\dot{w}(t)) + \frac{1}{2}\|\Delta w(t)\|^2\right] = A(t, \dot{w}(t), w(t)), \tag{8}$$

где

$$A(t, \dot{w}, w) = -\varepsilon_1\|\dot{w}\|^2 - \varepsilon_2\|\dot{w}\|_1^2 + ([w, v+\theta] + [u, \tilde{w}], \dot{w}).$$

Из (8) вытекает энергетическое равенство

$$T(\dot{w}(t)) + \frac{1}{2}\|\Delta w(t)\|^2 = T(\dot{w}(s)) + \frac{1}{2}\|\Delta w(s)\|^2 + \int_s^t A(\tau, \dot{w}, w)\, d\tau. \tag{9}$$

Оно позволяет установить сильную непрерывность в E_1 вектор-функции $\{\dot{u}(t), \ddot{u}(t)\}$. Используя теперь соотношения (1) и лемму 1, легко доказать непрерывность отображения (4) при $i = 2$.

Докажем обобщенную диссипативность полугруппы S_t в E_1 и E_2. В случае E_1 это свойство вытекает из (5). Пусть $i = 2$, $y_0 \in E_2$ и $|y_0|_2 < R$. Тогда $|y_0|_1 < R$, а в силу (7)

$$T(\dot{w}(0)) + \frac{1}{2}\|\Delta w(0)\|^2 \leqslant C_R.$$

Используя (1а) и обобщенную диссипативность при $i = 2$, получаем, что

$$\|u\|_3 \leqslant C\|\ddot{u}\|_1 + C_R. \tag{10}$$

Из (9) и (10) вытекает, что

$$|y(t)|_2^2 \leqslant C_R + C(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\int_0^t (\|[w, v+\theta]\|_{-1}^2 + \|[u, \tilde{w}]\|_{-1}^2)\, d\tau.$$

А неравенство $|y(t)|_1 < C_R$ и лемма 1 позволяют получить оценку

$$|y(t)|_2^2 \leqslant C_R^1 + C_R^2 \int_0^t |y(\tau)|_2^2 \|\dot{u}(\tau)\|_1^2 \, d\tau.$$

Но из (5) имеем, что $\int_0^\infty \|\dot{u}(\tau)\|_1^2 \, d\tau < \infty$. Применяя лемму Гронуолла, получаем обобщенную диссипативность S_t в E_2.

Теорема 2. *Пусть $i=1$ или $i=2$. Оператор S_t из E_i в E_i при любом $y_0 \in E_i$ обладает производной по Фреше, удовлетворяющей условию Липшица:*

$$\|S_t'(y_1) - S_t'(y_2)\| \, L_{(E_i,\, E_i)} \leqslant C \, |y_1 - y_2|_i.$$

Причем для любых $h = \{h_0, h_1\} \in E_i$, $S_t'(y_0)\,h = \{w, \dot{w}\}$, где w — решение задачи (6), u, v в (6) определяются по $y_0 = \{u_0, u_1\}$ из системы (1).

В идейном плане доказательство этой теоремы следует схеме, использованной в [4] при анализе гиперболической системы с нелинейностью вида $f(u)$.

3. Из (5) вытекает, что любая стационарная точка полугруппы S_t имеет вид $y = \{u(x), 0\}$, где $u(x)$ удовлетворяет стационарной системе уравнений Кармана

$$\begin{aligned} \Delta^2 u - [u, v + \theta] &= f(x); \\ \Delta^2 v + [u, u] &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

с условиями Дирихле (1в) на Γ. Как известно [5], каждое решение задачи (11) лежит в $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ и является критической точкой функционала потенциальной энергии $\Pi(u)$. Отметим, что число решений системы (11) существенно зависит от величины θ (пластина может иметь несколько форм равновесия [5]). Исключая v, систему (11) можно записать в виде $A[u] = f$. Ясно, A — дифференцируемое отображение из $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$.

Элемент $f \in L^2(\Omega)$ будем называть регулярным значением (отображения A), если для каждого решения u системы (11) оператор $A'(u)$ является обратимым.

Свойства системы (11) [5] позволяют установить справедливость следующего утверждения.

Лемма 3. *Пусть $\theta \in H^4(\Omega)$ фиксировано, тогда множество регулярных значений открыто и плотно в $L^2(\Omega)$.*

Доказательство. Лемма 1 позволяет показать, что прообраз каждого компактного в $L^2(\Omega)$ множества при отображении A компактен в $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$. Далее, как и в [4], нужно применить теорему Сарда-Смейла.

Теорема 3. *Пусть $f \in L^2(\Omega)$ — регулярное значение. Тогда полугруппа S_t имеет конечное число стационарных точек. Каждая стационарная точка имеет вид $y = \{u(x), 0\}$, где $u \in H_0^2 \cap H^4$ — невырожденная критическая точка функционала Π, и является гиперболической для полугруппы S_t в каждом из пространств E_1 и E_2.*

Доказательство использует теорему 2 и проводится по схеме, описанной в [4].

Напомним, что стационарная точка z полугруппы S_t называется гиперболической, если спектр линейного оператора $S'_t(z)$ не пересекается с единичной окружностью $\{\xi : |\xi| = 1\}$, спектральные подпространства E_+ и E_-, отвечающие соответственно внешности и внутренности единичного круга, не зависят от t, $\dim E_+ < \infty$.

4. Все выше изложенное позволяет установить следующий факт.

Теорема 4. *Если $f \in L^2(\Omega)$ — регулярное значение, то полугруппа S_t, действующая согласно (3), обладает регулярным максимальным (E_2, E_1)-аттрактором A, т. е.*

$$A = U_{z \in N} M(z),$$

где N — множество стационарных точек полугруппы S_t, а $M(z)$ — неустойчивое инвариантное многообразие, выходящее из точки z (см. [4]). *Если стационарные точки $z_i = \{u_i, 0\}$ упорядочить по возрастанию потенциальной энергии, т. е. так, чтобы $\Pi(u_i) \leqslant \leqslant \Pi(u_{i+1})$, то для множеств $M_j = U^j_{i=1} M(z_i)$ выполнены условия* (1.22) — (1.27) *из* [4]. *Каждое $M(z_i)$ есть C^1 — многообразие, диффеоморфное R^{n_i}, $n_i = \dim E_+(z_i)$.*

Доказательство. Теоремы 1 и 3 дают возможность показать, что S_t удовлетворяет условиям теоремы 6.1 [4]. В качестве функции Ляпунова следует взять полную энергию $E(y)$. Свойства полугруппы S_t на неустойчивых многообразиях $M(z)$ могут быть извлечены из энергетического равенства, априорных оценок, которые можно получить как при положительных, так и при отрицательных ε_1, ε_2, а также единственности решения задачи (1). Наконец, как и в [4], для любой стационарной точки z и достаточно малого $R > 0$ можно установить принадлежность к E_2 множества $M_1^R(z)$ точек $x_0 \in E_1$, таких, что существует последовательность $\{x_n\}$, обладающая свойствами $|x_n - z|_1 < R$, $S_1(x_{n+1}) = x_n$ при $n \geqslant 0$ и $|x_n - z|_1 \to 0$ при $n \to \infty$.

Заметим также, что с помощью принципа минимакса можно получить оценки для величины $\max \dim M(z_i)$.

Список литературы: 1. *Морозов Н. Ф.* О нелинейных колебаниях тонких пластин с учетом инерции вращения. — Докл. АН СССР, 1967, **176**, № 3, с. 522.— 525 с. 2. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М.: Мир, 1972.—588 с. 3. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.—372 с. 4. *Babin A. V., Vishik M. I.* Regular attractors of semigroups and evolution equations. — J. Math. pures et appl., 1983, **62**, p. 441—491. 5. *Сьярле Ф., Рабье П.* Уравнения Кармана. — М.: Мир, 1983. — 174 с.

Поступила в редколлегию 01.08.84.

УДК 517.9

А. И. ШАХБАЗОВ

О СПЕКТРЕ КОМПАКТНОГО ОПЕРАТОРА ВЗВЕШЕННОЙ КОМПОЗИЦИИ В НЕКОТОРЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Пусть D — относительно компактная область в пространстве $\mathbf{C}^n$, $\overline{D}$ — ее замыкание, и $\varphi\colon \overline{D} \to D$ — непрерывное отображение, голоморфное в D. Хорошо известно (см., например, [1, с. 105]), что отображение φ имеет в $\overline{D}$ единственную неподвижную точку z^0, причем $z^0 \in D$ и итерации φ^k отображения φ ($\varphi^0 = \mathrm{id}_{\overline{D}}$, $\varphi^{k+1} = \varphi^k \circ \varphi$, $k \geqslant 0$) равномерно на $\overline{D}$ сходятся к постоянному отображению $\varphi^\infty\colon \overline{D} \to D$, $\varphi^\infty(z) \equiv z^0$. Впредь мы будем считать, что $0 \in D$ и $z^0 = 0$.

Обозначим через $\mathrm{Hol}(D)$ алгебру всех функций, голоморфных в D, снабженную компактно-открытой топологией $\varkappa$, и положим, как обычно, $A(D) = C(\overline{D}) \cap \mathrm{Hol}(D)$. Алгебра $A(D)$ с равномерной нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{z \in \overline{D}} |f(z)|$ является банаховой. Пусть $X \subset \mathrm{Hol}(D)$ — некоторое банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$, содержащее $A(D)$ и являющееся банаховым $A(D)$-модулем относительно обычного умножения функций, так что для любых $f \in X$ и $a \in A(D)$ функция $af \in X$ и

$$\|af\|_X \leqslant \mathrm{const} \cdot \|a\|_\infty \cdot \|f\|_X \tag{1}$$

(постоянная в правой части не зависит от a и f). Из (1) следует, что для любой функции $f \in X$ оператор умножения $M_f\colon A(D) \to X$, $M_f(a) = fa$, непрерывен. Мы будем также предполагать, что естественное вложение $i\colon (X, \|\cdot\|_X) \subset\!\!\!\to (\mathrm{Hol}(D), \varkappa)$ непрерывно, т. е. для любого компакта $K \subset D$ существует такое $C_K > 0$, что

$$\|f\|_{K,\infty} = \sup_{z \in K} |f(z)| \leqslant C_K \|f\|_X \tag{2}$$

для всех $f \in X$.

Так как $\varphi(\overline{D}) \subset D$, то $f \circ \varphi \in A(D)$ для всех $f \in \mathrm{Hol}(D)$, причем

$$\|f \circ \varphi\|_\infty \leqslant \|f\|_{\varphi(\overline{D}),\infty}; \tag{3}$$

поэтому отображение $\Phi\colon \mathrm{Hol}(D) \to A(D)$, $\Phi(f) = f \circ \varphi$, является непрерывным линейным оператором. Поскольку пространство $\mathrm{Hol}(D)$ монтелевское (любое его ограниченное подмножество относительно компактно), этот оператор компактен (т. е. для любого

ограниченного множества $Q \subset \mathrm{Hol}(D)$ множество $\Phi(Q)$ относительно компактно в $A(D)$). Фиксируем некоторую функцию $u \in X$ и определим линейный оператор $T: X \to X$, полагая $T(f) = u \cdot (f \circ \varphi)$, $f \in X$. Оператор T разлагается в композицию

$$T = M_u \circ \Phi \circ i : X \xrightarrow{i} \mathrm{Hol}(D) \xrightarrow{\Phi} A(D) \xrightarrow{M_u} X$$

операторов i, Φ и M_u; так как i и M_u непрерывны, а Φ компактен, то T тоже компактен. Цель данной работы — вычисление спектра оператора T (при заданных u и φ). В случае $n = 1$ и $D = \{z \in \boldsymbol{C} : |z| < 1\}$ аналогичная задача рассматривалась Камовицем [2] для пространств $X = A(D)$ и $X = H^p(D)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ (см. также [3]; [4]); для $X = A(D)$ в [2] предполагается только, что φ, $u \in A(D)$, $\|\varphi\|_\infty \leqslant 1$ и $u(z) = 0$ в тех точках z, в которых $|\varphi(z)| = 1$ (эти условия обеспечивают компактность T). Наш подход к задаче существенно отличается от подхода Камовица; он основан (главным образом) на применении теории возмущений в сочетании с теоремой Пуанкаре о локальной линеаризуемости (возмущенного) отображения φ в малой окрестности неподвижной точки. Именно благодаря теореме Пуанкаре удается решить задачу для общих многомерных областей D.

Автор признателен Е. А. Горину и В. Я. Лину за постановку задачи и помощь в работе.

2. Формулировка теоремы. Представим отображение φ в виде $\varphi(z) = Az + \psi(z)$, где $A : \boldsymbol{C}^n \to \boldsymbol{C}^n$ — линейное отображение, а $|\psi(z)| \leqslant \mathrm{const} \cdot |z|^2$ для всех $z \in \overline{D}$ (здесь и далее $|\cdot|$ означает l_∞ — норму в $\boldsymbol{C}^n$, т. е. $|w| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |w_i|$ для любого $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \boldsymbol{C}^n$). Пусть $\sigma(A)$ — спектр отображения A и $\sigma_0(A) = \sigma(A) \setminus \{0\} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$. Так как $\varphi(\overline{D}) \subset D$, то $|\alpha| < 1$ для всех $\alpha \in \sigma_0(A)$ (см. лемму 1). Напомним, что собственное значение $\alpha_p \in \sigma_0(A)$ называется *резонансным*, если существуют такие целые неотрицательные $m_1, \ldots, m_s$, что $\sum m_i \geqslant 2$ и $\alpha_p = \alpha_1^{m_1} \ldots \alpha_s^{m_s}$. Пусть $\sigma_*(A)$ — подмножество в $\sigma_0(A)$, состоящее из всех нерезонансных собственных значений (легко понять, что если $\sigma_0(A) \neq \varnothing$, то и $\sigma_*(A) \neq \varnothing$). Обозначим через $\Pi(\varphi)$ мультипликативную подполугруппу (с единицей) в $\boldsymbol{C}$, порожденную множеством $\{0\} \cup \sigma_*(A)$; иными словами, $\Pi(\varphi)$ состоит из 0 и всех чисел вида $\lambda = \prod\limits_{\alpha_i \in \sigma_*(A)} \alpha_i^{q_i}$, $q_i \in \boldsymbol{Z}_+$ (здесь и далее $\boldsymbol{Z}_+$ — множество всех неотрицательных целых чисел).

Следующая теорема содержит основной результат работы.

Теорема. *Спектр оператора T* (в X) *совпадает с множеством $u(0) \cdot \Pi(\varphi)$. В частности, если $u(0) = 0$, то оператор T квазинильпотентен, а если $u(0) = 1$, то $\sigma(T) = \Pi(\varphi)$.*

3. Доказательство теоремы. Доказательству теоремы мы предпошлем несколько лемм.

Лемма 1. а) $|\alpha| < 1$ *для всех* $\alpha \in \sigma(A)$. б) *Существует такое положительное* $\gamma < 1$, *что*

$$|\varphi^k(z)| \leqslant \mathrm{const} \cdot \gamma^k \tag{4}$$

для всех $z \in \overline{D}$ *и всех* $k \in \boldsymbol{Z}_+$.

Доказательство. Как уже отмечалось, из условия $\varphi(\overline{D}) \subset \subset D$ следует, что итерации φ^k равномерно на D сходится к $\varphi^\infty \equiv \equiv z^0 = 0$; отсюда с помощью леммы Шварца легко получаются оба утверждения леммы.

Лемма 2. *Если* $u(0) = 0$, *то оператор* T *квазинильпотентен, так что* $\sigma(T) = \{0\} = u(0) \cdot \Pi(\varphi)$.

Доказательство. Если $u(0) = 0$, то

$$|u(z)| \leqslant \mathrm{const} \cdot |z|, \quad z \in \overline{D}. \tag{5}$$

Так как

$$(T^N f)(z) = u(z) \prod_{k=1}^{N-1} u(\varphi^k(z)) \cdot f(\varphi^N(z)) \tag{6}$$

и функции $u \circ \varphi^k$, $f \circ \varphi^N \in A(D)$, а $u \in X$, то из формулы (6) и неравенств (1) — (5) следует, что

$$\| T^N f \|_X \leqslant (\mathrm{const})^N \gamma^{\frac{N(N-1)}{2}} \| f \|_X.$$

Поэтому $\| T^N \|^{1/N} \leqslant \mathrm{const} \cdot \gamma^{\frac{N-1}{2}}$ и $\overline{\lim\limits_{N \to \infty}} \| T^N \|^{1/N} = 0$, ч. т. д.

Если $u(0) \neq 0$, то спектры операторов T и $\frac{1}{u(0)} T$ связаны соотношением $\sigma(T) = u(0) \cdot \sigma\left(\frac{1}{u(0)} T\right)$; поэтому в силу леммы 2 нам достаточно рассмотреть случай, когда $u(0) = 1$. В этом случае для всех $z \in \overline{D}$

$$|u(z) - 1| \leqslant \mathrm{const} \cdot |z|; \tag{7}$$

положим

$$u_N(z) = \prod_{k=0}^{N-1} u(\varphi^k(z)), \ z \in \overline{D}, \ N \in \boldsymbol{N}.$$

Так как $u \in X$ и $u \circ \varphi^k \in A(D)$ при $k \geqslant 1$, то $u_N \in X$; ясно, что для всех N

$$T_{u_N} = u_{N+1}. \tag{8}$$

Лемма 3. *Если* $u(0) = 1$, *то последовательность* $\{u_N\}$ *сходится в* X *к некоторой функции* $u_* \neq 0$, *причем* $Tu_* = u_*$, *так что* $1 \in \sigma(T)$.

Доказательство. Из неравенств (1) — (4) и (7) легко следует, что $\{u_N\}$ является последовательностью Коши в X, и потому сходится в X к некоторой функции u_*. Так как $u_N(0) = 1$

для всех N, то $u_*(0)=1$ и $u_*\neq 0$. Из (8) следует, что $Tu_* = u_*$, ч. т. д.

Из доказанной леммы, в частности, следует, что при достаточно большом N функция

$$\vartheta_N(z)=\prod_{k=N}^{\infty} u(\varphi^k(z))$$

является обратимым элементом алгебры $A(D)$; фиксируем такое N; понятно, что $u_N=u_*\vartheta_N^{-1}$. Фиксируем также произвольное $\lambda\neq 0$ и определим линейные операторы

$$\tilde{T}: X\to A(D) \text{ и } S_{\lambda,N}: X\to A(D),$$

полагая $\tilde{T}f=f\circ\varphi$ и $S_{\lambda,N}f=\lambda^{-N}\vartheta_N^{-1}\cdot\tilde{T}^N f$ (последняя формула имеет смысл, так как $A(D)\subset X$). Ясно, что $\tilde{T}$ и $S_{\lambda,N}$ компактны. В следующей лемме собраны простые, но полезные тождества, связывающие эти операторы с операторами T, M_{u_m} и M_{u_*}.

Лемма 4. *Справедливы следующие соотношения:*

$$T(fa)=Tf\cdot\tilde{T}a,\ a\in A(D),\ f\in X; \tag{9}$$

$$TM_{u_*}|A(D)=M_{u_*}\tilde{T}\,|\,A(D); \tag{10}$$

$$T^m=M_{u_m}\tilde{T}^m,\ m\geqslant 1; \tag{11}$$

$$\tilde{T}\vartheta_N^{-1}=(\tilde{T}^N u)\cdot\vartheta_N^{-1}; \tag{12}$$

$$(\tilde{T}^N u)\cdot(\tilde{T}^{N+1}f)=\tilde{T}^N Tf,\ f\in X; \tag{13}$$

$$M_{u_*}S_{\lambda,N}=\lambda^{-N}T^N; \tag{14}$$

$$\tilde{T}S_{\lambda,N}=S_{\lambda,N}T. \tag{15}$$

Доказательство. Тождества (9), (11) — (13) следуют прямо из определений; (10) следует из (9) и соотношения $Tu_*=u_*$ (см. лемму 3); (14) легко получается с помощью (11), а (15) — с помощью (12), (13).

В дальнейшем мы будем рассматривать $\tilde{T}$ как (компактный) оператор, действующий в X, не забывая, однако, что $\tilde{T}(X)\subset A(D)$. Пусть $\sigma(\tilde{T})$ — спектр $\tilde{T}$; любая собственная функция этого оператора принадлежит $A(D)$ (понятно, что 0 не является его собственным значением). Заметим, что операторы M_{u_*} и $S_{\lambda,N}$ инъективны, ибо $u_*\neq 0$ и $\vartheta_N^{-1}\neq 0$, а в $\mathrm{Hol}(D)$ нет делителей нуля. Следующая лемма сводит вычисления спектра (и собственных функций) оператора T к вычислению спектра (и собственных функций) $\tilde{T}$.

Лемма 5. *Если* $u(0)=1$, *то* $\sigma(T)=\sigma(\widetilde{T})$ *и для каждого* $\lambda\in\in\sigma(\widetilde{T})\diagdown\{0\}$ *оператор умножения* M_{u_*} *изоморфно отображает собственное подпространство* $\widetilde{L}_\lambda$ *оператора* $\widetilde{T}$ *на собственное подпространство* L_λ *оператора* T.

Доказательство. Ясно, что $0\in\sigma(T)\cap\sigma(\widetilde{T})$. Пусть $\lambda\neq 0$. Если $\lambda\in\sigma(\widetilde{T})$ и $0\neq a\in\widetilde{L}_\lambda\subset A(D)$, то из (10) следует, что $TM_{u_*}a=\lambda M_{u_*}a$; поэтому $\lambda\in\sigma(T)$ и $M_{u_*}(\widetilde{L}_\lambda)\subset L_\lambda$. Если же $\lambda\in\sigma(T)$ и $0\neq f\in L_\lambda$, то положим $a=S_{\lambda,N}f$. Тогда из (14) и соотношения $T^Nf=\lambda^Nf$ следует, что $M_{u_*}a=f$, а из (15) — $\widetilde{T}a=\lambda a$, поэтому $\lambda\in\sigma(\widetilde{T})$ и $L_\lambda\subset M_{u_*}(\widetilde{L}_\lambda)$. Лемма доказана.

Рассмотрим в $\boldsymbol{C}$-алгебре O_0 ростков голоморфных функций в точке $0\in D$ линейный оператор $\widetilde{\boldsymbol{T}}$, действующий по формуле $\widetilde{\boldsymbol{T}}\mathfrak{f}=\mathfrak{f}\bigcirc\boldsymbol{\varphi}$, где $\mathfrak{f}\in O_0$, а $\boldsymbol{\varphi}$ — росток отображения φ (в точке 0). Если $\lambda\neq 0$ — собственное значение этого оператора, то через $\widetilde{\boldsymbol{L}}_\lambda$ обозначим отвечающее ему собственное подпространство.

Лемма 6. *а) Если* $\lambda\neq 0$ — *собственное значение* $\widetilde{\boldsymbol{T}}$ *и* $\mathfrak{f}\in\widetilde{\boldsymbol{L}}_\lambda$, *то* $\lambda\in\sigma(\widetilde{T})$ *и существует единственная функция* $f\in\widetilde{L}_\lambda\subset A(D)$, *росток которой в* 0 *совпадает с* $\mathfrak{f}$.

б) Если $\lambda\in\sigma(\widetilde{T})\diagdown\{0\}$, то λ — *собственное значение оператора* $\widetilde{\boldsymbol{T}}$ *в* O_0.

Доказательство. Пусть f_V — представитель ростка $\mathfrak{f}$ в некоторой связной окрестности $V\subset D$ точки 0. Существует такое N_V, что $\varphi^N(\bar{D})\subset V$ при всех $N\geqslant N_V$. Так как $\mathfrak{f}=\lambda^{-N}\widetilde{\boldsymbol{T}}^N\mathfrak{f}=\lambda^{-N}\mathfrak{f}\bigcirc\boldsymbol{\varphi}^N$ и V связна, то $f_V(z)=\lambda^{-N}f_V(\varphi^N(z))$ для всех $z\in V$. При $N\geqslant N_V$ функция $f=\lambda^{-N}f_V\bigcirc\varphi^N$ принадлежит $A(D)$, не зависит от выбора N и удовлетворяет соотношению

$$\widetilde{T}f=\lambda^{-N}f_V\bigcirc\varphi^N\bigcirc\varphi=\lambda\bigcirc\lambda^{-(N+1)}f_V\bigcirc\varphi^{N+1}=\lambda f.$$

Ее росток f_0 в точке 0 совпадает с $\mathfrak{f}$, ибо $f_0=\lambda^{-N}\mathfrak{f}\bigcirc\varphi^N=\mathfrak{f}$. Единственность f с указанными свойствами следует из связности D. Утверждение (б) тривиально.

Из лемм 2, 3, 5 и 6 следует, что для доказательства теоремы нам достаточно показать, что множество $\Sigma(\widetilde{\boldsymbol{T}})$ всех (ненулевых) собственных значений оператора $\widetilde{\boldsymbol{T}}$ в O_0 совпадает с $\Pi(\varphi)\diagdown\diagdown\{0\}$. В следующей лемме мы докажем это в том (единственно важном для дальнейшего) частном случае, когда линейное приближение A отображения φ (в нуле) является «общим» и сжима-

ющим линейным эндоморфизмом C^n. Общность A означает, что все его собственные значения $\alpha_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ просты, отличны от 0 и мультипликативно независимы (т. е. если $m_i \in \mathbf{Z}$ и $\sum |m_i| \neq \neq 0$, то $\alpha_1^{m_1} \ldots \alpha_n^{m_n} \neq 1$). Мы называем A сжимающим, если все $|\alpha_i| < 1$. Очевидно, что множество общих сжимающих эндоморфизмов всюду плотно в пространстве всех сжимающих эндоморфизмов.

Лемма 7. *Если линейное приближение A отображения φ в точке 0 является общим, то* $\Sigma(\widetilde{T}) = \Pi(\varphi) \setminus \{0\}$.

Доказательство. Согласно лемме 1 эндоморфизм A является сжимающим, а так как он предполагается общим, то все его собственные значения нерезонансны. Поэтому к ростку $\boldsymbol{\varphi}$ отображения φ в точке 0 применима теорема Пуанкаре о локальной линеаризации [5, с. 176]. Таким образом, в точке 0 существует такой росток $\boldsymbol{w}$ системы координат w, биголоморфно связанной с исходными координатами z, что в этих координатах

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{w}) = A\boldsymbol{w}. \tag{16}$$

Так как спектр A прост, то, не ограничивая общности, можем считать, что в координатах w преобразование A диагонально: $A = \operatorname{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$. Пусть $\boldsymbol{a} \in O_0$, $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{w}) = \sum_q a_q \boldsymbol{w}^q$ (здесь и далее $q = (q_1, \ldots, q_n) \in (\mathbf{Z}_+)^n$, $\boldsymbol{w}^q = \boldsymbol{w}_1^{q_1}, \ldots, \boldsymbol{w}_n^{q_n}$, $a_q \in \mathbf{C}$). Тогда

$$(\widetilde{T}\boldsymbol{a})(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{a}(A\boldsymbol{w}) = \sum_q a_q \alpha^q \boldsymbol{w}^q, \tag{17}$$

где $\alpha^q = \alpha_1^{q_1}, \ldots, \alpha_n^{q_n}$. Если $\boldsymbol{a}$ — собственный вектор оператора $\widetilde{T}$ с собственным значением $\lambda \neq 0$, то из (17) следует, что

$$a_q \alpha^q = a_q \lambda \text{ для всех } q \in (\mathbf{Z}_+)^n. \tag{18}$$

Так как $\boldsymbol{a} \neq 0$, а числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ мультипликативно независимы, то из (18) легко следует, что существует единственное значение мультииндекса q, для которого $a_q \neq 0$ и $\lambda = \alpha^q$. Поэтому $\lambda \in \Pi(\varphi)$ (соответствующее собственное подпространство $\widetilde{L}_\lambda$ оператора $\widetilde{T}$ одномерно и порождается ростком $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{w}^q$). Обратно, если $\lambda \in \in \Pi(\varphi) \setminus \{0\}$, то $\lambda = \alpha^q$ для единственного значения мультииндекса q, и, согласно (17), росток $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{w}^q$ является собственным вектором оператора $\widetilde{T}$ с собственным значением λ. Лемма доказана.

Пусть V — такое открытое подмножество в D, что $\overline{V} \subset D$; обозначим через $A(D, V)$ метрическое пространство всех непрерывных отображений $\overline{D}$ в $\overline{V}$, голоморфных в D, с метрикой $\rho(\psi', \psi'') = \sup_{z \in \overline{D}} |\psi'(z) - \psi''(z)|$ (здесь $|\cdot|$, как обычно, l_∞ — норма в $\mathbf{C}^n$).

Лемма 8. *Для всех $f \in X$ и всех $\psi', \psi'' \in A(D, V)$ справедливо неравенство*

$$\|f \circ \psi' - f \circ \psi''\|_X \leqslant \text{const} \cdot \rho(\psi', \psi'') \cdot \|f\|_X \tag{19}$$

(постоянная в правой части не зависит от f, ψ', ψ'').

Доказательство. Так как $f \circ \psi'$, $f \circ \psi'' \in A(D)$, то из (1) следует, что

$$\|f \circ \psi' - f \circ \psi''\|_X \leqslant \mathrm{const} \cdot \|f \circ \psi' - f \circ \psi''\|_\infty. \tag{20}$$

Пусть $2\delta = \inf\{|z' - z''|: z' \in \overline{V}, \ z'' \in \partial D\}$ и V_δ — δ-окрестность компакта $\overline{V}$; ясно, что $\overline{V} \subset V_\delta \subset \overline{V}_\delta \subset D$ и

$$|f(v') - f(v'')| \leqslant \mathrm{const} \cdot \|f\|_{\overline{V}_\delta, \infty} \cdot |v' - v''| \tag{21}$$

для всех $f \in X$ и всех v', $v'' \in \overline{V}$. Так как $\psi'(\overline{D})$ и $\psi''(\overline{D})$ содержатся в $\overline{V}$, то из неравенств (2), (20) и (21) следует справедливость неравенства (19), ч. т. д.

Пусть $\{B_k\}$ — некоторая последовательность комплексных $(n \times \times n)$-матриц, стремящаяся к нулю. Рассмотрим возмущения ψ_k отображения φ:

$$\psi_k(z) = \varphi(z) + B_k z, \ z \in \overline{D}.$$

Фиксируем такое открытое подмножество V в D, что $\varphi(\overline{D}) \subset \subset V \subset \overline{V} \subset D$; если k достаточно велико, то $\psi_k(\overline{D}) \subset V$; поэтому мы можем (и будем) считать, что последнее включение справедливо для всех k. Из леммы 8 следует, что последовательность компактных линейных операторов

$$\widetilde{T}_k\colon X \to X, \ \widetilde{T}_k f = f \circ \psi_k,$$

сходится (по оперативной норме) к оператору $\widetilde{T}$. Пусть $\sigma(\widetilde{T}_k)$ — спектр оператора $\widetilde{T}_k$.

Для каждой последовательности множеств $\sigma_k \subset \boldsymbol{C}$, $k = 1, 2, \ldots$, обозначим через $\lim \sigma_k$ подмножество в $\boldsymbol{C}$, состоящее из всех предельных точек всех тех последовательностей $\{\zeta_k\} \subset \boldsymbol{C}$, для которых $\zeta_k \in \sigma_k$ при каждом k.

Так как операторы $\widetilde{T}$, $\widetilde{T}_k$ компактны, то все ненулевые точки их спектров изолированы. Поэтому из стандартных результатов теории возмущений (см., например, [6] с. 269, теорема 3.16) вытекает справедливость следующей леммы.

Лемма 9. $\sigma(\widetilde{T}) = \lim \sigma(\widetilde{T}_k)$.

Для каждого линейного отображения $C\colon \boldsymbol{C}^n \to \boldsymbol{C}^n$ обозначим через $\Pi(C)$ мультипликативную подполугруппу (с единицей) в $\boldsymbol{C}$, порожденную 0 и спектром C.

Лемма 10. *Если последовательность линейных эндоморфизмов A_k: $\boldsymbol{C}^n \to \boldsymbol{C}^n$ сходится к сжимающему эндоморфизму A, то $\Pi(A) = = \lim \Pi(A_k)$.*

Доказательство. Пусть $\sigma(A)$, $\sigma(A_k)$ — спектры отображений A, A_k; так как $A = \lim A_k$, то ясно, что $\sigma(A) = \lim \sigma(A_k)$. Отсюда сразу следует включение $\Pi(A) \subset \lim \Pi(A_k)$. Так как отображение A сжимающее, то спектры $\sigma(A_k)$ всех отображений A_k с достаточно большими номерами k лежат в круге радиуса

$r = r(A) < 1$. Отсюда следует, что если некоторая последовательность $\lambda_{k_j} \in \Pi(A_{k_j})$ сходится к $\lambda \neq 0$, то показатели степеней в мультипликативном представлении каждого λ_{k_j} через собственные значения отображения A_{k_j} ограничены в совокупности; поэтому, переходя к подпоследовательности $k_{j'}$, можно считать, что эти показатели (при подходящей нумерации собственных значений) для больших $k_{j'}$ стабилизируются. Учитывая, что собственные значения A_k сходятся к собственным значениям A, получаем, что $\lambda \in \Pi(A)$. Стало быть, $\lim \Pi(A_k) \subset \Pi(A)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Очевидно, сходящуюся к нулю последовательность матриц $\{B_k\}$ можно выбрать так, что для всякого k линейное приближение $A_k = A + B_k$ отображения ψ_k в точке 0 будет общим сжимающим эндоморфизмом C^n. Поэтому к операторам $\widetilde{T}_k$ применимы леммы 3, 5—7, из которых следует, что $\sigma(\widetilde{T}_k) = \Pi(\psi_k) = \Pi(A_k)$. Согласно лемме 9, $\sigma(\widetilde{T}) = \lim \sigma(\widetilde{T}_k)$, а из леммы 10 следует, что $\lim \Pi(A_k) = \Pi(A)$. Таким образом, $\sigma(\widetilde{T}) = \Pi(A)$. Остается заметить, что всякое ненулевое резонансное собственное значение A (мультипликативно) выражается через нерезонансные собственные значения (с неотрицательными показателями). Стало быть, $\Pi(A) = \Pi(\varphi)$. Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Эрве М.* Функции многих комплексных переменных. — М.: Мир, 1965.—102 с. 2. *Kamowitz H.* Compact operators of the form UC_φ.— Pacific I. of Math., 1979, **80**, № 1, p. 205—211. 3. *Caughran I. G., Schwartz H. I.* Spectra of compact composition operators. — Proc. Amer. Math. Soc., 1975, **51**, p. 127—130. 4. *Shapiro I. H., Taylor P. D.* Compact, nuclear and Hilbert—Schmidt composition operators on H^2. — Indiana Univ. Math. J., 1973, **23**, p. 471—496. 5. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.—256 с. 6. *Като И.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.—132 с.

Поступила в редколлегию 01.09.83.

УДК 517.54

В. К. ДУБОВОЙ

ИНДЕФИНИТНАЯ МЕТРИКА В ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ПРОБЛЕМЕ ШУРА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. VI*

В этой части работы продолжается исследование радиусов предельного круга Вейля (§ 12). Полученные результаты исполь-

* Первые пять частей статьи опубликованы в выпусках 37, 38, 41, 42 и 45 этого сборника.

зуются затем при описании регулярных расширений аналитических сжимающих матриц-функций (§ 13).

§ 12. Исследование радиусов предельного круга Вейля. Согласно теореме 11.1

$$\rho_{d,\infty}(\zeta, \theta) = \varphi^*(\zeta)\varphi(\zeta), \tag{12.1}$$

где $\varphi(\zeta) = \rho_{d,\infty}^{-\frac{1}{2}}(0, \theta) F^*(I - P_{\text{н}})(I - \zeta T P_{\text{н}})^{-1} F$. Здесь ортопроектор $I - P_{\text{н}}$ проектирует на подпространство $H_{\text{н}}^{(c)}$. Это подпространство инвариантно относительно сжатия T и сужение T на $H_{\text{н}}^{(c)}$ представляет собой максимальный односторонний сдвиг $V_{\text{н}}^{(c)}$ (см. часть III работы)*. Пусть L_0 — порождающее подпространство для $V_{\text{н}}^{(c)}$, а $P_{\text{н}}^{(0)}$ — ортопроектор в H на L_0. Тогда $H_{\text{н}}^{(c)} = L_0 \oplus T(L_0) \oplus \ldots \oplus T^n(L_0) \oplus \ldots$, $I - P_{\text{н}} = P_{\text{н}}^{(0)} + TP_{\text{н}}^{(0)}T^* + \ldots + T^n P_{\text{н}}^{(0)} T^{*n} + \ldots$

Прежде всего отметим, что

$$(I - P_{\text{н}}) F \rho_{d,\infty}^{-\frac{1}{2}}(0, \theta) F^*(I - P_{\text{н}}) = P_{\text{н}}^{(0)}.$$

Это следует из того, что оператор $K = (I - P_{\text{н}}) F \rho_{d,\infty}^{-\frac{1}{2}}(0, \theta) F^*(I - P_{\text{н}})$ удовлетворяет условиям $K^* = K$, $K^2 = K$, а его образ совпадает с L_0. Это позволяет (12.1) переписать в виде

$$\rho_{d,\infty}(\zeta, \theta) = F^*(I - \bar{\zeta} P_{\text{н}} T^*)^{-1} P_{\text{н}}^{(0)} (I - \zeta T P_{\text{н}})^{-1} F.$$

Учитывая, что $T^{*k}(L_0) \subset H_{\text{н}}$, получаем

$$\rho_{d,\infty}(\zeta, \theta) = F^*(I - \bar{\zeta} T^*)^{-1} P_{\text{н}}^{(0)} (I - \zeta T)^{-1} F. \tag{12.2}$$

Аналогично устанавливается, что

$$\rho_{d,\infty}(\zeta, \hat{\theta}) = G(I - \bar{\zeta} T)^{-1} P_{\text{у}}^{(0)} (I - \zeta T^*)^{-1} G^*, \tag{12.3}$$

где $P_{\text{у}}^{(0)}$ — ортопроектор на порождающее для одностороннего сдвига $V_{\text{у}}^{(c)}$ подпространство. Таким образом,

$$\rho_{d,\infty}(\zeta, \theta) = \overset{*}{\varphi_0}(\zeta)\varphi_0(\zeta), \quad \rho_{d,\infty}(\xi, \hat{\theta}) = \psi_0(\bar{\zeta})\overset{*}{\psi_0}(\bar{\zeta}), \tag{12.4}$$

где

$$\varphi_0(\zeta) = P_{\text{н}}^{(0)}(I - \zeta T)^{-1} F; \tag{12.5}$$

$$\psi_0(\zeta) = G(I - \zeta T)^{-1} P_{\text{у}}^{(0)}. \tag{12.6}$$

Функции $\varphi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ будем называть дефектными функциями сжимающей аналитической функции.

---

* Заметим, что подпространства $H_{\text{н}}^{(c)}$ и $H_{\text{у}}^{(c)}$ вообще говоря не обязательно ортогональны друг другу. На это внимание автора обратил Д. З. Аров.

Теорема 12.1. *Имеют место равенства*

$$I-\theta^*(\zeta)\,\theta(\zeta)-\rho_{d,\infty}(\zeta,\theta)=(1-|\zeta|^2)\,F^*(I-\bar\zeta T^*)^{-1}P_{\text{н}}(I-\zeta T)^{-1}F, \tag{12.7}$$

$$I-\hat\theta^*(\zeta)\,\hat\theta(\zeta)-\rho_{d,\infty}(\zeta,\hat\theta)=(1-|\zeta|^2)\,G(I-\bar\zeta T)^{-1}\,P_{\text{у}}(1-\zeta T^*)^{-1}G^*. \tag{12.8}$$

Для доказательства теоремы, очевидно, достаточно установить равенство (12.8). Как показано в [2, с. 149],

$$I-\theta^*(\zeta)\,\theta(\zeta)=(1-|\zeta|^2)\,F^*(I-\bar\zeta T^*)^{-1}(I-\zeta T)^{-1}F.$$

Отсюда следует

$$I-\theta^*(\zeta)\,\theta(\zeta)=(1-|\zeta|^2)\,F^*(I-\bar\zeta T^*)^{-1}(I-P_{\text{н}})(I-\zeta T)^{-1}F+$$
$$+(1-|\zeta|^2)\,F^*(I-\bar\zeta T^*)^{-1}P_{\text{н}}(I-\zeta T)^{-1}F,$$

и достаточно показать, что первое слагаемое в этой сумме равно $\rho_{d,\infty}(\zeta,\theta)$. Действительно,

$$(1-|\zeta|^2)\,F^*(I-\bar\zeta T^*)^{-1}(I-P_{\text{н}})(I-\zeta T)^{-1}F=$$
$$=(1-|\zeta|^2)\,F^*\sum_{k=0}^{\infty}\bar\zeta^kT^{*k}\sum_{n=0}^{\infty}T^nP_{\text{н}}^{(0)}T^{*n}\sum_{l=0}^{\infty}\zeta^lT^lF=$$
$$=(1-|\zeta|^2)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\bar\zeta^k\zeta^lF^*T^{*k-n}P_{\text{н}}^{(0)}T^{l-n}F=$$
$$=(1-|\zeta|^2)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\bar\zeta^{k+n}\zeta^{l+n}F^*T^{*k}P_{\text{н}}^{(0)}T^lF=$$
$$=F^*\sum_{k=0}^{\infty}\bar\zeta^kT^{*k}P_{\text{н}}^{(0)}\sum_{l=0}^{\infty}\zeta^lT^lF=$$
$$=F^*(I-\bar\zeta T^*)^{-1}P_{\text{н}}^{(0)}(I-\zeta T)^{-1}F=\rho_{d,\infty}(\zeta,\theta),$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Функции* $\begin{pmatrix}\varphi_0(\zeta)\\ \theta(\zeta)\end{pmatrix}$ *и* $(\psi_0(\zeta),\ \theta(\zeta))$ *являются сжимающими внутри единичного круга.*

§ 13. Радиусы предельных кругов Вейля и расширение сжимающих матриц-функций. Пусть $\theta(\zeta)\in S_{p,q}$ и $\Delta=(H,\ E_-,\ E_+;\ T,\ F,\ G,\ S)$ — простой унитарный узел, х. ф. которого является $\theta(\zeta)$. Триангуляции

$$T=\begin{pmatrix}V_{\text{н}}^{(c)} & *\\ 0 & T_{\text{н}}\end{pmatrix};\quad T=\begin{pmatrix}T_{\text{у}} & *\\ 0 & V_{\text{у}}^{(c)}\end{pmatrix} \tag{13.1}$$

порождают соответственно регулярные факторизации х. ф. $\theta(\zeta)$ (см. [2]):

$$\theta(\zeta)=\theta_{\text{н}}^{(c)}(\zeta)\,\theta_{\text{н}}(\zeta),\quad \theta(\zeta)=\theta_{\text{у}}(\zeta)\theta_{\text{у}}^{(c)}(\zeta). \tag{13.2}$$

Здесь $\theta_{\text{н}}^{(c)}(\zeta)$ и $\theta_{\text{у}}^{(c)}(\zeta)$ — х. ф. операторов $V_{\text{н}}^{(c)}$ и $V_{\text{у}}^{(c)}$, а $\theta_{\text{н}}(\zeta)$ и $\theta_{\text{у}}(\zeta)$ — х. ф. соответственно $T_{\text{н}}$ и $T_{\text{у}}$. Простой подсчет показывает, что

$$\theta_{\text{н}}^{(c)}(\zeta) = (0_{p\alpha},\ U_{\text{н}});\ \theta_{\text{у}}^{(c)}(\zeta) = \begin{pmatrix} 0_{\beta q} \\ U_{\text{у}} \end{pmatrix},$$

где α и β — кратности односторонних сдвигов $V_{\text{н}}^{(c)}$ и $V_{\text{у}}^{(c)}$ соответственно, 0_{kl} — нулевая матрица с k строками и l столбцами, а $U_{\text{н}}$ и $U_{\text{у}}$ — унитарные матрицы. При надлежащем выборе базисов можно считать, что

$$\theta_{\text{н}}^{(c)}(\zeta) = (0_{p\alpha},\ I_p);\ \theta_{\text{у}}^{(c)}(\zeta) = \begin{pmatrix} 0_{\beta q} \\ I_q \end{pmatrix}.$$

Но тогда из (13.2) следует

$$\theta_{\text{н}}(\zeta) = \begin{pmatrix} \theta_d(\zeta) \\ \theta(\zeta) \end{pmatrix},\quad \theta_{\text{у}}^{(c)}(\zeta) = (\theta_g(\zeta),\ \theta(\zeta)).$$

Теорема 13.1. *Имеют место факторизации*

$$\rho_{d,\infty}(\zeta, \theta) = \theta_d^*(\zeta)\,\theta_d(\zeta);\ \rho_{d,\infty}(\zeta, \widehat{\theta}) = \theta_g(\bar{\zeta})\,\theta_g^*(\bar{\zeta}). \tag{13.3}$$

Достаточно доказать первое из этих равенств. Из вида $\theta_{\text{н}}(\zeta)$ следует

$$I - \theta_{\text{н}}^*(\zeta)\,\theta_{\text{н}}(\zeta) = I - \theta^*(\zeta)\,\theta(\zeta) - \theta_d^*(\zeta)\,\theta_d(\zeta). \tag{13.4}$$

С другой стороны, учитывая, что $\theta_{\text{н}}(\zeta)$ является х. ф. оператора $T_{\text{н}}$, получаем (см. [2, с. 149])

$$I - \theta_{\text{н}}^*(\zeta)\,\theta_{\text{н}}(\zeta) = (1 - |\zeta|^2)\,F^* P_{\text{н}} (I - \bar{\zeta} T_{\text{н}}^*)^{-1} (I - \zeta T_{\text{н}})^{-1} P_{\text{н}} F.$$

Равенства

$$T_{\text{н}}^n P_{\text{н}} F = P_{\text{н}} T^n F,\ F^* P_{\text{н}} T_{\text{н}}^{*m} = F^* T^{*m} P_{\text{н}}$$

позволяют переписать последнее равенство в виде

$$I - \theta_{\text{н}}^*(\zeta)\,\theta_{\text{н}}(\zeta) = (1 - |\zeta|^2)\,F^* (I - \bar{\zeta} T^*)^{-1} P_{\text{н}} (I - \zeta T)^{-1} F.$$

Учитывая (13.4), имеем

$$I - \theta^*(\zeta)\,\theta(\zeta) - \theta_d^*(\zeta)\,\theta_d(\zeta) =$$
$$= (1 - |\zeta|^2)\,F^* (I - \bar{\zeta} T^*)^{-1} P_{\text{н}} (I - \zeta T)^{-1} F,$$

и первое из равенств (13.3) следует теперь из равенства (12.7).

Как и в работе [3], договоримся считать аналитические сжимающие матрицы-функции $\theta_i(\zeta) \in S_{p,q}$ $(i = 1,\ 2)$ совпадающими, если существуют такие унитарные матрицы τ и τ', что $\theta_1(\zeta) = \tau\theta_2(\zeta)\,\tau'$. Тогда из (12.4) и (13.3) вытекает

Следствие. *Имеют место равенства* $\theta_d(\zeta) = \varphi_0(\zeta)$, $\theta_g(\zeta) = \psi_0(\zeta)$, *т. е. факторизации*

$$\theta(\zeta) = (0_{p\alpha},\ I_p) \begin{pmatrix} \varphi_0(\zeta) \\ \theta(\zeta) \end{pmatrix},\ \theta(\zeta) = (\psi_0(\zeta),\ \theta(\zeta)) \begin{pmatrix} 0_{\beta q} \\ I_q \end{pmatrix}$$

являются регулярными и соответствуют триангуляциям (13.1)

В связи с изложенным представляют интерес следующие простые утверждения.

Лемма 13.1. *Пусть х. ф.* $\theta(\zeta)$ *простого унитарного узла* $\Delta = (H, E_-, E_+; T, F, G, S)$ *допускает регулярную факторизацию*

$$\theta(\zeta) = (O_{p\alpha'},\ I_p)\begin{pmatrix}\theta_1(\zeta)\\ \theta(\zeta)\end{pmatrix}. \tag{13.5}$$

Тогда сжатие T *содержит максимальный односторонний сдвиг, кратность которого не меньше* α'.

Лемма 13.2. *Пусть х. ф.* $\theta(\zeta)$ *простого унитарного узла* $\Delta = (H, E_-, E_+; T, F, G, S)$ *допускает регулярную факторизацию*

$$\theta(\zeta) = (\theta_2(\zeta),\ \theta(\zeta))\begin{pmatrix}O_{\beta' q}\\ I_q\end{pmatrix}. \tag{13.6}$$

Тогда сжатие T^* *содержит максимальный односторонний сдвиг, кратность которого не меньше* β'.

Определение. *Будем говорить, что аналитическая сжимающая матрица-функция* $\theta(\zeta) \in S_{p,q}$ *допускает регулярное расширение вверх на* α *строк (влево на* β *столбцов), если существует аналитическая сжимающая матрица-функция*

$$\theta_1(\zeta) \in S_{\alpha,q}\ \ (\theta_2(\zeta) \in S_{p,\beta}),$$

такая, что матрица-функция $\begin{pmatrix}\theta_1(\zeta)\\ \theta(\zeta)\end{pmatrix}$ $((\theta_2(\zeta),\ \theta(\zeta)))$ *является сжимающей, при этом почти всюду на единичной окружности выполняется равенство*

$$\operatorname{rang}(I - \theta^*(e^{it})\,\theta(e^{it})) = \alpha + \operatorname{rang}(I - \theta^*(e^{it})\,\theta(e^{it}) - \theta_1^*(e^{it})\,\theta_1(e^{it}))$$
$$(\operatorname{rang}(I - \theta(e^{it})\,\theta^*(e^{it})) = \beta + \operatorname{rang}(I - \theta(e^{it})\,\theta^*(e^{it}) - \theta_2(e^{it})\,\theta_2^*(e^{it}))).$$

В работе [2, с. 165] даны аналитические признаки регулярности факторизаций. Из четвертого из этих признаков следует

Теорема 13.2. *Для того чтобы факторизация* (13.5), (13.6) *была регулярной, необходимо и достаточно, чтобы матрица-функция* $\begin{pmatrix}\theta_1(\zeta)\\ \theta(\zeta)\end{pmatrix}$ $((\theta_2(\zeta),\ \theta(\zeta)))$ *являлась регулярным расширением* $\theta(\zeta)$.

Проведенные выше рассуждения позволяют доказать следующие утверждения.

Теорема 13.3. *Среди всех регулярных расширений вверх (влево) матрицы-функции* $\theta(\zeta) \in S_{p,q}$ *имеется максимальное*

$$\begin{pmatrix}\theta_{1M}(\zeta)\\ \theta(\zeta)\end{pmatrix}((\theta_{2M}(\zeta),\ \theta(\zeta)))$$

в том смысле, что для любого другого регулярного расширения

$$\begin{pmatrix}\theta_1(\zeta)\\ \theta(\zeta)\end{pmatrix}((\theta_2(\zeta),\ \theta(\zeta)))$$

имеет место неравенство

$$\theta_1^*(\zeta)\,\theta_1(\zeta)\leqslant\theta_{1M}^*(\zeta)\,\theta_{1M}(\zeta)\quad\bigl(\theta_2(\zeta)\,\theta_2^*(\zeta)\leqslant\theta_{2M}(\zeta)\,\theta_{2M}^*(\zeta)\bigr).$$

Максимальное расширение определяется единственным образом и имеет вид

$$\begin{pmatrix}\varphi_0(\zeta)\\ \theta(\zeta)\end{pmatrix}((\psi_0(\zeta),\ \theta(\zeta))),$$

где $\varphi_0(\zeta)$, $(\psi_0(\zeta))$ — *дефектная функция, определяемая равенством* (12.5), (12.6).

Доказательство. Рассмотрим произвольное регулярное расширение $\begin{pmatrix}\theta_1(\zeta)\\ \theta(\zeta)\end{pmatrix}$, т. е. факторизация

$$\theta(\zeta)=(0_{p\alpha'},\ I_p)\begin{pmatrix}\theta_1(\zeta)\\ \theta(\zeta)\end{pmatrix}\tag{13.7}$$

является регулярной. Матрица-функция $(0_{p\alpha'},\ I_p)$ является х. ф. одностороннего сдвига кратности α'. Пусть $\Delta=(H,\ E_-,\ E_+;\ T,\ F,\ G,\ S)$ — простой унитарный узел, х. ф. которого является $\theta(\zeta)$. Регулярность факторизации (13.7) означает, что сжатие T содержит односторонний сдвиг кратности α'. Пусть α — кратность максимального одностороннего сдвига, входящего в T. Максимальный односторонний сдвиг порождает факторизацию

$$\theta(\zeta)=(0_{p\alpha},\ I_p)\begin{pmatrix}\varphi_0(\zeta)\\ \theta(\zeta)\end{pmatrix}.\tag{13.8}$$

Так как произвольный односторонний сдвиг содержится в максимальном, то из регулярности факторизаций (13.7) и (13.8) следует (см. [2]) существование такой сжимающей аналитической матрицы-функции $\tilde\theta(\zeta)$, что имеют место регулярные факторизации

$$(0_{p\alpha},\ I_p)=(0_{p\alpha'},\ I_p)\,\tilde\theta(\zeta),\quad\begin{pmatrix}\theta_1(\zeta)\\ \theta(\zeta)\end{pmatrix}=\tilde\theta(\zeta)\begin{pmatrix}\varphi_0(\zeta)\\ \theta(\zeta)\end{pmatrix}.$$

Из вида множителей, входящих в первую факторизацию, сразу следует, что $\tilde\theta(\zeta)=\begin{pmatrix}\theta'(\zeta) & 0\\ 0 & I_p\end{pmatrix}$, при этом $\theta'(\zeta)\in S_{\alpha',\alpha}$ и почти всюду на единичной окружности выполняется равенство

$$\operatorname{rang}(I-\theta'^*(e^{it})\,\theta'(e^{it}))=\alpha-\alpha'.$$

Из вида второй факторизации получаем $\theta_1(\zeta)=\theta'(\zeta)\,\varphi_0(\zeta)$. Таким образом, $\theta_1^*(\zeta)\,\theta_1(\zeta)\leqslant\varphi_0^*(\zeta)\,\varphi_0(\zeta)$. Равенство в этом неравенстве

будет достигаться в том и только в том случае, если $\theta'(\zeta)$ является постоянной унитарной матрицей, то есть тогда и только тогда, когда $\theta_1(\zeta) = \varphi_0(\zeta)$. Следовательно, $\theta_{1M}(\zeta) = \varphi_0(\zeta)$. Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

Замечание. Доказанная теорема вскрывает связь между радиусами предельных кругов Вейля и функцией $\theta(\zeta)$.

Теорема 13.4. *Пусть* $\theta(\zeta) \in S_{p,q}$ и $\Delta = (H, E_-, E_+; T, F, G, S)$ — *простой унитарный узел, х. ф. которого совпадает с* $\theta(\zeta)$. *Пусть максимальный односторонний сдвиг* $V_{\text{н}}^{(c)}$ $(V_{\text{у}}^{(c)})$, *входящий в сжатие* T (T^*), *имеет кратность* α (β), *т. е. максимальное регулярное расширение* $\theta(\zeta)$ *вверх (влево) есть расширение на* α *строк* (β *столбцов*). *Тогда для любого целого числа* α', $0 < \alpha' \leqslant \alpha$ (β', $0 < \beta' \leqslant \beta$) *имеется регулярное расширение* $\theta(\zeta)$ *вверх (влево) на* α' *строк* (β' *столбцов*). *Каждое такое расширение имеет вид* $\begin{pmatrix} p(\zeta) \\ \theta(\zeta) \end{pmatrix}$ $((q(\zeta), \theta(\zeta)))$, *где*

$$p(\zeta) = P_0 (I - \zeta T)^{-1} F \, (q(\zeta) = G (I - \zeta T)^{-1} Q_0), \tag{13.9}$$

а P_0 (Q_0) — *ортопроектор на блуждающее относительно одностороннего сдвига* $V_{\text{н}}^{(c)}$ $(V_{\text{у}}^{(c)})$ *подпространство размерности* α' (β'). Равенство (13.9) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между регулярными расширениями вверх (влево) функции $\theta(\zeta)$ и блуждающими относительно $V_{\text{н}}^{(c)}$ $(V_{\text{у}}^{(c)})$ подпространствами.

Доказательство. Пусть целое число α' удовлетворяет условию $0 < \alpha' \leqslant \alpha$. Поскольку кратность максимального одностороннего сдвига $V_{\text{н}}^{(c)}$ равна α, то T содержит и односторонний сдвиг кратности α'. Рассматривая факторизацию $\theta(\zeta)$, порождаемую одним из этих односторонних сдвигов, получаем регулярную факторизацию

$$\theta(\zeta) = (0_{p\alpha'}, \; I_p) \begin{pmatrix} p(\zeta) \\ \theta(\zeta) \end{pmatrix}, \tag{13.10}$$

и первое утверждение теоремы следует теперь из теоремы 13.2.

Рассмотрим теперь произвольное регулярное расширение $\begin{pmatrix} p(\zeta) \\ \theta(\zeta) \end{pmatrix}$ функции $\theta(\zeta)$ на α' строк вверх. Тогда факторизация (13.10) является регулярной и, значит, порождается триангуляцией вида $T = \begin{pmatrix} V_{\alpha'} & * \\ 0 & T' \end{pmatrix}$, где $V_{\alpha'}$ — односторонний сдвиг кратности α'. Так как $\begin{pmatrix} p(\zeta) \\ \theta(\zeta) \end{pmatrix}$ является х. ф. оператора T', то (см. [2, с. 149])

$$I - (p^*(\zeta), \; \theta^*(\zeta)) \begin{pmatrix} p(\zeta) \\ \theta(\zeta) \end{pmatrix} = (1 - |\zeta|^2) F^* P' (I - \bar{\zeta} T'^*)^{-1} \times$$
$$\times (I - \zeta T)^{-1} P' F = (1 - |\zeta|^2) F^* (I - \bar{\zeta} T^*)^{-1} P' (I - \zeta T)^{-1} F.$$

Так как

$$I-\theta^*(\zeta)\,\theta(\zeta)=(1-|\zeta|^2)\,F^*(I-\bar{\zeta}T^*)^{-1}(I-\zeta T)^{-1}F,$$

то из последних двух равенств находим

$$p^*(\zeta)\,p(\zeta)=(1-|\zeta|^2)\,F^*(1-\bar{\zeta}T^*)^{-1}(I-P')(I-\zeta T)^{-1}F.$$

Отсюда, повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 12.1, получаем

$$p^*(\zeta)\,p(\zeta)=F^*(I-\bar{\zeta}T^*)^{-1}P_0(I-\zeta T)^{-1}F,$$

где P_0 — ортопроектор на подпространство, порождающее для одностороннего сдвига $V_{\alpha'}$. Таким образом

$$p(\zeta)=P_0(I-\zeta T)^{-1}F$$

и равенство (13.9) доказано. Доказательство остальных утверждений теоремы теперь не представляет труда.

Множество всех регулярных расширений вверх (влево) аналитической сжимающей матрицы-функции $\theta(\zeta)$ можно естественным образом сделать частично упорядоченным, а именно будем считать, что

$$\begin{pmatrix}\varphi_1(\zeta)\\ \theta(\zeta)\end{pmatrix}\prec\begin{pmatrix}\varphi_2(\zeta)\\ \theta(\zeta)\end{pmatrix}\left((\varphi_1(\zeta),\ \theta(\zeta))\prec(\psi_2(\zeta),\ \theta(\zeta))\right),$$

если

$$\overset{*}{\varphi}_1(\zeta)\,\varphi_1(\zeta)\leqslant\overset{*}{\varphi}_2(\zeta)\,\varphi_2(\zeta)\quad\left(\psi_1(\zeta)\,\overset{*}{\psi}_1(\zeta)\leqslant\psi_2(\zeta)\,\overset{*}{\psi}_2(\zeta)\right).$$

Очевидно, максимальное расширение

$$\begin{pmatrix}\varphi_0(\zeta)\\ \theta(\zeta)\end{pmatrix}\left((\varphi_0(\zeta),\ \theta(\zeta))\right)$$

играет в этом множестве роль максимального элемента.

Список литературы: 1. *Дубовой В. К.* Индефинитная метрика в интерполяционной проблеме Шура для аналитических функций. — Теория функций, функцион. анализ и их приложения, 1982, вып. 37, с. 14—26; 1982, вып. 38, с. 32—40; 1984, вып. 41, с. 55—64; 1984, вып. 42, с. 46—57; вып. 45, с. 16—27. 2. *Бродский М. С.* Унитарные операторные узлы и их характеристические функции. — Успехи мат. наук, 1978, 33, вып. 4 (202), с. 144—168. 3. *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Мир, 1970.—325 с.

Поступила в редколлегию 01. 12. 83.

УДК 517.53

В. И. БАБИЙ

О ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЯХ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Теория целых функций вполне регулярного роста, созданная Б. Я. Левиным и А. Пфлюгером, распространена Н. В. Говоровым (см. [1, 2]) на функции, голоморфные в полуплоскости $C^+ = \{z \in C : \operatorname{Im} z > 0\}$, и, следовательно, на функции, голоморфные в произвольном угле. При этом обнаружены явления, существенно отличающие случай функций в C^+ от случая целых функций. В работе [3] Л. И. Ронкин установил, что функция, голоморфная в верхней полуплоскости и не более чем нормального типа при порядке* $\rho > 1$, будет иметь вполне регулярный рост в C^+ тогда и только тогда, когда $\forall \varphi(z) \in C(\overline{B}_1)$, где $B_R = \{z \in C^+ : |z| < R\}$

$$\exists \lim_{t\to\infty} t^{-\rho} \int\limits_{B_1\setminus B_{1/t}} \ln|f(tz)|\,|z|^{-2}\varphi(z)\sin(\arg z)\,d\sigma_z = \int\limits_{B_1} L_f(z)\,|z|^{-2}\varphi(z)\sin(\arg z)\,d\sigma_z.$$

Здесь $d\sigma_z$ — элемент площади в C, а $L_f(z)$ — индикатор функции $f(z)$, т. е.

$$L_f(z) = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-\rho}\ln|f(tz)|,\quad z \in C^+.$$

В [4] при изучении оценок индикатора снизу рассматривалась сходимость последовательности функций

$$\{t_j^{-\rho}\ln|f(t_j z)|\} \text{ в } D'(C^+).$$

В данной заметке мы покажем, что вполне регулярность роста функции $f(z)$ в верхней полуплоскости C^+ эквивалентна слабой сходимости семейства функций $t^{-\rho}\ln|f(tz)|$, отличной от рассмотренной в [3]. Справедлива следующая

Теорема. *Пусть $f(z)$ — голоморфная функция в полуплоскости C^+ и не более чем нормального типа при порядке $\rho > 0$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $f(z)$ — *функция вполне регулярного роста* в C^+;
2) $\exists \lim\limits_{t\to\infty} t^{-\rho} \int\limits_{B_1\setminus B_{1/t}} \ln|f(tz)|\,|z|^{-2}\varphi(z)\,d\sigma_z$,

$\forall \varphi(z) \in C(\overline{B}_1)$;

* Определение порядка и нормальности типа функции в полуплоскости см. [2, 5].

3) $\exists \lim\limits_{t\to\infty} t^{-\rho} \int\limits_{B_1} \ln|f(tz)|\,\varphi(z)\,d\sigma_z$,

$\forall \varphi(z) \in D(B_1)$*.

Прежде чем доказывать эту теорему, отметим, что из нее вытекает как следствие теорема Л. И. Ронкина и в случае $0 < \rho \leqslant 1$, нерассмотренном в [3].

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Rightarrow$ 2).

Рассмотрим множества

$$C_1 = \left\{z \in \boldsymbol{C} : \frac{\varepsilon}{2} \leqslant |z| \leqslant 1,\ 0 \leqslant \arg z \leqslant 2\theta_0\right\};$$

$$C_2 = \left\{z \in \boldsymbol{C} : \frac{\varepsilon}{2} \leqslant |z| \leqslant 1,\ \theta_0 \leqslant \arg z \leqslant \pi - \theta_0\right\};$$

$$C_3 = \left\{z \in \boldsymbol{C} : \frac{\varepsilon}{2} \leqslant |z| \leqslant 1,\ \pi - 2\theta_0 \leqslant \arg z \leqslant \pi\right\};$$

$$C_4 = \{z \in \boldsymbol{C} : 0 \leqslant |z| \leqslant \varepsilon,\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \pi\}.$$

Здесь $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{4}$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

Объединение этих множеств равно $\overline{B}_1$. Произведем соответствующее «разбиение» единицы, а именно, возьмем функции

$$\Psi_j(z) \in C^\infty(\overline{B}_1),\ j = 1, \ldots, 4,$$

такие, что

1) $\operatorname{supp}(\Psi_j) \subset C_j$;

2) $0 \leqslant \Psi_j(z) \leqslant 1$;

3) $\sum\limits_{j=1}^{4} \Psi_j(z) \equiv 1,\ \forall z \in \overline{B}_1$.

Для любого $t > 1$ имеем

$$S(t) \overset{\text{def}}{=} \Big| t^{-\rho} \int\limits_{B_1 \setminus B_{1/t}} \ln|f(tz)|\,|z|^{-2}\varphi(z)\,d\sigma_z -$$

$$- \int\limits_{B_1} L_f(z)\,|z|^{-2}\varphi(z)\,d\sigma_z \Big| =$$

$$= \Big| t^{-\rho} \int\limits_{B_1 \setminus B_{1/t}} \ln|f(tz)|\,|z|^{-2}\varphi(z)\left(\sum_{j=1}^{4} \Psi_j(z)\right) d\sigma_z -$$

$$- \int\limits_{B_1} L_f(z)\,|z|^{-2}\varphi(z)\left(\sum_{j=1}^{4} \Psi_j(z)\right) d\sigma_z \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big| t^{-\rho} \int\limits_{C_1} \ln|f(tz)|\,|z|^{-2}\varphi(z)\,\Psi_1(z)\,d\sigma_z \Big| +$$

$$+ \Big| \int\limits_{C_1} L_f(z)\,|z|^{-2}\varphi(z)\,\Psi_1(z)\,d\sigma_z \Big| +$$

---

* Как обычно $D(B_1)$ — пространство функций $\varphi(z) \in C^\infty(B_1)$ с компактным носителем в B_1.

$$+\left|t^{-\rho}\int\limits_{C_2}\ln|f(tz)|\,|z|^{-2}\varphi(z)\Psi_2(z)\,d\sigma_z-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{C_2}L_f(z)|z|^{-2}\varphi(z)\Psi_2(z)\,d\sigma_z\right|+$$

$$+\left|t^{-\rho}\int\limits_{C_3}\ln|f(tz)|\,|z|^{-2}\varphi(z)\Psi_3(z)\,d\sigma_z\right|+$$

$$+\left|\int\limits_{C_3}L_f(z)|z|^{-2}\varphi(z)\Psi_3(z)\,d\sigma_z\right|+$$

$$+\left|t^{-\rho}\int\limits_{C_4\setminus B_{1/t}}\ln|f(tz)|z|^{-2}\varphi(z)\Psi_4(z)\,d\sigma_z\right|+$$

$$+\left|\int\limits_{C_4}L_f(z)|z|^{-2}\varphi(z)\Psi_4(z)\,d\sigma_z\right|=$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6+I_7.$$

Оценим I_1, считая, что $|\varphi(z)|\leqslant 1$, что, очевидно, не нарушает общности. Получим

$$I_1\leqslant t^{-\rho}\int\limits_0^{2\theta_0}d\theta\int\limits_1^t|\ln|f(re^{i\theta})||\frac{dr}{r}. \qquad (1)$$

В [2] показано, что если $f(z)$ — функция вполне регулярного роста в $\boldsymbol{C}^+$, то

$$\sup_{\substack{t>1\\0<\theta<\pi}}t^{-\rho}\int\limits_1^t|\ln|f(re^{i\theta})||\frac{dr}{r}=T_f<\infty. \qquad (2)$$

Отсюда и из (1) заключаем $I_1\leqslant 2\theta_0T_f$. Аналогично $I_4\leqslant$ $\leqslant 2\theta_0T_f$.

Чтобы оценить I_3, воспользуемся тем, что, как следует из леммы 3* работы [6], для любой функции $f(z)$ вполне регулярного роста в $\boldsymbol{C}^+$ и любой непрерывной в C_2 функции $\chi(z)$ справедливо равенство

$$\lim_{t\to\infty}t^{-\rho}\int\limits_{C_2}\ln|f(tz)|\chi(z)\,d\sigma_z=\int\limits_{C_2}L_f(z)\chi(z)\,d\sigma_z.$$

Применяя это соотношение с функцией $\chi(z)=|z|^{-2}\varphi(z)\Psi_2(z)$, заключаем, что $I_3=o(1)$ при $t\to\infty$.

Для оценки I_6 вновь используем оценку (2). Имеем

$$I_6\leqslant t^{-\rho}\int\limits_0^{\pi}d\theta\int\limits_1^{\varepsilon t}|\ln|f(re^{i\theta})||\frac{dr}{r}<\pi\varepsilon^\rho T_f.$$

Рассмотрим теперь интегралы, содержащие индикатор. Имеем

$$I_2\leqslant\frac{1}{\rho}\int\limits_0^{2\theta_0}|h(\theta)|\,d\theta,\quad I_5\leqslant\frac{1}{\rho}\int\limits_{\pi-2\theta_0}^{\pi}|h(\theta)|\,d\theta,\quad I_7\leqslant\frac{\varepsilon^\rho}{\rho}\int\limits_0^{\pi}|h(\theta)|\,d\theta.$$

---

* Требование голоморфности $f(z)$ в начале координат, фигурирующее в лемме 3, в нашем случае излишне, поскольку множество C_2 отграничено от нуля.

Так как $f(z)$ — функция не более чем нормального типа, а ее индикатор является ρ-тригонометрически выпуклой функцией, то, как нетрудно видеть,

$$\sup_{0<\theta<\pi} |h(\theta)| = C_h < \infty,$$

и, значит,

$$I_2 + I_5 \leqslant \frac{4}{\rho} \theta_0 C_h, \quad I_7 \leqslant \frac{\varepsilon^\rho}{\rho} \pi C_h.$$

Подытоживая проведенные оценки, получаем

$$S(t) \leqslant o(1) + A\theta_0 + B\varepsilon^\rho$$

(A, B — константы), и, значит, для любого наперед заданного $\eta > 0$ можно выбрать ε, θ_0, t_0 так, что при $t > t_0$ будет выполнено неравенство $S(t) \leqslant \eta$.

Следовательно, утверждение 2) имеет место и тем самым доказана импликация 1) $\Rightarrow$ 2). Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) очевидна.

Теперь докажем импликацию 3) $\Rightarrow$ 1).

При выполнении условия 3) семейство функций $t^{-\rho} \ln |f(tz)|$ сходится в пространстве $D'(B_1)$ к некоторой функции $\widetilde{L}_f(z)$. Как легко видеть, обобщенная функция $\widetilde{L}_f(z)$ на самом деле является субгармонической, позитивно однородной порядка ρ функцией.

Покажем, что $\widetilde{L}(z) = L_f(z)$.

Так как $f(z)$ имеет не более чем нормальный тип при порядке ρ, то в каждом угле $\alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta$ $(0 < \alpha < \beta < \pi)$ для любого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого r_ε, выполнено неравенство

$$\ln |f(re^{i\theta})| < (h(\theta) + \varepsilon) r^\rho.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\rho} \int_{B_1} \ln |f(tz)| \varphi(z) d\sigma_z \leqslant$$

$$\leqslant \int_{B_1} L_f(z) \varphi(z) d\sigma_z, \quad \forall \varphi(z) \in D(B_1),$$

$$\varphi(z) \geqslant 0.$$

Но согласно определению функции $\widetilde{L}(z)$ справедливо равенство

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\rho} \int_{B_1} \ln |f(tz)| \varphi(z) d\sigma_z = \int_{B_1} \widetilde{L}(z) \varphi(z) d\sigma_z, \ \forall \varphi(z) \in D(B_1)$$

и, таким образом,

$$\int_{B_1} \widetilde{L}(z) \varphi(z) d\sigma_z \leqslant \int_{B_1} L_f(z) \varphi(z) d\sigma_z,$$

$$\forall \varphi(z) \in D(B_1), \quad \varphi(z) \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$\widetilde{L}(z) \leqslant L_f(z).$$

Предположим, что в какой-то точке $z_0 \in C^+$ выполнено строгое неравенство

$$\widetilde{L}(z_0) < L_f(z_0).$$

Индикатор $L_f(z)$, как известно, является непрерывной, субгармонической, позитивно однородной функцией в C^+. Поэтому найдутся такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что

$$\widetilde{L}(z) < L_f(z) - \varepsilon |z|^\rho \tag{3}$$

как только $|z - z_0| < \delta$. Аналогично, для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется $\delta_1 > 0$ такое, что

$$\widetilde{L}(z) < L_f(z_0) + \varepsilon_1 \tag{4}$$

как только $|z - z_0| < \delta_1$. Выберем $\varepsilon_1 < \varepsilon |z_0|^\rho$ и положим $\varphi_0(z) = \alpha(|z - z_0|)$, где $\alpha(|t|)$ — какая-нибудь положительная, бесконечно дифференцируемая функция на R, удовлетворяющая следующим условиям:

$$1) \int_0^R \alpha(r)\, r dr = \frac{1}{2\pi}; \quad 2) \ \alpha(|t|) = 0$$

при $|t| > R = \min\{\delta, \delta_1\}$. Обозначим

$$I = t^{-\rho} \int_{B_1} \ln |f(tz)|\, \varphi_0(z)\, d\sigma_z.$$

Оценим интеграл I снизу, воспользовавшись субгармоничностью функции $\ln |f(tz)|$

$$I = 2\pi t^{-\rho} \int_0^R \alpha(r)\, r dr\, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(t(z_0 + re^{i\theta}))|\, d\theta \geqslant \ln |f(tz_0)|\, t^{-\rho}.$$

Переходя здесь к пределу при $t \to \infty$, получаем

$$\int_{B_1} \widetilde{L}(z)\, \varphi_0(z)\, d\sigma_z \geqslant L_f(z_0). \tag{5}$$

Оценим интеграл из (5) сверху, используя (3), (4) и субгармоничность функции $|z|^\rho$.

Получаем

$$\begin{gathered} \int_{B_1} \widetilde{L}(z)\, \varphi_0(z)\, d\sigma_z < \\ < \int_{|z-z_0|<R} L_f(z)\, \varphi_0(z)\, d\sigma_z - \varepsilon \int_{|z-z_0|<R} |z|^\rho \varphi_0(z)\, d\sigma_z < \\ < L_f(z_0) \int_{|z-z_0|<R} \varphi_0(z)\, d\sigma_z + \varepsilon_1 \int_{|z-z_0|<R} \varphi_0(z)\, d\sigma_z - \\ - \varepsilon \int_{|z-z_0|<R} |z|^\rho \varphi_0(z)\, d\sigma_z = L_f(z_0) + \\ + \varepsilon_1 - \varepsilon \int_{|z-z_0|<R} |z|^\rho \alpha(|z - z_0|)\, d\sigma_z \leqslant \\ \leqslant L_f(z_0) + \varepsilon_1 - \varepsilon |z_0|^\rho = L_f(z_0) - \eta, \ (\eta > 0). \end{gathered}$$

Это противоречит (5), и, следовательно, исходное предположение неверно, а значит,

$$\widetilde{L}(z) = L_f(z), \ \forall z \in C^+.$$

Далее воспользуемся теоремой 4.4.1 работы [7], согласно которой, если последовательность субгармонических функций u_n сходится к функции u в пространстве $D'(B_1)$, то $\forall\alpha > 0$ u_n сходятся к u и по α-мере Карлесона* на каждом компакте $K \subset\subset B_1$. Таким образом, из показанной сходимости в $D'(B_1)$ функций $t^{-\rho}\ln|f(tz)|$ к функции $L_f(z)$ следует, что $\forall\alpha > 0$ семейство функций $t^{-\rho}\ln|f(tz)|$ сходится к $L_f(z)$ по α-мере Карлесона на каждом компакте $K \subset\subset B_1$.

Отсюда, как легко видеть, следует, что в каждом угле

$$\alpha < \arg z < \beta, \ (0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant \pi)$$

функции $r^{-\rho}\ln|f(re^{i\theta})|$ сходятся к $L_f(e^{i\theta})$, когда $z = re^{i\theta} \to \infty$, не принимая значений из некоторого C^0-множества**.

Следовательно, $f(z)$ — функция вполне регулярного роста в $\boldsymbol{C}^+$, и значит доказано 3) $\Rightarrow$ 1). Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: Гостехиздат, 1956.—632 с. 2. *Говоров Н. В.* О функциях вполне регулярного роста в полуплоскости. — Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. — Ростов-на-Дону, 1966.—205 с. 3. *Ронкин Л. И.* Функции вполне регулярного роста в полуплоскости. — Докл. АН УССР, 1985, № 3, с. 10—13. 4. *Файнберг Е. Д.* Оценки индикаторов специальных классов функций, аналитических в полуплоскости. — Рукопись деп. в ВИНИТИ 7. 08. 81., № 4167.—51 с. 5. *Титчмарш Е.* Теория функций. — М.: Наука, 1980.—463 с. 6. *Агранович П. З., Ронкин Л. И.* О функциях вполне регулярного роста многих переменных. — Препринт 29. 11. 76. ФТИНТ АН УССР, Харьков, 1976.—22 с. 7. *Азарин В. С.* Об асимптотическом поведении субгармонических функций. — Мат. сб., 1979, 108 (150), № 2, с. 147—167.

Поступила в редколлегию 25. 04. 85.

УДК 517.53

Н. В. ЗАБОЛОЦКИЙ, С. Ю. ФАВОРОВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ В R^m ФУНКЦИЙ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА

Пусть $u(x)$ — субгармоническая функция в $\boldsymbol{R}^m$, гармоническая в окрестности нуля и такая, что $u(0) = 0$, $\rho(r)$ — ее уточненный порядок, $V(r) = r^{\rho(r)}$; $\mu_u(x)$ — ассоциированная мера, $B(r) = \{x \in \boldsymbol{R}^m : |x| < r\}$,

* α-мерой Карлесона множества E называется $\inf \sum r_j^\alpha$, где r_j — радиусы кругов C_j, образующих покрытие множества E и inf берется по всем счетным покрытиям $\{C_j\}$ множества E (см., например, [7]).

** C^0-множеством называется любое множество E, которое можно покрыть кружками C_j с радиусами r_j так, что $\lim\limits_{r\to\infty}\left\{\frac{1}{r}\sum{}^r r_j\right\} = 0$, где символ Σ^r означает суммирование по всем кружкам, центры которых попали в круг $|z| < r$ (см., например, [1]).

$$n(r,u)=\mu_u(B(r)),\quad N(r,u)=\int_0^r \frac{n(t,u)}{t^{m-1}}\,dt,$$

$$I(x,u)=\int_{|y-x|<|x|}(|x-y|^{2-m}-|x|^{2-m})\,d\mu_u(y) \text{ при } m>2,$$

$$I(x,u)=\int_{|y-x|<|x|}\ln(|x||x-y|^{-1})\,d\mu_u(y) \text{ при } m=2.$$

Для функции $u(x)$, имеющей нулевой порядок, в случае $m=2$ в [1] доказаны следующие асимптотические формулы при $|x|\to\infty$:

$$u(x)=-I(x,u)+N(|x|,u)+o(V(|x|)), \tag{1}$$

$I(x,u)=o(V(|x|))$ вне c_0-множества (определение см. [2, (2)].

В [1] показано, что соотношения (1), (2), вообще говоря, уже не верны для субгармонических в $\boldsymbol{R}^m$, $m\geqslant 3$, функций нулевого порядка. А. А. Гольдберг обратил наше внимание на то, что формулы (1), (2) могут быть верны для некоторых подклассов субгармонических в $\boldsymbol{R}^m$ функций. В настоящей заметке дается естественное описание таких подклассов, а также уточняется соотношение (2).

Класс L субгармонических функций в $\boldsymbol{R}^m$ назовем допустимым, если он замкнут относительно умножения на положительные константы, преобразований $x\to kx$ $(k>0)$, предельного перехода в пространстве обобщенных функций $D'(\boldsymbol{R}^m)$, а также не содержит никаких ограничений сверху в $\boldsymbol{R}^m$ функций, кроме констант. Так, класс всех субгармонических функций в R^2, класс всех плюрисубгармонических функций в $\boldsymbol{C}^l$ (-$\boldsymbol{R}^{2l}$) являются допустимыми. Более общий пример приведен в теореме 2 настоящей заметки.

Субгармоническую функцию $u(x)$ в R^m, имеющую нулевой порядок роста, назовем допустимой, если она принадлежит какому-нибудь допустимому классу.

Теорема 1. *Для любой допустимой функции* $u(x)$ *при* $r\to\infty$

$$n(r,u)=o(V(r)\cdot r^{m-2}).$$

Доказательство. Рассмотрим предельное множество $\mathrm{Fr}\,u$ для функции $u(x)$ (см. [3]), т. е. множество функций, являющихся пределами в $D'(\boldsymbol{R}^m)$ последовательностей функций вида $V(t_n)^{-1}$ $u(t_nx)$, $t_n\to\infty$. Согласно [3] множество $\mathrm{Fr}\,u$ состоит из субгармонических функций $v(x)$, таких, что $v(x)\leqslant C|x|^\rho$ при $x\in\boldsymbol{R}^m$, где ρ — порядок роста функции $u(x)$, в нашем случае $\rho=0$. Так как функции $v\in\mathrm{Fr}\,u$ лежат в допустимом классе, то множество $\mathrm{Fr}\,u$ содержит только константы. Далее, предельное множество $\mathrm{Fr}\,\mu_u$ (т. е. пределы в $D'(\boldsymbol{R}^m)$ мер вида $V(t_n)^{-1}t_n^{2-m}\mu_u(t_nx)$ при $t_n\to\infty$) состоит из мер, являющихся ассоциированными к функциям из $\mathrm{Fr}\,u$ (см. [3]), т. е. $\mathrm{Fr}\,\mu_u=\{0\}$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $m_i \in N$, $i = 1, \ldots, k$, $0 = m_0 < m_1 < \ldots < m_{k-1} < m_k = m$, $m_i \leqslant m_{i-1} + 2$. *Класс* L, *состоящий из субгармонических в* $\boldsymbol{R}^m$ *функций, для каждого* $i = 1, 2, \ldots, k$-*субгармонических по переменным* $x_{m_i}, x_{m_i+1}, \ldots, x_m$ *при любых фиксированных остальных переменных, является допустимым.*

Доказательство. Докажем вначале, что субгармоническая в $\boldsymbol{R}^m$ функция $u(x)$, удовлетворяющая при $s < m$ соотношению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_{s+1}^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} \geqslant 0$$

в смысле $D'(\boldsymbol{R}^m)$, является субгармонической по переменным $x_{s+1}, \ldots, x_m$ при любых фиксированных $x_1, \ldots, x_s$. Для этого достаточно выбрать последовательность финитных бесконечно дифференцируемых функций $\alpha_n(t)$, такую, чтобы последовательность сверток $(u * \alpha_n)(x)$ монотонно убывала к субгармонической в R^m функции $u(x)$. Осталось заметить, что $(u * \alpha_n)(x)$-субгармонические функции по переменным $x_{s+1}, \ldots, x_m$. Отсюда следует, что класс L замкнут относительно предельного перехода в $D'(\boldsymbol{R}^m)$. Далее, если функция $u(x) \in L$ не зависит от переменных

$$x_{m_{i+1}}, \ldots, x_m,$$

то она удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_{m_i}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{m_i+1}^2} \geqslant 0$$

при $m_{i+1} = m_{i+2}$ или соотношению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_{m_i}^2} \geqslant 0$ при $m_{i+1} = m_i + 1$ в смысле обобщенных функций. Поэтому из ограниченности сверху в $\boldsymbol{R}^m$ функции $u(x)$ следует, что она не зависит от переменной x_{m_i}, x_{m_i+1} (или, соответственно, от переменной x_{m_i}). Индукция по i показывает, что $u(x) \equiv \mathrm{const}$. Теорема доказана.

Следствие. *Класс полисубгармонических функций в* $\boldsymbol{R}^{2l}$ *является допустимым.*

Теорема 3. *Для допустимой функции* $u(x)$ *при* $|x| \to \infty$

$$u(x) = -I(x, u) + N(|x|, u) + o(V(|x|)).$$

При $m = 2$ эта теорема была доказана в [1], при $m \geqslant 3$ используется тот же метод (см. также [4]).

Следуя работе [5], относительной емкостью множества $E \subset \boldsymbol{R}^m$ назовем величину

$$\varlimsup_{t \to \infty} \operatorname{cap}(E \cap B(t)) [\operatorname{cap} B(t)]^{-1},$$

где cap обозначает ньютонову (при $m \geqslant 3$) или логарифмическую (при $m = 2$) емкость.

Теорема 4 (см. [4]). *Для допустимой функции $u(x)$ вне множества нулевой относительной емкости при $|x| \to \infty$*

$$I(x, u) = o(V(|x|)).$$

Доказательство. Пусть L_k — компакт положительной емкости, $L_k \subset B(2^k) \setminus B(2^{k-1})$, ν_k — его равновесная мера. Тогда

$$\int_{L_k} I(x, u)\, d\nu_k(x) \leqslant \int_{L_k} d\nu_k(x) \int_{|x-y|<|x|} |x-y|^{2-m} d\mu(y) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{B(2^{k+1})} d\mu(y) \int_{L_k} |x-y|^{2-m} d\nu_k(x) \leqslant (\operatorname{cap} L_k)^{-1} n(2^{k+1}, u),$$

если $m \geqslant 3$. Аналогично, при $m = 2$

$$\int_{L_k} I(x, u)\, d\nu_k(x) \leqslant \int_{B(2^{k+1})} d\mu(y) \int_{L_k} \ln \frac{2^{k+2}}{|x-y|} d\nu_k(x) \leqslant$$

$$\leqslant \ln(\operatorname{cap} B(2^{k+2}) (\operatorname{cap} L_k)^{-1})\, n(2^{k+1}, u).$$

Полученные оценки позволяют применить к функции $-I(x, u)$ метод доказательства теоремы 2 работы [5] и получить утверждение теоремы.

Из теорем 3, 4 вытекает

Теорема 5. *Для допустимой функции $u(x)$ вне множества относительной емкости нуль при $|x| \to \infty$*

$$u(x) = N(|x|, u) + o(V(|x|)).$$

Следствие 1. *Для допустимой функции $u(x)$ при $r \to \infty$*

$$T(r, u) = N(r, u) + o(V(r)),$$

где $T(r)$ — неванлинновская характеристика функции $u(x)$.

Следствие 2. *Для допустимой функции $u(x)$ найдется множество A нулевой относительной емкости, такое, что для $x, x' \notin A$, $\beta|x| \leqslant |x'| \leqslant \beta^{-1}|x|$, где $\beta > 0$, при $|x| \to \infty$*

$$u(x) - u(x') = o(V(|x|)).$$

Список литературы: 1. *Гольдберг А. А., Заболоцкий Н. В.* Индекс концентрации субгармонических функций нулевого порядка. — Мат. зам. 1983, **34**, № 2, с. 227—236. 2. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: Гостехиздат, 1956.—632 с. 3. *Азарин В. С.* Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка. — Мат. сб., 1979, **108**, № 2, с. 147—167. 4. *Заболоцкий Н. В.* Асимптотические свойства мероморфных и δ-субгармонических функций. — Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. — X., 1982.—250 с. 5. *Фаворов С. Ю.* О множествах понижения для субгармонических функций вполне регулярного роста. — Сиб. мат. журн., 1979, **20**, № 6, с. 1294—1302.

Поступила в редколлегию 12. 12. 84.

СОДЕРЖАНИЕ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Выпуск 47

Редактор *Л. Ф. Кизилова*, художественный редактор *Т. П. Короленко*, технический редактор *Г. П. Александрова*, корректор *Л. В. Варавина*

Информ. бланк № 11610

Сдано в набор 28.05.86. Подп. в печать 17.10.86. БЦ 08777. Формат 60×90/16. Бумага типогр. № 2. Лит. гарн. Выс. печать. Печ. л. 8. Кр.-отт. 8,25. Уч.-изд. л. 9,8. Тираж 700 экз. Изд. № 1456. Зак. 6-177. Цена 1 р. 40 к.

Издательство при Харьковском государственном университете издательского объединения «Вища школа», 310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16

Книжная фабрика «Коммунист», 310012, Харьков, ул. Энгельса, 11

1 р. 40 к.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

РЕСПУБЛИКАНСКИЙ

[illegible]