УДК 513.88

ВУ КУОК ФОНГ, Ю. И. ЛЮБИЧ

СПЕКТРАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧНОСТИ ДЛЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП

Рассмотрим в комплексном банаховом пространстве $\boldsymbol{B}$ сильно непрерывную ограниченную однопараметрическую полугруппу линейных операторов $T(t)\,(t \geqslant 0)$, т. е. представление $T: \boldsymbol{R}_+ \to \operatorname{End}(\boldsymbol{B})$, такое, что $\sup\limits_t \|T(t)\| < \infty$. Полугруппа называется *почти периодической (п. п.)*, если для каждого $x \in B$ орбита $O(x) = \{T(t)x\}$ предкомпактна в $\boldsymbol{B}$. На языке задачи Коши

$$\dot{x} = Ax(t)\,(t \geqslant 0), \quad x(0) = v \tag{1}$$

(A — генератор полугруппы) п. п. означает, что при каждом $v \in D_A$ решение $x(t)$ является п. п. функцией, т. е. семейство сдвижек $x_h(t) = x(t+h)$, $h \geqslant 0$, предкомпактно в пространстве непрерывных ограниченных вектор-функций на полуоси $t \geqslant 0$, снабженном обычной нормой $\|z(\cdot)\| = \sup\limits_{t \geqslant 0} \|z(t)\|$. Свойство п. п. для полугруппы тесно связано с асимптотической устойчивостью соответствующей задачи Коши, а именно, асимптотическая устойчивость эквивалентна п. п. в сочетании с отсутствием точечного спектра оператора A на мнимой оси. Это следует (см. [1]) из теоремы об отщеплении граничного спектра, согласно которой *для п. п. полугруппы пространство $\boldsymbol{B}$ расщепляется в прямую сумму $\boldsymbol{B} = B_0 \dot{+} B_1$, где*

$$B_0 = \left\{x \,\middle|\, \lim_{t \to \infty} T(t)x = 0\right\},$$

*B_1 — замыкание линейной оболочки собственных векторов оператора A, отвечающих мнимым собственным значениям**. Подпространства B_0 и B_1 в этой ситуации называются соответственно *внутренним* и *граничным*. Они очевидно инвариантны для $T(t)$. В более полной формулировке теоремы утверждается, что B_1 *является топологической прямой суммой собственных подпространств оператора A, отвечающих мнимому точечному спектру. Если $T(t)$ — п. п. полугруппа сжатий, то $T(t) \mid B_1$ — полугруппа обратимых изометрий, а проектор P на B_1, соответствующий разложению** $\boldsymbol{B} = B_0 \dot{+} B_1$, ортогонален, т. е. $\|P\| = 1$* (если $P \neq 0$).

Необходимо отметить, что, наоборот, *если $\boldsymbol{B} = B_0 \dot{+} B_1$, где B_0, B_1 определены как выше, то $T(t)$ — п. п. полугруппа.*

* Если таковых не имеется, то $B_1 = 0$.
** Он называется *граничным* проектором.

В работе Г. М. Скляра и В. Я. Ширмана [2] обнаружено, что, *если оператор A ограничен и если* 1) *пересечение* $\operatorname{spec} A \cap i\boldsymbol{R}$ *не более чем счетно,* 2) A^* *не имеет мнимых собственных значений, то задача Коши асимптотически устойчива.* Это наводит на мысль, что при условии 1) должен существовать некоторый критерий п. п. в терминах мнимого точечного спектра, а теорема Скляра — Ширмана должна из него следовать при условии 2). Именно такой критерий устанавливается в настоящей статье (теорема 2), причем попутно мы освобождаемся от требования ограниченности оператора A, которое несовместимо с приложениями к дифференциальным операторам (т. е. к уравнениям в частных производных, имеющим вид (1)). Характер искомого критерия подсказывается следующим фактом.

Теорема 1. *Если $T(t)$ — п. п. полугруппа, то для каждого $\mu \in \boldsymbol{R}$ подпространства*

$$V_\mu = \{x \mid x \in \boldsymbol{B},\ Ax = i\mu x\}, \quad W_\mu = \{f \mid f \in \boldsymbol{B}^*,\quad A^*f = i\mu f\} \qquad (2)$$

находятся в естественной двойственности.

Доказательство. Пусть $x \in V_\mu$, $x \neq 0$. Возьмем $g \in V_\mu^*$, $g(x) \neq 0$. По теореме об отщеплении граничного спектра в $\boldsymbol{B}$ существует проектор P_μ на V_μ, аннулирующий B_0 и все $V_\nu\ (\nu \neq \mu)$. Этот проектор коммутирует со всеми $T(s)$ и, следовательно, с A. Определим функционал $f \in \boldsymbol{B}^*$, полагая, $f(y) = g(P_\mu y)$. Очевидно, $f \in W_\mu$ и $f(x) \neq 0$.

Обратно, пусть дан $f \in W_\mu$, $f \neq 0$. Тогда f аннулирует B_0 и все $V_\nu\ (\nu \neq \mu)$. По теореме об отщеплении граничного спектра $f \mid V_\mu \neq 0$, т. е. существует $x \in V_\mu$, такой, что $f(x) \neq 0$.

Следствие. *Если полугруппа $T(t)$ п. п., то* *

$$\dim V_\mu = \dim W_\mu \qquad (3)$$

для всех μ. В частности, $V_\mu = 0 \leftrightarrow W_\mu = 0$.

Сформулируем теперь наш основной результат.

Теорема 2. *Пусть пересечение спектра оператора A с мнимой осью не более чем счетно. Пусть для каждого собственного значения $i\mu$ ($\mu \in \boldsymbol{R}$) оператора A^* и каждого собственного функционала $f \in W_\mu$, ($f \neq 0$) существует дуальный собственный вектор x оператора A: $Ax = i\mu x$, $f(x) \neq 0$. Тогда полугруппа $T(t)$ — почти периодическая.*

Для вывода отсюда критерия Скляра — Ширмана (без требования ограниченности оператора A) теперь достаточно заметить, что, если $\operatorname{spec} A \cap i\boldsymbol{R}$ не более чем счетно и $W_\mu = 0$ для всех μ, то условия теоремы 2 выполнены. Поэтому полугруппа $T(t)$ является п. п. и $V_\mu = 0$ при всех μ в силу следствия теоремы 1. Но тогда $B_1 = 0$, $\boldsymbol{B} = B_0$, т. е. $\lim_{t\to\infty} T(t)x = 0$ для всех $x \in \boldsymbol{B}$, что и означает асимптотическую устойчивость.

* Мы полагаем $\dim L = \infty$, если L — бесконечномерное банахово пространство.

Доказательство теоремы 2. Не умаляя общности, можно считать, что оператор A диссипативен, т. е. $T(t)$ — полугруппа сжатий. Определим для нее подпространства B_0 и B_1 точно так же, как в формулировке теоремы об отщеплении граничного спектра. Оба подпространства инвариантны для полугруппы и, следовательно, для A. Сужения $T(t)|B_0$ и $T(t)|B_1$ почти периодичны и в B_1 полугруппа действует изометрически. Рассмотрим сумму $L = B_0 + B_1$. Если $x \in B_0$, $y \in B_1$, то из неравенства

$$\|y\| - \|T(t)x\| \leqslant \|T(t)(x+y)\| \leqslant \|x+y\|$$

при $t \to \infty$ получается $\|y\| \leqslant \|x+y\|$. Следовательно, $B_0 \cap B_1 = 0$ (т. е. $L = B_0 \dot{+} B_1$) и L замкнуто. Полугруппа $T(t)$ в инвариантном подпространстве L является п. п. Остается доказать равенство $L = \boldsymbol{B}$. Рассуждая от противного, будем далее предполагать, что $L \neq \boldsymbol{B}$.

Так как функция $\|T(t)x\|$ при каждом $x \in \boldsymbol{B}$ монотонна по t, то в $\boldsymbol{B}$ определена полунорма

$$l(x) = \lim_{t \to \infty} \|T(t)x\| \leqslant \|x\|. \tag{4}$$

Очевидно, $\operatorname{Ker} l = B_0 \subset L$, $l(x) = \|x\|$ при $x \in B_1$. Полунорма l во всем $\boldsymbol{B}$ инвариантна относительно всех $T(t)$.

Рассмотрим фактор-пространство $\widetilde{B} = \boldsymbol{B}/L$. Покажем, что полунорма l порождает в $\widetilde{B}$ норму

$$\tilde{l}(X) \doteq \inf_{y \in L} l(x-y) = \inf_{z \in B_1} l(x-z) \leqslant \|X\| \tag{5}$$

($x \in \boldsymbol{B}$ — представитель класса $X \in \widetilde{B}$). Действительно, если $\tilde{l}(X) = 0$, то существует последовательность $\{z_n\} \subset B_1$, такая, что $l(x - z_n) \to 0$. Тогда $l(z_n - z_m) \to 0$, т. е. $\|z_n - z_m\| \to 0$ $(n, m \to \infty)$. Поэтому существует $z = \lim z_n \in B_1$. Но тогда и $l(z - z_n) \to 0$, откуда $l(x - z) = 0$, т. е. $x - z \in B_0$. Следовательно, $x \in L$ и $X = 0$.

Пополняя $\widetilde{B}$ по норме $\tilde{l}$, получим некоторое банахово пространство E. Фактор-операторы $\widetilde{T}(t) = T(t)/L$ действуют в $\widetilde{B}$ изометрично относительно нормы $\tilde{l}$. Действительно,

$$l(\widetilde{T}(t)X) = \inf_{z \in B_1} l(T(t)x - z) = \inf_{v \in B_1} l(T(t)x -$$

$$- T(t)v) = \inf_{v \in B_1} l(x - v) = \tilde{l}(X)$$

благодаря обратимости $T(t)|B_1$. Продолжая $\widetilde{T}(t)$ по $\tilde{l}$-непрерывности на E, получаем в E однопараметрическую полугруппу

изометрий, сильно непрерывную благодаря (5). Обозначим через S ее генератор. Покажем, что $\operatorname{spec} S \subset \operatorname{spec} A$.

Спектр диссипативного оператора A лежит в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$. Пусть $\lambda \bar{\in} \operatorname{spec} A$, $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$. Так как

$$l(R_\lambda x) = \lim_{t\to\infty} \| R_\lambda T(t)\, x \| \leqslant \| R_\lambda \|\, l(x)\, (x \in \boldsymbol{B}), \tag{6}$$

то резольвента R_λ естественно продолжается до некоторого ограниченного оператора $\hat{R}_\lambda$ в E. Если $\operatorname{Re}\lambda > 0$, то

$$R_\lambda(x) = -\int_0^\infty (T(t)\, x)\, e^{-\lambda t} dt \quad (x \in \boldsymbol{B}),$$

откуда

$$\hat{R}_\lambda X = -\int_0^\infty (U(t)\, X)\, e^{-\lambda t} dt \quad (X \in E).$$

Следовательно, $\hat{R}_\lambda$ совпадает при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ с резольвентой $R_\lambda(S)$. Теперь заметим, что в силу тождества Гильберта

$$\hat{R}_\mu - \hat{R}_\lambda = (\mu - \lambda)\, \hat{R}_\lambda \hat{R}_\mu \quad (\lambda, \mu \bar{\in} \operatorname{spec} A),$$

откуда

$$\hat{R}_\mu - R_\lambda(S) = (\mu - \lambda)\, R_\lambda(S)\, \hat{R}_\mu\, (\operatorname{Re}\lambda > 0,\ \mu \bar{\in} \operatorname{spec} A).$$

Мы видим, что $\operatorname{Im} \hat{R}_\mu \subset D_S$ и $(S - \lambda I)\, \hat{R}_\mu = I + (\mu - \lambda)\, \hat{R}_\mu$, т. е. $(S - \mu I)\, \hat{R}_\mu = I$. Аналогично $\hat{R}_\mu (S - \mu I) = I \mid D_S$. Поэтому $\mu \bar{\in} \operatorname{spec} S$ (и $\hat{R}_\mu = R_\mu(S)$).

Итак, $\operatorname{spec} S \subset \operatorname{spec} A$. Поэтому пересечение $\operatorname{spec} S \cap i\boldsymbol{R}$ не более чем счетно. Так как оператор iS консервативен, то согласно [3]

$$\tilde{l}(SX - \lambda X) \geqslant |\operatorname{Re}\lambda|\, \tilde{l}(X)\, (X \in E) \tag{7}$$

при всех λ. Поскольку в $\operatorname{spec} S \cap i\boldsymbol{R}$ заведомо имеются лакуны, то в силу (7) левая полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda < 0$ регулярна для S. По теореме Хилле — Иосида оператор $(-S)$ является генератором сильно непрерывной полугруппы сжатий. Но тогда полугруппа изометрий, порождаемая оператором S, продолжается до группы изометрий $U(t)$ $(-\infty < t < \infty)$. Отсюда следует, что $\operatorname{spec} S \neq \varnothing$ (см. [4]). Кроме того, $\operatorname{spec} S$ лежит на мнимой оси, не более чем счетен и замкнут. Поэтому в нем существует изолированная точка $i\mu$. Ей соответствует риссовский проектор P, коммутирующий с S и, следовательно, со всеми $U(t)$. Подпространство $V = \operatorname{Im} P$ инвариантно для S и для всех $U(t)$, группа изометрий $U(t) \mid V$ порождается ограниченным оператором $S \mid V$, $\operatorname{spec}(S \mid V) = \{i\mu\}$. Следовательно, V —собственное подпространство для S при собственном значении $i\mu$ (см. [5]). Но тогда любой

линейный функционал $h \in \operatorname{Im} P^*$, $h \neq 0$ является собственным для S^* при том же собственном значении. Перенесем его на исходное пространство $\boldsymbol{B}$ с помощью сквозного гомоморфизма $\boldsymbol{B} \to \widetilde{B} \to E$. Получим функционал $f \in \boldsymbol{B}^*$ ($f \neq 0$, так как $h \neq 0$ и образ $\boldsymbol{B}$ в E плотен), такой, что $A^*f = i\mu f$. По условию доказываемой теоремы существует дуальный вектор x: $Ax = i\mu x$, $f(x) \neq 0$. Вместе с тем $f \mid L = 0$ (ибо $\widetilde{B} = \boldsymbol{B}/L$), откуда $f(x) = 0$. Этим противоречием доказательство завершается.

Пусть теперь пространство $\boldsymbol{B}$ рефлексивно, $T(t)$ $(t \geqslant 0)$ — любая ограниченная сильно непрерывная полугруппа в $\boldsymbol{B}$, A — ее генератор. Тогда $T(t)$ является *слабо почти периодической* в том смысле, что все орбиты слабо предкомпактны (ибо они ограничены). Для слабо почти периодических полугрупп имеет место аналог теоремы об отщеплении граничного спектра (см. [6, 7]), откуда естественно получается обобщение теоремы 1. Поэтому из теоремы 2 вытекает следующее утверждение

Теорема 3. *Пусть основное пространство* $\boldsymbol{B}$ *рефлексивно. Если пересечение спектра оператора* A *с мнимой осью не более чем счетно, то полугруппа* $T(t)$ *— почти периодическая.*

Аналогичный результат для однопараметрических групп известен (см. [8, с. 97, ср. также [5]).

Отметим два следствия теоремы 3 (в сочетании с теоремой об отщеплении граничного спектра).

Следствие 1. *Если выполнены условия теоремы 3 и оператор* A *не имеет мнимых собственных значений, то соответствующая задача Коши асимптотически устойчива.*

Для ограниченного A этот результат получен в [2].

Следствие 2. *Если выполнены условия теоремы 3 и орбиты всех векторов* $x \neq 0$ *не стремятся к нулю, то система собственных векторов оператора* A *полна.*

Если не налагать требований на основное пространство $\boldsymbol{B}$, то следствия того же рода вытекают из теоремы 2 при дополнительном предположении существования собственных векторов, дуальных собственным функционалам, в случае следствия 2 и при отсутствии собственных функционалов в случае следствия 1.

В заключение отметим, что, *если* A *порождает п. п. группу* $U(t)$, *то система собственных векторов оператора* A *полна* в силу теоремы об отщеплении граничного спектра. Действительно, в этом случае $\|x\| \leqslant C \|U(t)x\|$, откуда при $x \in B_0$, $t \to \infty$ следует $x = 0$, т. е. $B_0 = 0$. Это аналог основного результата работы [5], где было также показано, что *для генератора ограниченной группы полнота влечет п. п.*

Список литературы: 1. *Любич М. Ю., Любич Ю. И.* Отщепление граничного спектра для почти периодических операторов и представлений полугрупп. — Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1985, вып. 45, с. 69—84. 2. *Скляр Г. М., Ширман В. Я.* Об асимптотической устойчивости линейного дифференциального уравнения в банаховом пространстве. — Теория функций,

функцион. анализ и их прил., 1982, вып. 37, с. 127—132. 3. *Любич Ю. И.* Консервативные операторы. — Усп. мат. наук, 1965, **20**, вып. **5**, с. 221—225. 4. *Любич Ю. И., Мацаев В. И.* Об операторах с отделимым спектром. — Мат. сб., **56**, № 4, с. 433—468. 5. *Любич Ю. И.* Об условиях полноты системы собственных векторов корректного оператора. — Усп. мат. наук, 1963, **18**, вып. 1, с. 165—171. 6. *Jacobs K.* Ergodentheorie und fastperiodische Funktionen auf Halbgruppen. — Math. Z., 1956, **64**, p. 298—338. 7. *de Leeuw K., Glicksberg I.* Applications of almost periodic compactifications. — Acta Math., 1961, **105**, p. 63—97. 8. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. — МГУ, 1978, 204 с.

Поступила в редколлегию 12.04.85.

УДК 517.53

А. А. ГОЛЬДБЕРГ, А. Э. ЕРЕМЕНКО, М. Л. СОДИН

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ В СМЫСЛЕ Р. НЕВАНЛИННЫ И В СМЫСЛЕ В. П. ПЕТРЕНКО. 1

1. Здесь без пояснений будут использованы стандартные обозначения неванлинновской теории распределения значений мероморфных функций (см., например, [1]). В классической теории распределения значений за меру приближения мероморфной в $\boldsymbol{C}$ функции f к значению $a \in \boldsymbol{C}$ выбирается величина $m(r, a, f)$, т. е. с точностью до множителя $1/2\pi$ норма $\| \ln^+ |f(re^{i\varphi}) - a|^{-1} \|$ в пространстве L_1 функции $\ln^+ |f-a|^{-1}$, как функции от $\varphi \in [0, 2\pi]$. В последние 15 лет широко используются и нормы в других пространствах, особенно важное значение имеет норма в пространстве L_∞. Если $M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, то за меру приближения f к a можно взять $\ln^+ M(r, 1/(f-a)) = L(r, a, f)$. С помощью $L(r, a, f)$ В. П. Петренко в 1969 г. ввел величину

$$\beta(a, f) = \varliminf_{r\to\infty} L(r, a, f)/T(r, f),$$

названную им величиной отклонения мероморфной функции f относительно числа a. В. П. Петренко детально исследовал свойства $\beta(a, f)$ в ряде статей, основные результаты подытожены в его книге [2]. Множество дефектных значений в смысле Р. Неванлинны $\{a \in \overline{\boldsymbol{C}} : \delta(a, f) > 0\}$ будем обозначать через $E_N(f)$, а множество положительных отклонений $\{a \in \overline{\boldsymbol{C}} : \beta(a, f) > 0\}$ — через $E_\Pi(f)$. Непосредственно из определений вытекает, что $\delta(a, f) \leqslant \beta(a, f)$, поэтому $E_N(f) \subset E_\Pi(f)$. В. П. Петренко доказал, что для мероморфных функций конечного нижнего порядка $E_\Pi(f)$ не более чем счетно, и предложил выяснить, не будет ли для функций конечного нижнего порядка всегда $E_N(f) = E_\Pi(f)$, что в случае функций бесконечного нижнего порядка это не так, выяснил сам В. П. Петренко [2, теорема 3.1.1]. В 1976 г. А. Ф. Гришин

[3, 2, теорема 3.1.1] показал, что для любого ρ, $0 \leqslant \rho < \infty$, существует мероморфная функция f порядка ρ, для которой $\delta(\infty, f) = 0$, а $\beta(\infty, f) > 0$. Построение А. Ф. Гришина было затем заметно упрощено [4], [2, теорема 2.4.2]. Затем был построен пример мероморфной функции f любого заданного порядка ρ $0 < \rho < \infty$, у которой $E_N(f) = \varnothing$, а $E_{\text{п}}(f)$ — произвольное не более чем счетное подмножество $\overline{C}$ [5]. Тем самым был получен ответ на один вопрос В. П. Петренко [2, с. 8 и 73]. Естественно поставить вопрос о полном описании связи между множествами $E_N(f)$ и $E_{\text{п}}(f)$ для мероморфных функций конечного порядка ρ [6, № 11.3]. Если $\rho = 0$, то известно, что $E_N(f)$ и $E_{\text{п}}(f)$ состоят не более, чем из одной точки (соответственно согласно теореме Ж. Валирона [1, с. 90 и 158] и теореме В. П. Петренко [2, теорема 2.6.1]). Вместе с примером А. Ф. Гришина (цит. выше) это дает полное описание множеств $E_N(f)$ и $E_{\text{п}}(f)$ для нулевого порядка. Для положительного порядка ответ дает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $0 < \rho < \infty$, $E_1 \subset E_2 \subset \overline{C}$, E_2 *не более чем счетно. Существует мероморфная функция* f *порядка* ρ, *для которой* $E_N(f) = E_1$, $E_{\text{п}}(f) = E_2$.

В работе [7] доказано, что для мероморфных функций со свойством

$$T(2r, f) = O(T(r, f)), \ r \to \infty, \tag{1.1}$$

всегда $E_N(f) = E_{\text{п}}(f)$. Таким образом, неравенство $E_N \neq E_{\text{п}}(f)$ связано с определенной неправильностью роста. Тем не менее функции f из теоремы 1 могут быть выбраны так, что у них нижний порядок λ равен порядку ρ.

В примерах [3—5] функция f с $E_N(f) \neq E_{\text{п}}(f)$ мероморфна. Возникает вопрос, возможно ли $E_N(f) \neq E_{\text{п}}(f)$ для целых функций конечного порядка ρ [6, № 11.3]. При $\rho \leqslant 1/2$ для целой функции f известно, что $E_N(f) = \{\infty\}$ [1, с. 269] и $E_{\text{п}}(f) = \{\infty\}$, [1, с. 273]. Для $\rho > 1/2$ ответ следующий.

Теорема 2. *Для каждого* ρ, $1/2 < \rho < \infty$, *существует целая функция* f *порядка* ρ, *для которой* $\delta(0, f) = 0$, $\beta(0, f) > 0$.

Теоремы 1, 2 анонсированы авторами в заметке «Дефекты и отклонения мероморфных функций конечного порядка», ДАН УССР, 1984, № 10, с. 3—5. В письме от 30.04.84. Дрейсин (D. Drasin) сообщил авторам, что он и его ученик Джиллиспай (R. Gillespie) независимо от авторов решили проблему 11.3 из [6]. Их примеры основаны на других идеях.

Методы, используемые в этой работе для доказательства теорем 1 и 2, позволяют получить и другие результаты, представляющие интерес.

Теорема 3. *Для каждого* ρ, $1/2 < \rho < \infty$, *существует целая функция* f *порядка* ρ, *такая, что* $\delta(0, f) > 0$ *и не выполняется* (*1.1*).

Котман [9] доказал эту теорему для $\rho > 1$, дав тем самым отрицательный ответ на один вопрос Хеймана [10, № 1.10]. Тео-

рема 3 полностью закрывает этот вопрос, поскольку, как отмечалось, при $\rho \leqslant 1/2$ необходимо $\delta(0, f) = 0$.

Согласно упомянутому сообщению Дрейсина, он и Джиллиспай другим методом доказали теорему 3 с $\delta(0, f) \geqslant 1/2$.

Далее будет рассмотрен вопрос о зависимости дефектов целой функции f конечного порядка от выбора начала координат, т. е. всегда ли $\delta(0, f(z)) = \delta(0, f(z+h))$, $h \in \boldsymbol{C}$. Известно [1, гл. IV, § 6], что дефект может изменяться при переходе от $f(z)$ к $f(z+h)$ у мероморфных функций бесконечного порядка (Д. Дюге, 1947), у целых функций бесконечного порядка (У. Хейман, 1953), у мероморфных функций конечного порядка (А. А. Гольдберг, 1954). Недавно Майлз [11] построил пример целой функции f «очень большого конечного порядка ρ», для которой $0 = \delta(0, f(z)) < \delta(0, f(z+h))$, $h \neq 0$. Оценка сверху порядка ρ в примере Майлза затруднительна в связи с необходимостью решать громоздкую систему неравенств, в которые входят трансцендентные функции. Здесь будет построен более простой чем у Майлза пример функции, у которой порядок сравнительно невелик.

Теорема 4. *Пусть* $5 < \rho < \infty$. *Существует целая функция* f *порядка* ρ *такая, что* $0 = \delta(0, f(z-1)) < \delta(0, f(z))$.

При $\rho < 3/2$ у целой функции дефект не зависит от выбора начала координат [1, с. 232, следствие 2]. Вопрос остается открытым для $\rho \in [3/2, 5]$.

Введем некоторые обозначения. Через S будем обозначать класс субгармонических в $\boldsymbol{C}$ функций. Если $u \in S$, то $B(r, u) = \max\{u(z) : |z| = r\}$, $A(r, u) = \inf\{u(z) : |z| = r\}$.

Через $e_m(x)$ и $\ln_m x$ обозначаем m-е итерации функций $\exp x$ и $\ln x$. Далее,

$$\|f(\theta)\| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|\, d\theta.$$

Символ $\partial/\partial n$ обозначает производную по внутренней нормали к границе области. Через x^+ и x^- обозначаем соответственно $(|x| + x)/2$ и $(|x| - x)/2$.

2. Доказательство теоремы 1. Не уменьшая общности, можно считать, что $E_2 \subset \boldsymbol{C}$. Учитывая результат [5], ограничимся здесь случаем, когда $E_1 \neq \varnothing$. Для мероморфных функций f конечного нижнего порядка $E_{\text{п}}(f) \subset E_V(f)$, где $E_V(f)$ — множество значений, исключительных для f в смысле Ж. Валирона [2, с. 52]. Для любого не более чем счетного множества E_1 известны примеры мероморфных функций f порядка ρ, $0 < \rho < \infty$, для которых $E_N(f) = E_V(f) = E_1$ [1, с. 161—166]. Тогда и $E_{\text{п}}(f) = E_1$. Поэтому в дальнейшем случай $E_1 = E_2$ не рассматриваем. Итак, $E_1 \neq \varnothing$, E_2. Будем считать, что $0 < \rho < 1/2$. Общий случай получится сразу, если заметим, что для $f_1(z) = f(z^n)$ выполняется

$\delta(a, f_1) = \delta(a, f)$, $\beta(a, f_1) = \beta(a, f)$, а порядок f_1 равен $n\rho$, где ρ — порядок f, $n \in \mathbf{N}$.

Лемма 2.1. *Существует* $v \in S$ *такая, что* 1) $v(r) = B(r, v) := \lambda(r)$, $r \geqslant 0$, $\lambda(0) = 0$; 2) $\ln \lambda(r) \sim \rho \ln r$, $r \to \infty$; 3) существуют последовательности (r_n'), (r_n''), (c_n) такие, что $r_n' \to \infty$, $r_n''/r_n' \to \infty$, $\lambda(r) \sim c_n r^\rho$, $r_n' \leqslant r \leqslant r_n''$, $n \to \infty$; 4) $v(re^{i\theta}) \leqslant \lambda(r) \cos \rho\theta$, $r \geqslant 0$, $|\theta| \leqslant \pi$; 5) $v(re^{i\theta}) = (1 + o(1)) \lambda(r) \cos \rho\theta$, $|\theta| \leqslant \pi$, $r \to \infty$, $r \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [r_n', r_n'']$; 6) *существует последовательность* R_n, $r_{n-1}'' < R_n < r_n'$ *и последовательность* $\gamma_n \downarrow 0$ *такие, что при всех* $re^{i\theta}$, $1 + (\ln_2 R_n)^{-1} \leqslant r/R_n \leqslant 1 + 2(\ln_2 R_n)^{-1}$, $\gamma_n \leqslant |\theta| \leqslant \pi$, *выполняется* $v(re^{i\theta}) = o(\lambda(r))$, $r \to \infty$.

Доказательство. Положим

$$G(re^{i\theta}) = (r^\rho - 2^\rho)^+ \cos \rho\theta, \quad 0 \leqslant r < \infty, \quad |\theta| \leqslant \pi,$$

$$H(re^{i\theta}) = \begin{cases} r^2 \cos 2\theta, \ |\theta| \leqslant \pi/4, \ 0 \leqslant r < \infty, \\ 0, \quad \pi/4 \leqslant |\theta| \leqslant \pi, \ 0 \leqslant r < \infty. \end{cases}$$

Легко видеть, что $G \in S$, $H \in S$. Пусть

$$u(re^{i\theta}) = \begin{cases} CG(re^{i\theta}), \ r \geqslant 3, \\ \max\{CG(re^{i\theta}), \ H(re^{i\theta} - 1)\}, \ r < 3, \end{cases}$$

где постоянная $C > 2$ настолько велика, что при $r \in [2{,}5;\ 3]$ выполняется $H(re^{i\theta} - 1) < CG(re^{i\theta})$. Тогда $u \in S$. Положим

$$R_n = e_3(n), \quad A_n = R_n^\rho \ln R_n, \ v(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k u(z/R_k).$$

Так как $u(z) = 0$ при $|z| \leqslant 1$, то этот ряд в каждом круге $\{z : |z| \leqslant R\}$ сводится к конечной сумме и $v \in S$. Покажем, что для v справедливы утверждения леммы 2.1. Выполнение 1) очевидно. Пусть $r \in [R_n, R_{n+1}]$. Тогда

$$\lambda(r) = \sum_{k=1}^{n-1} A_k C \left\{\left(\frac{r}{R_k}\right)^\rho - 2^\rho\right\} + A_n u\left(\frac{r}{R_n}\right).$$

Так как при достаточно больших n выполняется $R_n/R_{n-1} > 2^{1+1/\rho}$, то

$$\lambda(r) \geqslant A_{n-1} C \{(r/R_{n-1})^\rho - 2^\rho\} > 0{,}5 A_{n-1} C (r/R_{n-1})^\rho = \\ = 0{,}5 C r^\rho \ln R_{n-1} > r^\rho,$$

поэтому

$$\varliminf_{r \to \infty} \frac{\ln \lambda(r)}{\ln r} \geqslant \rho. \tag{2.1}$$

Если $r \in [R_n \cdot 2{,}5 R_n]$, то

$$\lambda(r) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} A_k C (r/R_k)^\rho + A_n u(2{,}5) \leqslant$$

$$\leqslant Cr^{\rho}\sum_{k=1}^{n-1}\ln R_k + u(2{,}5)R_n^{\rho}\ln R_n \leqslant (2C + u(2{,}5))\,r^{\rho}\ln r.$$

Если $r\in[2{,}5R_n,\ R_{n+1}]$, то

$$\lambda\ r) \leqslant \sum_{k=1}^{n} A_kC(r/R_k)^{\rho} \leqslant 2Cr^{\rho}\ln R_n \leqslant 2Cr^{\rho}\ln r.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln\lambda(r)}{\ln r} \leqslant \rho. \tag{2.2}$$

Из (2.1) и (2.2) следует выполнение 2).

При $r\in[R_n^2,\ R_{n+1}]$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n-1} A_kC((r/R_k)^{\rho} - 2^{\rho}) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} Cr^{\rho}\ln R_{n-1} = o(r^{\rho}\ln R_n),\ r\to\infty, \tag{2.3}$$

$$\lambda(r) = (1+o(1))\,A_nC((r/R_n)^{\rho} - 2^{\rho}) = (1+o(1))\,Cr^{\rho}\ln R_n,\ r\to\infty. \tag{2.4}$$

Положим $r_n' = R_n^2$, $r_n'' = R_{n+1}$, $c_n = C\ln R_n$. Тогда из (2.4) следует выполнение 3). Из (2.3) и (2.4) следует, что при $r\in[r_n',\ r_n'']$, $\theta|\leqslant\pi$, $n\to\infty$

$$v(re^{i\theta}) = o(r^{\rho}\ln R_n) + A_nCG(re^{i\theta}/R_n) =$$

$$= (1+o(1))\,A_nC((r/R_n)^{\rho} - 2^{\rho})\cos\rho\theta = (1+o(1))\,\lambda(r)\cos\rho\theta,$$

т. е. справедливо 5).

При $z = re^{i\theta}$, $r\geqslant 1$, $|\theta|\leqslant\pi$, $|\theta'| = |\arg(z-1)| \leqslant \frac{\pi}{4}$ имеем

$$H(z-1) = |z-1|^2\cos 2\theta' \leqslant (r-1)^2\cos 2\theta'/\cos^2\theta' = (r-1)^2(1 -$$
$$-\operatorname{tg}^2\theta') \leqslant (r-1)^2\cos\theta' \leqslant (r-1)^2\cos\rho\theta = B(r,\ H(z-1))\cos\rho\theta,$$

при $\pi/4 \leqslant |\theta'| \leqslant \pi$ это неравенство очевидно. Теперь легко показать, что $u(re^{i\theta}) \leqslant B(r,\ u)\cos\rho\theta$, $|\theta|\leqslant\pi$, а затем и утверждение 4).

Докажем справедливость 6). Пусть $r = R_n(1 + t/\ln_2 R_n)$, $t\in[1,\ 2]$. Окружность $\{z: |z| = r/R_n\}$ пересекает луч $\{z: \arg(z -$ $- 1) = \pi/4\}$ в точке $\left(\frac{r}{R_n}\right)e^{i\gamma(t)}$. Легко подсчитать, что $\gamma(t) = \pi/4 -$ $- \arcsin\{\sqrt{2}(1 + t/\ln_2 R_n)\}^{-1}$. Положим $\gamma_n = \gamma(2) = O((\ln_2 R_n)^{-1})$, $n\to\infty$. Так как $\gamma(t) \leqslant \gamma(2)$, $t\in[1;\ 2]$, то при $\gamma_n \leqslant |\theta| \leqslant \pi$, $k\geqslant n$ выполняется $u(re^{i\theta}/R_k) = 0$. Поэтому

$$v(re^{i\theta}) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} A_kC(r/R_k)^{\rho} = (1+o(1))\,Cr^{\rho}\ln R_{n-1} =$$

$$= (1+o(1))\,CR_n^{\rho}\ln R_{n-1},\ n\to\infty. \tag{2.5}$$

С другой стороны, при рассматриваемых r

$$\lambda(r) = v(r) \geqslant A_n u(r/R_n) = R_n^{\rho} \ln R_n t^2 (\ln_2 R_n)^{-2} \geqslant$$
$$\geqslant 10^{-4} R_n^{\rho} \ln R_n / (\ln_2 R_n)^2. \qquad (2.6)$$

Так как $\ln R_{n-1} = o(\ln R_n/(\ln_2 R_n)^2)$, $n \to \infty$, то из (2.5) и (2.6) следует утверждение 6).

Следующая лемма доказана в [1, с. 207—208].

Лемма 2.2. *Пусть $\lambda(r)$ — неубывающая выпуклая относительно логарифма функция, порядок которой $\rho < 1$. Тогда*

$$\lim_{r \to \infty} \lambda(r + O(\ln r))/\lambda(r) = 1. \qquad (2.7)$$

Лемма 2.3. *Пусть λ — функция из леммы 2.1, $v_1(re^{i\theta}) = \lambda(r) \times \times \cos \rho\theta$, $0 \leqslant r < \infty$, $|\theta| \leqslant \pi$. Тогда $v_1 \in S$.*

Доказательство. Так как

$$v_1(re^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k u(r/R_k) \cos \rho\theta,$$

то достаточно показать, что $u(r) \cos \rho\theta \in S$. Имеем $u(r) = 0$ при $0 \leqslant r \leqslant 1$,

$$u(r) = \max\{(r-1)^2, C(r^{\rho} - 2^{\rho})^+\}, \ 1 \leqslant r \leqslant 3,$$
$$u(r) = C(r^{\rho} - 2^{\rho}), \ r \geqslant 3.$$

Но $C(r^{\rho} - 2^{\rho})^+ \cos \rho\theta \in S$, а $(r-1)^2 \cos \rho\theta \in S$ при $r > (1 + \sqrt{2})/4$, так как

$$\Delta\{(r-1)^2 \cos \rho\theta\} = r^{-2}(4r^2 - 2r - \rho^2) \cos \rho\theta >$$
$$> r^{-2}(4r^2 - 2r - 4^{-1}) \cos \rho\theta > 0, \qquad (2.8)$$

а субгармоничность в окрестности отрицательного луча легко проверяется. Значит, $u(r) \cos \rho\theta \in S$.

Определение. *Скажем, что множество $E \subset \mathbf{C}$ принадлежит классу (σ), если оно покрывается кругами с конечной суммой радиусов.*

Обозначим через $S_{\rho}(\theta)$, $0 < \rho < \frac{1}{2}$, 2π-периодическую функцию $S_{\rho}(\theta) = \cos \rho\theta$ при $|\theta| \leqslant \pi$.

Лемма 2.4. *Пусть выполнены условия леммы* 2.1. *Существуют целые функции F и G и $E \in (\sigma)$ такие, что*

$$\ln M(r, G) \sim \ln M(r, F) \sim \lambda(r), \ r \to \infty, \qquad (2.9)$$
$$\ln |G(re^{i\theta})| \sim S_{\rho}(\theta) \lambda(r), \ re^{i\theta} \notin E, \ r \to \infty, \qquad (2.10)$$
$$\ln |G(re^{i\theta})| \leqslant (1 + o(1)) S_{\rho}(\theta) \lambda(r), \ r \to \infty, \qquad (2.11)$$
$$\ln |F(re^{i\theta})| \leqslant (1 + o(1)) S_{\rho}(\theta) \lambda(r), \ r \to \infty. \qquad (2.12)$$

Существуют последовательности (p_n), (q_n), $n \geqslant n_0$, $p_n \in [R_n(1 + (\ln_2 R_n)^{-1}, R_n(1 + 2(\ln_2 R_n)^{-1}]$, $q_n \in [r_n', r_n'']$, $r_n' = o(q_n)$, $q_n =$

$= o(r_n^{\rho})$, $n \to \infty$, *такие, что окружности* $\{z : |z| = p_n\}$ и $\{z : |z| = q_n\}$ *не пересекаются с* E *и*

$$\ln|F(p_n e^{i\theta})| = o(\lambda(p_n)),\ \ \gamma_n \leqslant |\theta| \leqslant \pi,\ n \to \infty, \tag{2.13}$$

$$\ln|F(q_n e^{i\theta})| \sim S_\rho(\theta)\lambda(q_n),\ n \to \infty. \tag{2.14}$$

Существуют функции φ_1 *и* φ_2, $\varphi_1(r) \to 0$, $\varphi_2(r) \to 0$ *при* $r \to \infty$, *такие, что*

$$\ln|F(re^{i\varphi_1(r)})| \sim \lambda(r),\ r \to \infty, \tag{2.15}$$

$$\ln|G(re^{i\varphi_2(r)}| \sim \lambda(r),\ \ r \to \infty. \tag{2.16}$$

Доказательство. Здесь и в дальнейшем будет использоваться следующая теорема Р. С. Юлмухаметова [12].

Теорема Ю. *Пусть* $u \in S$, $B(r,\ u) = O(r^\rho)$, $r \to \infty$, $\rho < \infty$. *Тогда существуют целая функция* f *и* $E \in (\sigma)$ *такие, что*

$$|u(z) - \ln|f(z)|| = O(\ln^2|z|)\, z \to \infty\,,\ z \notin E. \tag{2.17}$$

По теореме Ю можно найти такие целые функции F и G, для которых вне некоторого $E \in (\sigma)$ выполняется

$$|v(z) - \ln|F(z)|| = O(\ln^2|z|),\ z \to \infty,\ z \notin E, \tag{2.18}$$

$$|v_1(z) - \ln|G(z)|| = O(\ln^2|z|),\ z \to \infty,\ z \notin E. \tag{2.19}$$

Из (2.19) сразу следует (2.10), а из (2.18) и свойства 5) в лемме 2.1—(2.14). Из (2.18) и (2.19) вытекает выполнение (2.9) сначала при $r \notin E_1$, где $E_1 = \{r > 0 : \exists\, re^{i\theta} \in E\}$. Так как $E_1 \in (\sigma)$, то в силу монотонности $\ln M(r,\ G)$, $\ln M(r,\ F)$ и $\lambda(r)$ и леммы 2.2 соотношение (2.9) выполняется при $r \to \infty$ без ограничений. Из $E \in (\sigma)$ леммы 2.2, (2.10) и принципа максимума модуля следует (2.11). Из тех же соображений и свойства 4) в лемме 2.1 получаем (2.12). Так как $R_n(1 + 2/\ln_2 R_n) - R_n(1 + 1/\ln_2 R_n) > \{R_n(1 + 2/\ln_2 R_n)\}^{1/2}$, то из свойства 6) в лемме 2.1 и (2.18) следует (2.13). Из (2.9), (2.11), (2.12) сразу вытекают (2.15) и (2.16). Лемма 2.4 доказана.

Приступим теперь непосредственно к доказательству теоремы 1. Выберем последовательность (a_k), $k \in \mathbf{Z}$, так, чтобы $a_{-k} = a_k$, $E_1 = \{a_{2m} : m \in \mathbf{Z}_+\}$, $E_2 \setminus E_1 = \{a_{2m+1} : m \in \mathbf{Z}_+\}$. Последовательность $\theta_k \uparrow \pi$, $k \to +\infty$, выберем так, что $\theta_{-k} = -\theta_k$, $\theta_0 = 0$, $\theta_{k+1} - \theta_k \downarrow 0$, $0 \leqslant k \to +\infty$; $\theta_{2k+1} = (\theta_{2k} + \theta_{2k+2})/2$. Положим

$$H_k = \begin{cases} G,\ k = 2m, \\ F,\ k = 2m+1, \end{cases}$$

где целые функции G и F построены в лемме 2.4. Выберем последовательность (c_k), $c_k > 0$, $c_{-k} = c_k$, так, чтобы $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k < \infty$, $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k|a_k| < \infty$. Пусть

$$f_j(z)=\sum_{k\neq j} c_k(a_k-a_j)H_k(ze^{-i\theta_k}),$$

$$g_j(z)=\sum_{k\neq j} c_kH_k(ze^{-i\theta_k}).$$

Следующая лемма выводится в [5, с. 202—203] из тождества Картана [1, с. 33].

Лемма 2.5. *Пусть заданы произвольная последовательность чисел (R_q) и произвольная последовательность мероморфных функций (f_k). Тогда множество*

$$E=\{\theta\in[-\pi,\ \pi]:\forall k,\ q\geqslant 1$$
$$m(R_q,\ (f_k-e^{i\theta})^{-1})<2^{k+q+1}\pi\ln 2\}$$

не пусто.

Применяя эту лемму, заключаем, что существует число $\alpha\in[0,2\pi]$ такое, что при всех $j\in\boldsymbol{Z}$, $n\in\boldsymbol{N}$ выполняется

$$m(p_n,\ e^{i\alpha},\ f_j)\leqslant 2^{|j|+n+2}\pi\ln 2. \tag{2.20}$$

Пусть далее

$$\psi_1(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_ka_kH_k(ze^{-i\theta_k})-e^{i\alpha},$$

$$\psi_2(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_kH(ze^{-i\theta_k}),\quad f(z)=\psi_1(z)/\psi_2(z).$$

Отсюда в силу (2.9) при $r\to\infty$

$$T(r,\ f)\leqslant T(r,\ \psi_1)+T(r,\ \psi_2)+O(1)\leqslant \ln M(r,\ \psi_1)+$$
$$+\ln M(r,\ \psi_2)+O(1)\leqslant(2+o(1))\lambda(r). \tag{2.21}$$

Пусть $k(\theta)=\sup\{S_\rho(\theta+\theta_m):m\in\boldsymbol{Z}\}$. Легко видеть, что для всех $\theta\in[0,\ \pi)\cup(\pi,\ 2\pi)$ в определении $k(\theta)$ можно брать max вместо sup, $0<k(\theta)<1$, $k(\theta_m)=1$, $m\in\boldsymbol{Z}$, $k(\pi)=1$. Непрерывная функция k имеет угловые точки в $\theta'_{m+1}=(\theta_m+\theta_{m+1})/2$. Положим $\varphi_{2m+1}(r)=\varphi_1(r)$, $\varphi_{2m}(r)=\varphi_2(r)$, $m\in\boldsymbol{Z}$, где φ_1 и φ_2 взять из (2.15) и (2.16).

Покажем, что $\beta(a_j,\ f)>0$. Имеем

$$f(z)-a_j=\frac{f_j(z)-e^{i\alpha}}{g_j(z)+c_jH_j(ze^{-i\theta_j})}. \tag{2.22}$$

Из (2.11) и (2.12) следует, что при $r\to\infty$

$$|f_j(re^{i(\theta_j+\varphi_j(r))})|\leqslant\exp\{(\omega_j+o(1))\lambda(r)\},$$
$$|g_j(re^{i(\theta_j+\varphi_j(r))})|\leqslant\exp\{(\omega_j+o(1))\lambda(r)\},$$

где $\omega_j=\max\{S_\rho(\theta_j-\theta_m):m\in\boldsymbol{Z}\setminus\{j\}\}=\max\{S_\rho(\theta_j-\theta_{j-1}),\ S_\rho(\theta_j-\theta_{j+1})\}$, $0<\omega_j<1$. С другой стороны, в силу (2.15) и (2.16)

$$|c_jH_j(re^{i\varphi_j(r)})|\geqslant\exp\{(1+o(1))\lambda(r)\},\quad r\to\infty.$$

Из (2.22) следует поэтому, что $(r \to \infty)$

$$|f(re^{i(\theta_j+\varphi_j(r))}) - a_j| \leqslant \exp\{(\omega_j - 1 + o(1))\lambda(r)\},$$
$$L(r, a_j, f) \geqslant (1 - \omega_j + o(1))\lambda(r).$$

Вместе с (2.21) это дает $\beta(a_j, f) \geqslant (1 - \omega_j)/2 > 0$.

Теперь докажем, что $\delta(a_{2k}, f) = 0$. Положим $j = 2k$ и выберем $\eta = \eta_j$, $0 < \eta < \theta'_{j+1} - \theta_j$ при $j \geqslant 0$ и $0 < \eta < \theta_j - \theta'_{j-1}$ при $j < 0$. Рассмотрим угол $W_j = \{z : \theta'_j + \eta \leqslant \arg z \leqslant \theta'_{j+1} - \eta\}$. Пусть $E^j = \{z : ze^{-i\theta_j} \in E\}$, где E — множество из (2.10). Тогда по (2.10) при $z = re^{i\theta} \in W_j \diagdown E^j$, $r \to \infty$, выполняется

$$|H_j(ze^{-i\theta_j})| \geqslant \exp\{(S_\rho(\theta - \theta_j) + o(1))\lambda(r)\}. \tag{2.23}$$

Пусть

$$\omega_j(\theta) = \max\{S_\rho(\theta - \theta_m) : m \in \mathbf{Z} \diagdown \{j\}\} = \max\{S_\rho(\theta - \theta_{j-1}),$$
$$S_\rho(\theta_{j+1} - \theta)\},\ \theta'_j + \eta \leqslant \theta \leqslant \theta'_{j+1} - \eta.$$

Легко видеть, что

$$\max\{\omega_j(\theta) - S_\rho(\theta - \theta_j) : \theta'_j + \eta \leqslant \theta \leqslant \theta'_{j+1} - \eta\} =$$
$$= \max\{\omega_j(\theta) - S_\rho(\theta - \theta_j) : \theta = \theta'_j + \eta,\ \theta = \theta'_{j+1} - \eta\} = -\gamma(j) < 0.$$

Из (2.11) и (2.12) следует, что при $z = re^{i\theta} \in W_j$, $r \to \infty$

$$|f_j(z)| \leqslant \exp\{(\omega_j(\theta) + o(1))\lambda(r)\}, \tag{2.24}$$
$$|g_j(z)| \leqslant \exp\{(\omega_j(\theta) + o(1))\lambda(r)\}. \tag{2.25}$$

Из (2.22)—(2.25) получаем, что при $z = re^{i\theta} \in W_j \diagdown E^j$ выполняется

$$|f(z) - a_j| \leqslant \exp\{(\omega_j(\theta) - S_\rho(\theta - \theta_j) + o(1))\lambda(r)\} \leqslant$$
$$\leqslant \exp\{(-\gamma(j) + o(1))\lambda(r)\},\ r \to \infty. \tag{2.26}$$

Вместе с (2.21) это дает

$$\delta(a_j, f) \geqslant \gamma(j)(\theta'_{j+1} - \theta'_j - 2\eta)/4\pi > 0,\ j = 2k.$$

Из (2.26) следует также, что при $r \to \infty$

$$T(r, f) \geqslant m(r, a_0, f) + O(1) \geqslant (L + o(1))\lambda(r),\ L > 0. \tag{2.27}$$

Из (2.21), (2.27) и свойства 2) в лемме 2.1 вытекает, что $\ln T(r, f) \sim \rho \ln r$, $r \to \infty$.

Покажем теперь, что $\delta(a_{2k}, f) = 0$. Положим $j = 2k + 1$ и зафиксируем η, $0 < \eta < \pi/2$. Пусть $k_0 > 0$ таково, что $\theta_{2k_0-1} \leqslant \pi - \eta < \theta_{2k_0+1}$, $S_{nm} = \{z = p_n e^{i\theta} : \theta_{2m-1} + \eta' \leqslant \theta \leqslant \theta_{2m+1} + \eta'\}$, где p_n взято из (2.13), а $\eta' = \eta/2(2k_0 + 1)$. На $S_{nm} \diagdown E^{2m}$ в силу (2.10), (2.11) и (2.13) выполняется $(z = re^{i\theta} \in S_{nm} \diagdown E^{2m})$ при $n \to \infty$

$$|H_{2m}(ze^{-i\theta_{2m}})| \geqslant \exp\{(S_\rho(\theta - \theta_{2m}) + o(1))\lambda(p_n)\},$$
$$|f_{2m}(z)| \leqslant \exp\{(h_{2m}(\theta) + o(1))\lambda(p_n)\},$$
$$|g_{2m}(z)| \leqslant \exp\{(h_{2m}(\theta) + o(1))\lambda(p_n)\},$$

где $h_{2m}(\theta) = \max\{S_\rho(\theta-\theta_{2k}): k\in \mathbf{Z}\setminus\{m\}\} \leqslant S_\rho(\theta-\theta_{2m}) - \varkappa_m$, $\varkappa_m > 0$. Отсюда и из (2.22) следует, что на $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(S_{nm}\setminus E^{2m})$ функция f равномерно стремится к a_{2m} при $r=|z|\to\infty$ и, следовательно, $\ln^+|f(z)-a_j|^{-1} = O(1)$ при $r\to\infty$. Пусть

$$I_n = \{z: |z| = p_n\}\setminus \bigcup_{m=-k_0}^{k_0}(S_{nm}\setminus E^{2m}).$$

Тогда

$$m(p_n, a_j, f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{I_n}\ln^+\frac{1}{|f(p_ne^{i\theta})-a_j|}\,d\theta + O(1) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{I_n}\ln^+|\psi_2(p_ne^{i\theta})|\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{I_n}\ln^+\frac{1}{|f_j(p_ne^{i\theta})-e^{i\alpha}|}\,d\theta +$$

$$+ O(1) \leqslant \frac{3\eta}{2\pi}(1+o(1))\lambda(p_n) + m(p_n, e^{i\alpha}, f_j) =$$

$$= \frac{3\eta}{2\pi}(1+o(1))\lambda(p_n) + O(2^n) = \frac{3\eta}{2\pi}(1+o(1))\,\lambda(p_n),\ n\to\infty,$$

в силу (2.9) и (2.20), поскольку $\ln\lambda(p_n) = (1+o(1))\rho\ln p_n \geqslant (1+o(1))\rho\ln R_n = (1+o(1))\rho e_2(n)$. Из (2.27) и произвольности $\eta>0$ следует, что $\delta(a_{2k+1}, f) = 0$.

Осталось показать, что $\beta(a, f) = 0$ при $a\notin E_2$. Сначала установим, что $\delta(a, f) = 0$ при $a\notin E_2$. Отрезок $[-\pi+\eta, \pi-\eta]$, $\eta<1/3$, содержит конечное число точек θ_m'. Покроем каждую из этих точек интервалом так, чтобы суммарная длина этих интервалов не превышала η. Дополнение к $[-\pi+\eta, \pi-\eta]$ до объединения этих интервалов состоит из конечного числа сегментов Θ_j, $j_1\leqslant j\leqslant j_2$, $\Theta_j\subset[\theta_{j-1}', \theta_j']$. Используя (2.10), (2.14) и (2.22), подобно тому, как рассуждали выше, показываем, что $f(q_ne^{i\theta})$ равномерно относительно $\theta\in\Theta_j$ стремится к a_j при $n\to\infty$, $j_1\leqslant j\leqslant j_2$. Поэтому

$$\ln^+|f(q_ne^{i\theta})-a|^{-1} = O(1),\ n\to\infty,\ \theta\in\bigcup_{j=j_1}^{j_2}\Theta_j.$$

Пусть

$$S = [-\pi, \pi]\setminus\bigcup_{j=j_1}^{j_2}\Theta_j,$$

тогда $\operatorname{mes} S\leqslant 3\eta$. Используя теорему Эдрея и Фукса [1, с. 58], получим

$$m(q_n, a, f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S}\ln^+\frac{1}{|f(q_ne^{i\theta})-a|}\,d\theta + O(1) \leqslant$$

$$\leqslant K_\mu\ln\frac{1}{3\eta}T(2q_n, f) + O(1),\ K = \mathrm{const}>0. \qquad (2.28)$$

При $r\in[r_n', r_n''/2]$ в силу свойства 3) из леммы 2.1, (2.21) и (2.27) имеем при $r\to\infty$

$$T(2r, f) \leqslant (2+o(1))\lambda(2r) = (1+o(1))2^{\rho+1}c_nr^\rho =$$

$$= (1+o(1))2^{\rho+1}\lambda(r) \leqslant (1+o(1))2^{\rho+1}L^{-1}T(r, f). \qquad (2.29)$$

В частности, (2.29) справедливо при $r = q_n$, и из (2.28) получаем при $n \to \infty$

$$m(q_n, a, f) \leqslant (1 + o(1)) K 2^{\rho+1} L^{-1} \eta \ln \frac{1}{3\eta} T(q_n, f). \quad (2.30)$$

Учитывая, что η можно выбирать сколь угодно малым, получаем $\delta(a, f) = 0$, $a \notin E_2$.

В силу (2.29) выполняется

$$T(2r, f) = O(T(r, f)), \ r \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [r_n', r_n''/2], \ r \to \infty,$$

а по (2.30) $m(q_n, a, f) = o(T(q_n, f))$, $r_n' = o(q_n)$, $q_n = o(r_n'')$, $n \to \infty$. По теореме одного из авторов [7] тогда $\beta(a, f) = 0$. Теорема 1 полностью доказана.

Список литературы: 1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. — М.: Наука, 1970.—592 с. 2. *Петренко В. П.* Рост мероморфных функций. — Х.: Вища шк., 1978.—136 с. 3. *Гришин А. Ф.* О сравнении дефектов $\delta_p(a)$ — Теория функций, функцион. анализ и их приложения, 1976, вып. 25, с. 56—66. 4. *Гольдберг А. А.* К вопросу о связи между дефектом и отклонением мероморфной функции. — Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1978, вып. 29, с. 31—35. 5. *Содин М. Л.* О соотношении между множествами дефектных значений и отклонений для мероморфной функции конечного порядка. — Сиб. мат. журн, 1981, 22, № 2, с. 198—206. 6. Linear and complex analysis problem book, 199 research problems. — Lect. Notes in Math., N 1043. Springer Verl., Berlin, 1984. 7. *Еременко А. Э.* О дефектах и отклонениях мероморфных функций конечного порядка. — Докл. АН УССР, 1985, № 1, с. 8. *Петренко В. П.* К вопросу о структуре множества положительных отклонений мероморфных функций. — Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1970, вып. 12, с. 86—94. 9. *Kotman L. J.* An entire function with irregular growth and more than one deficient value. — Lect. Notes in Math., N 747. Springer Verl., Berlin, 1979, p. 219—229. 10. *Hayman W. K.* Research problems in function theory. Athlone Press, London, 1967.—56 p. 11. *Miles J.* Some examples of the dependence» of the Nevanlinna dificiency upon the choice of origin. — Proc. London Math. Soc., 1983, 47, p. 145—176. 12. *Юлмухаметов Р. С.* Приближение субгармонических функций. — Мат. сб., 1984, 124, № 3, с. 393—415.

Поступила в редколлегию 16. 09. 85.

УДК 517

Г. Р. БЕЛИЦКИЙ

ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1°. Пусть V — росток в особой точке $0 \in \boldsymbol{R}^n$ векторного поля класса C^∞. Для каждого ростка C^∞ — отображения $\varphi = (\varphi_1 \ldots \varphi_m): \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}^m$ положим

$$(V\varphi)(x) = ((V\varphi_1)(x); \ \ldots; \ (V\varphi_m)(x)).$$

Рассмотрим уравнение

$$(V\varphi)(x) + Q(x)\varphi(x) = \gamma(x). \tag{1}$$

Здесь $Q: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}^{m^2}$, $\gamma: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}^m$ — заданные C^∞-отображения, а $\varphi: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}^m$ — неизвестные.

Обозначим через Λ линейное приближение поля V, а через L_c — инвариантное подпространство, отвечающее части спектра, лежащей на мнимой оси.

Теорема. *Пусть L_c инвариантно относительно поля V, а сужение $V_c = V/L_c$ конечно определено. Тогда каждое формальное решение уравнения (1) восстанавливается до локального C^∞-решения.*

Утверждение теоремы означает, что для каждого формального решения $\hat{\varphi}$ уравнения (1) существует его локальное C^∞-решение, ряд Тейлора которого в нуле равен $\hat{\varphi}$.

Будем считать известными следующие факты о ростках векторных полей.

1. Конечная определенность поля V_c влечет неравенство $\dim L_c \leqslant 2$ (см. [1]). Если $\dim L_c = 1$, то конечная определенность сводится к условию $\hat{V}_c \neq 0$ (т. е. ряд Тейлора в точке 0 отличен от нуля). В случае $\dim L_c = 2$ конечная определенность имеет место тогда и только тогда, когда спектр сужения $\Lambda_c = \Lambda/L_c$ отличен от нуля, а поле V_c формально орбитально не эквивалентно своему линейному приближению Λ_c.

2. Если $\dim L_c = 2$, то поле V_c некоторым C^∞-преобразованием $x \mapsto \Phi(x)$ окрестности начала координат в $\boldsymbol{R}^2$ можно привести к нормальной форме (см. [2])

$$(\Phi_* V_c)(x) = f_1(x)\frac{\partial}{\partial\xi} + f_2(x)\frac{\partial}{\partial\eta} \quad (x = (\xi, \eta) \in \boldsymbol{R}^2),$$

где

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x)) = \sum_{k=0}^{l} a_k \|x\|^{2k} U_k x, \; a_k \in \boldsymbol{R}. \tag{2}$$

Здесь $l < \infty$ и U_k — ортогональные операторы в $\boldsymbol{R}^2$.

3. Обозначим через $L_\pm$ инвариантное подпространство оператора Λ, отвечающее части спектра, лежащей в открытой левой (правой) полуплоскости. Существует такое C^∞-преобразование $x \mapsto \Phi(x)$, что подпространства $L_+ + L_c$ и $L_- + L_c$ инвариантны относительно поля $\Phi_* V$ (см [3]).

В дальнейшем мы считаем поле V таким, что V_c приведено к нормальной форме, а подпространства $L_\pm + L_c$ инвариантны относительно V.

В случае $L_c = 0$ (т. е. для гиперболического ростка поля) теорема была доказана в [4], а для одного переменного ($n = \dim L_c = 1$) в [5].

Схема доказательства теоремы такова. Так как каждое формальное отображение $\hat{\varphi}: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}^m$ восстанавливается до некоторого локального C^∞-отображения $\varphi: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}^m$, то достаточно доказать разрешимость уравнения (1) при любой правой части γ, плоской в точке 0 (т. е. имеющей в этой точке нулевые производные всех порядков). Сначала мы доказываем разрешимость при любой правой части γ, плоской на L_c (используется «гиперболичность V на L_c); это утверждение, как и его аналог для функциональных уравнений, (см. [6]), верно для любого поля V). С учетом теоремы Уитни о восстановлении функции по ее производным на L_c, все сводится теперь к доказательству разрешимости уравнений

$$((V_\varphi)(x) + Q(x)\varphi(x) - \gamma(x))^{(k)} = 0 \quad (x \in L_c,\ k = 0,\ 1,\ \ldots).$$

Если $\dim L_c = 1$, то можно непосредственно использовать теорему А. Кузнецова [5]. Если $\dim L_c = 2$, то приходится предварительно приводить матрицу $Q(x)$ к нормальной форме (при $n = 1$ эта часть проделана в [5]).

Мы существенно используем здесь технику, развитую в [3] для функциональных уравнений.

2°. **Лемма 1.** *Пусть в уравнении (1) все производные правой части γ равны нулю на L_c. Тогда существует его локальное C^∞-решение $\varphi: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}^m$.*

Доказательство. Так как $L_+ + L_c \cap L_- + L_c = L_c$, то в силу [3, с. 105], существуют такие плоские на $L_\pm + L_c$ отображения $\gamma_\pm: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}^m$, что $\gamma = \gamma_+ + \gamma_-$. Достаточно доказать разрешимость каждого из уравнений

$$(V\varphi)(x) + Q(x)\varphi(x) = \gamma_\pm(x). \tag{3}$$

Докажем разрешимость первого из них; второе рассматривается аналогично.

Положим

$$W(x,\ y) = (V(x);\ Q(x)y - \gamma_+(x)) \quad (x,\ y \in \boldsymbol{R}^{2n}).$$

Обозначим через H^t поток поля W. Тогда $H^t(x,\ y) = (F^t(x); A^t(x)y + \Gamma\ (x))$, где Γ^t — поток поля V. Достаточно доказать существование такого плоского на $L_+ + L_c$ отображения $\varphi: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}^m$, что

$$\varphi(F^t x) = A^t(x)\varphi(x) + \Gamma^t(x) \tag{4}$$

при малых t.

Пусть $x = x_+ + x_- + x_c \in \boldsymbol{R}^n$ ($x_\pm \in L_\pm$, $x_c \in L_c$) и $\rho(x,\ M)$ — расстояние от x до множества M. Тогда $\rho(x;\ L_+ + L_c) = \|x_-\|$. Можно выбрать такой представитель ростка V, чтобы некоторая δ-окрестность нуля в $\boldsymbol{R}^n$ отображалась в себя под действием F^t при $t < 0$ и чтобы $\|F_-^{-t_0}(x)\| \leqslant q^{-t_0}\|x_-\|$, $t_0 > 0$, $q < 1$.

Зафиксировав такое δ и такой представитель ростка V, преобразуем (4) к виду

$$\varphi(x) = A^t(F^{-t}x)\,\varphi(F^{-t}x) + \Gamma^t(F^{-t}x). \tag{5}$$

В силу [3] уравнение (5) имеет при $t = t_0$ C^∞-решение $\varphi_0 : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}^m$, определенное в δ-окрестности начала координат и плоское на $L_+ + L_c$. В силу свойств отображения F^{t_0} такое решение единственно. Положим теперь

$$\varphi_t(x) = A^t(F^{-t}x)\,\varphi_0(F^{-t}x) + \Gamma^t_{0}(F^{-t}x).$$

Тогда φ_t определено в δ-окрестности нуля, плоское на $L_+ + L_c$ и удовлетворяет уравнению (5) при $t = t_0$. В силу единственности, $\varphi_t = \varphi_0$. Следовательно, φ_0 удовлетворяет уравнению (5) при всех t. Лемма доказана.

Из леммы 1 вытекает утверждение теоремы в гиперболическом случае (при $\dim L_c = 0$).

3°. Пусть теперь $\dim L_c > 0$. Положим $x_1 = x_+ + x_- \in L_+ + L_-$, так что $x = x_1 + x_c$.

Полагая $V = f_1(x)\dfrac{\partial}{\partial x_1} + f_c(x)\dfrac{\partial}{\partial x_c}$, получим, в силу инвариантности L_c, что $f_1(x) = 0$ $(x \in L_c)$. Рассмотрим бесконечную систему уравнений

$$\frac{\partial^k}{\partial x_1^k}\left[(V\varphi)(x) - Q(x)\,\varphi(x) - \gamma(x)\right]\Big|_{x = x_c \in L_c} = 0. \tag{$6k$}$$

Уравнение (6_0) имеет вид

$$f_c(x_c)\frac{\partial\varphi}{\partial x_c} + Q(x_c)\,\varphi(x_c) = \gamma(x_c).$$

При $k \geqslant 1$ уравнение (6_k) можно записать в виде

$$f_c(x_c) = \frac{\partial\psi_k}{\partial x_c} + B(x_c)\,\psi_k(x_c) = \gamma_k(x_c).$$

Здесь $\psi_k(x_c) = \dfrac{\partial^k\varphi}{\partial x_1^k}\Big|_{x = x_c \in L_c}$, а γ_k определяется по γ и производным от φ порядка $\leqslant k-1$.

Пусть $\dim L_c = 1$. Так как $\hat{f}_c \neq 0$, то, в силу [5], все уравнения (6_k) имеют C^∞-решения, определенные в некоторой единой (не зависящей от k) окрестности нуля в L_c. Следуя теореме Уитни [3] построим в этой окрестности такое C^∞-отображение φ_0, для которого $\dfrac{\partial^k\varphi_0}{\partial x_1^k}\Big|_{x = x_c} = \psi_k(x_c)$. Тогда росток $\tilde{\gamma}(x) = + (V\varphi_0)(x) + Q(x)\,\varphi_0(x) - \gamma(x)$ является плоским на L_c. В силу леммы 1, уравнение $(V\tilde{\varphi})(x) + Q(x)\,\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\gamma}(x)$ имеет локальное C^∞-решение $\tilde{\varphi}$, плоское на L_c. Сумма $\tilde{\varphi} + \varphi_0$ является

решением уравнения (1). Тем самым теорема доказана при $\dim L_c = 1$.

4°. Прежде, чем переходить к случаю $\dim L_c = 2$, докажем одно общее утверждение о матрицах $Q(x)$, участвующих в уравнении вида (1). Преобразование $\varphi(x) = T(x)\tilde{\varphi}(x)$ с некоторой C^∞-матрицей $T: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}^{m^2}$, $\det T(0) \neq 0$, переводит уравнение (1) в аналогичное уравнение с матрицей

$$\tilde{Q}(x) = T^{-1}(x)(Q(x)T(x) - (VT)(x)).$$

Тем самым возникает некоторая эквивалентность C^∞-матриц. C^∞-матрицы $Q(x)$ и $\tilde{Q}(x)$ называются формально эквивалентными, если существует такое формальное преобразование $\hat{T}: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}^{m^2}$, что

$$\hat{\tilde{Q}}(x) = \hat{T}^{-1}(x)(\tilde{Q}(x)\hat{T}(x) - (VT)(x)).$$

Пусть D — полупростая часть матрицы $Q(0)$, а D_0 — полупростая часть линейного приближения поля V. Будем говорить, что матрица $\tilde{Q}(x)$ имеет нормальную форму, если $[D, \tilde{Q}(x)] = D_0\tilde{Q}(x)$ (здесь $[\,,\,]$ — коммутатор матриц).

Лемма 2. *Каждая матрица $Q(x)$ формально эквивалентна некоторой нормальной форме.*

Доказательство. Сначала докажем существование такого формального преобразования $\hat{T}$, что формальный ряд $\hat{\tilde{Q}}(x)$ имеет нормальную форму. Доказательство ничем не отличается от доказательства аналогичных утверждений для векторных полей, диффеоморфизмов и т. д. и, по существу, содержится в [3], где рассмотрены произвольные группы формальных преобразований.

В силу [3, с. 141], существует такая C^∞-матрица $\hat{Q}(x)$, ряд Тейлора которого в нуле равен $\hat{\tilde{Q}}$ и которая имеет нормальную форму. Матрица $\tilde{Q}$ — искомая.

Согласно лемме 2, уравнение (1) можно записать в виде

$$(V\varphi)(x) + Q(x)\varphi(x) + \tau(x)\varphi(x) = \gamma(x), \tag{7}$$

где Q имеет нормальную форму, а $\hat{\tau} = 0$.

5°. Будем теперь считать, что в (L) $n = 2$, поле V конечно определено и приведено к виду (2) (и Q также имеет нормальную форму). Пусть $\operatorname{spec}\Lambda = \{\pm\mu_i\}$ (здесь $\mu \neq 0$), а $D = \operatorname{diag}(\lambda_1 \ldots \lambda_n)$. Тогда, полагая $\hat{Q}(x) = (\hat{Q}_{kj}(x))$, получим

$$\hat{Q}_{kj}(x) \neq 0 \Rightarrow \lambda_k - \lambda_j = s \cdot \mu_l,\ s \in \boldsymbol{Z}.$$

Введем на множестве $\{\lambda_k\}$ отношение эквивалентности, положив

$$\lambda_k \sim \lambda_j \leftrightarrow \lambda_k - \lambda_j = s \cdot \mu_i, \ s \in \boldsymbol{Z}.$$

Пусть $M_1 \ldots M_p$ — классы эквивалентности. Занумеруем числа λ_k так, чтобы

$$\lambda_l \in M_\nu \ (k_{\nu-1} + 1 \leqslant l \leqslant k_\nu, \ \nu = 1, \ldots, p), \ k_0 = 0.$$

Тогда, переходя к комплексным координатам и полагая

$$\hat{Q}_{kj}(x) = B_{kj}(z, \bar{z}) \quad (x \in \boldsymbol{R}^2, \ z \in \boldsymbol{C}),$$

получим

$$\hat{B}_{ej}(z, \bar{z}) = \hat{b}_{ej}(|z|^2) \, \bar{z}^{s_j^\nu - s_e^\nu} \quad (k_{\nu-1} + 1 \leqslant l, \ j \leqslant k_\nu).$$

Здесь $\hat{b}_{ej}$ — некоторые ряды от одной переменной, а

$$s_j^\nu = \frac{\lambda_{k_{\nu-1}+1} - \lambda_j}{\mu i} \quad (k_{\nu-1} + 1 \leqslant j \leqslant k_\nu).$$

Сделаем теперь в (7) преобразование, положив $\varphi(x) = T(z, \bar{z}) \tilde{\varphi}(x)$, где $T(z, \bar{z}) = \operatorname{diag}\left(\bar{z}^{s_1^1} \ldots \bar{z}^{s_{k_1}^1}; \ \bar{z}^{s_{k_1+1}^2} \ldots\right)$.

Такое преобразование допустимо, поскольку оно является изоморфизмом пространства отображений, плоских в начале координат. Уравнение (7) преобразуется в уравнение того же вида с матрицей $\tilde{Q}(x) = \tilde{b}(|z|^2) - \bar{h}(|z|^2) C$, где C — диагональная целочисленная матрица (с элементами $s_{k_\nu}^l$), а функция h связана с полем V равенством.

6°. Напомним, что нам остается доказать разрешимость уравнений (6_k) при $\dim L_c = 2$. В силу сказанного в предыдущем пункте, для этого, в свою очередь, достаточно доказать разрешимость уравнений вида (7), где $n = 2$, поле V приведено к нормальной форме (2), а $Q(x) = B(|z|^2) = B(\|x\|^2)$.

Преобразование $\varphi(x) = T(\|x\|^2) \tilde{\varphi}(x)$ приводит это уравнение к аналогичному, но с матрицей $\tilde{Q}(x) = \tilde{B}(|z|^2)$, где

$$\tilde{B}(t) = T^{-1}(t) \left(B(t) T(t) - W(t) T'(t)\right),$$

а $W(t) = \operatorname{Re} h(t) \cdot t$. В силу [5] найдется такое допустимое преобразование $T(t)$, что матрица $\tilde{B}(t)$ имеет жорданову форму с собственными значениями

$$\lambda_i(t) = \sum_{k=1}^{l_i} \lambda_k^i t^{q_k^i}, \quad \lambda_k^i \in \boldsymbol{C}, \ l_i < \infty,$$

где $q_k^i \geqslant 0$ — рациональны. Допустимость здесь означает, что $T(t)$ принадлежит классу C^∞ после замены $t \mapsto t^m$ и умножения на t^l при некоторых $m, l \in \boldsymbol{R}$.

В силу сказанного можно теперь считать, что матрица $Q(x)$ в уравнении (7) имеет вид $Q(x) = B(\| x \|^2)$, где $B(t)$ — жорданова с собственными значениями $\lambda_i(t)$.

Лемма 3. *Существует допустимое преобразование $\tilde{\varphi}(x) = T(x)\varphi(x)$, которое приводит уравнение (7) к виду*

$$(V\tilde{\varphi})(x) + \tilde{Q}(x)\tilde{\varphi}(x) = \gamma(x),$$

в котором $\tilde{Q}(x) = D(\| x \|^2) + N(x)$, где $D(t)$ — диагональная матрица, а $N(x)$ — нильтреугольная C^∞-матрица.

Доказательство. Пусть, для определенности, $\operatorname{Re} h(t) = ct^r + \ldots$, $c > 0$. Замена $\varphi(x) = T(\| x \|^2)\tilde{\varphi}(x)$, где $T(t) = \operatorname{diag}(1, t^r, \ldots, t^{(m-1)r})$ преобразует матрицу $Q(x)$ в матрицу

$$\tilde{Q}(x) = \operatorname{diag}(\tilde{\lambda}_1)\| x \|^2, \ \ldots \ \tilde{\lambda}_m(\| x \|^2)) + \| x \|^{2r} N_0,$$

где $\tilde{\lambda}_j(t) = \lambda_j(t) - r(j-1)\operatorname{Re} h(t)$, а N_0 — нильпотентная жорданова матрица. Указанное преобразование допустимо. Все остальные преобразования будут принадлежать классу C^∞. Теперь мы считаем, что

$$Q(x) = \operatorname{diag}(\lambda_1(t), \ \ldots, \ \lambda_m(t)) + \| x \|^{2r} N_0 + \tau(x), \ \hat{\tau} = 0.$$

Пронумеруем собственные значения $\lambda_i(t)$ таким образом, чтобы при малых $t > 0$ выполнялись неравенства

$$\operatorname{Re}\lambda_1(t) \geqslant \operatorname{Re}\lambda_2(t) \geqslant \ \ldots \ \geqslant \operatorname{Re}\lambda_m(t).$$

Будем искать преобразующую матрицу в виде $T(x) = E + \psi(x)$, где $\psi(x)$ — нижняя нильтреугольная C^∞-матрица с нулевым рядом Тейлора в нуле. Тогда, полагая $Q(x) = D(\| x \|^2) + \| x \|^{2r} G(x)$, $D(\| x \|^2) = \operatorname{diag}(\lambda_1(t), \ \ldots, \ \lambda_m(t))$, для элементов $\psi_{ij}(x)$ получим уравнения

$$V\psi_{ij}(x) = (\lambda_i(\| x \|^2) - \lambda_j(\| x \|^2))\psi_{ij}(x) + \| x \|^{2r} \times$$
$$\times \sum_k G_{ik}(x)\psi_{kj}(x) + \sum_k \psi_{ik}(x) n_{kj}(x) + \tau_{ij}(x) \ (j \leqslant i). \tag{8}$$

Элементы $\psi_{ij}(x)$ последовательно (при $j = 1, 2, \ \ldots$) находятся из этих уравнений с учетом равенств $\psi_{kj} = 0$ $(k \leqslant j)$, $n_{kj} = 0$ $(k \geqslant j)$. Элементы $n_{ij}(x)$ $(i < j)$ определяются из равенств

$$\| x \|^{2r} \cdot \sum_k G_{ik}(x)\psi_{kj}(x) = n_{ij}(x) + \sum_k \psi_{ik}(x) n_{kj}(x) + \tau_{ij}(x).$$

Зафиксируем j и положим $f(x) = (\psi_{l+1,j}(x), \ \ldots, \ \psi_{mj}(x))$. Тогда (8) можно записать в виде

$$(Vf)(x) = \Delta(\| x \|)^2 f(x) + \| x \|^{2r} L(x) f(x) + \theta(x), \tag{9}$$

где $\Delta(t) = \operatorname{diag}(\lambda_{j+1}(t) - \lambda_j(t), \ \ldots, \ \lambda_m(t) - \lambda_j(t))$, L — некоторая C^∞-матрица, а $\theta(x) = (\tau_{j+1,j}(x) \ , \ldots, \ \tau_{mj}(x))$.

Рассмотрим поле

$$W(x,\ y)=(V(x);\ \Delta(\|x\|^2y+\|x\|^{2r}L(x)\,y+\theta(x))$$

в $\boldsymbol{R}^2\times\boldsymbol{C}^m$. Пусть

$H^t(x,\ y)=(F^t(x);\ A^t(x)\,y+\Gamma^t(x))$ — его поток. Для доказательства разрешимости уравнения (9) достаточно доказать существование такого f, что $f(F^tx)=A^t(x)f(x)+\Gamma^t(x)$ при малых $t>0$. Это уравнение эквивалентно уравнению

$$f(x)=A^t(F^{-t}x)\,f(F^{-1}x)+\Gamma^t(F^{-t}x). \tag{10}$$

Зафиксируем малое $t_0>0$. Тогда F^{-t_0} — является квазисжатием порядка $2r$ в смысле [3], а $\|A^{t_0}(F^{-t_0}x)\|\leqslant 1+C\|x\|^{2r}$. Повторяя рассуждения из [3], получим, что уравнение (10) при $t=t_0$ имеет единственное C^∞-решение f_0, определенное в δ — окрестности нуля и плоское в точке $x=0$. Отображение

$$f_t(x)=A^t(F^{-t}x)\,f_0(F^{-t}x)+\Gamma^t(F^{-t}x)$$

также удовлетворяет (10) при $t=t_0$, определено в той же окрестности, что и f_0 и плоское в точке $x=0$. В силу единственности, $f_t=f_0$. Следовательно, f_0 удовлетворяет (10) при всех t.

Таким образом, уравнения (8) разрешимы. Лемма доказана.

7°. В этом пункте завершим доказательство нашей теоремы. В силу леммы 3 можно считать, что матрица $Q(x)+\tau(x)$ в (7) треугольна. Это, в свою очередь, сводит доказательство разрешимости уравнения (7) к разрешимости серии одномерных ($m=1$) уравнений вида

$$(Vf)(x)=(d(\|x\|^2+\delta(x))\,f(x)+a(x)\quad (x\in\boldsymbol{R}^2). \tag{11}$$

Здесь $\hat{\delta}=0$, $d(t)=d_0+d_1t^\rho+0(t^\rho)$, где $\rho>0$ — вещественно, а d_0, d_1 — некоторые комплексные числа (может случиться, что $d=0$, тогда мы полагаем $d_0=0$, $\rho=\infty$).

Как и выше, для доказательства разрешимости уравнения (11), перейдем к потоку:

$$f(F^tx)=a^t(x)f(x)+b^t(x). \tag{12}$$

Выбором представителей ростков можно добиться, чтобы $b^t(x)=0$, $a^t(x)=1$ ($\|x\|\geqslant\delta$). Пусть сначала $\operatorname{Re}d_0<0$. Тогда $|a^t(x)|\leqslant q-1$ при малых t, x. Сведем уравнение (12) к уравнению

$$f(x)=a^t(F^{-t}x)\,f(F^{-t}x)+b^t(F^{-t}x),$$

которое решается, как и (10).

Пусть теперь $\operatorname{Re}d_0>0$. При $t=t_0>0$ запишем (12) в виде

$$f(x)=(a^{t_0}(x))^{-1}f(F^{t_0}(x))-(a^{t_0}(x)^{-1}b^{t_0}(x). \tag{13}$$

Здесь $F^{t_0}(x)$ — квазирастяжение в смысле [3]. Следуя [3, с. 126] для решения (13) рассмотрим компакт функций f, равных нулю вне δ — окрестности нуля и удовлетворяющих оценкам

$$\|f^{(k)}(x)\|\leqslant C_{k\nu}\cdot\begin{cases}\|x\|^\nu, & (\|x\|\leqslant\delta_{k\nu}),\\ a_{k\nu}\|x\|^{-\nu}, & (\|x\|\geqslant\delta_{k\nu}).\end{cases}\quad (\nu\geqslant\nu_k)$$

Подбором параметров ν_k, $\delta_{k\nu}$, $\alpha_{k\nu}$ и $c_{k\nu}$ можно добиться того, чтобы этот компакт переводился в себя под действием оператора, стоящего в правой части (13) (заметим, что $|a^{t_0}(x)^{-1} \leqslant q-1$ при малых x).

Следовательно, уравнение (13) имеет некоторое C^∞-решение $f_0(x)$, равное нулю при $\|x\| \geqslant \delta$. Такое решение единственно. Функция

$$f_t(x) = (a^t(x))^{-1} f_0(F^t x) - b^t(F^t x)(a^t(x))^{-1}$$

также является решением уравнения (13) и равна нулю при $\|x\| \geqslant \delta$. Следовательно, $f_+ = f_0$ является решением (12) при всех t.

Пусть теперь $\operatorname{Re} d_0 = 0$. Если $\rho \geqslant r$ или $\rho < r$, но $\operatorname{Re} d_1 < 0$, то уравнение (11) решается точно так же, как и (10).

Допустим, что $\operatorname{Re} d_0 = 0$, $\rho < r$, $\operatorname{Re} d_l > 0$. Тогда для решения уравнения (12) следует рассмотреть тот же компакт, что и для уравнения (13). (Здесь $|a^{t_0}(x)|^{-1} \leqslant 1 \leqslant -\alpha \|x\|^\rho$, $\alpha > 0$).

Таким образом, мы доказали разрешимость уравнений (6_k) при $\dim L_c = 2$. Теперь доказательство теоремы завершается как и в случае $\dim L_c = 1$.

Список литературы: 1. *Ichikava F.* Finitely determined singularities of formal Vector fields. — In vent. math., 1982, p. 199—214. 2. *Takens F.* Normal forms certain singularities of vectorfields. — Ann. Inst. Fourier, 1973, 23, N 2, p. 183—195. 3. *Белицкий Г. Р.* Нормальные формы, инварианты и локальные отображения. — К.: Наук. думка, 1979.—170 с. 4. *Лычагин В. В.* О достаточных орбитах группы контактных диффеоморфизмов. — Мат. сб., 1977, 104, вып. 2, с. 248—270. 5. *Кузнецов А. И.* Дифференцируемые решения вырождающихся систем обыкновенных уравнений. — Функцион. анализ и его прил., 1979, вып. 2, с. 41—51. 6. *Белицкий Г. Р.* Функциональные уравнения и локальная сопряженность отображений класса.— Мат. сб., 1973, 91, № 4, с. 565—579.

Поступила в редколлегию 18.02.85.

УДК 517.9 + 517.4

О. А. АНОЩЕНКО

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ, ИМЕЮЩИМ ПЕРИОДИЧЕСКУЮ АСИМПТОТИКУ

Рассмотрим уравнение Шредингера

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad -\infty < x < \infty \tag{1}$$

с вещественным потенциалом $q(x)$ таким, что

$$\int_0^{\pm\infty} (1+x^2)\,|q(x) - q_\pm(x)|\,dx < \infty, \tag{2}$$

где $q_\pm(x)$ — вещественные конечнозонные потенциалы для уравнений Хилла

$$-y'' + q_\pm(x)\,y = \lambda y,\ -\infty < x < \infty, \tag{3}$$
$$q_\pm(x + a_\pm) = q_\pm(x),\ a_\pm > 0.$$

Пусть $\theta_\pm(x, \lambda)$, $\varphi_\pm(x, \lambda)$ — фундаментальные системы решений уравнений (3), определенные начальными условиями

$$\theta_\pm(0, \lambda) = \varphi'_\pm(0, \lambda) = 1,\quad \theta'_\pm(0, \lambda) = \varphi_\pm(0, \lambda) = 0.$$

Обозначим

$$\varphi_\pm(\lambda) = \varphi_\pm(a_\pm, \lambda),\ \varphi'_\pm(\lambda) = \varphi'_\pm(a_\pm, \lambda),\ \theta_\pm(\lambda) = $$
$$= \theta_\pm(a_\pm, \lambda),\ \theta'_\pm(\lambda) = \theta'_\pm(a_\pm, \lambda),\ F_\pm(\lambda)$$

— дискриминант Хилла,

$$F_\pm(\lambda) = \frac{\varphi'_\pm(\lambda) + \theta_\pm(\lambda)}{2},$$

$\tilde\psi_{1,2}(x, \lambda)$ — функции Флоке для уравнения (3) с потенциалом $q_-(x)$

$$\tilde\psi_{1,2}(x, \lambda) = \theta_-(x, \lambda) + m^-_{1,2}(\lambda)\,\varphi_-(x, \lambda),$$
$$m^-_{1,2}(\lambda) = (\varphi'_-(\lambda) - \theta_-(\lambda))/2\varphi_-(\lambda) \pm \sqrt{F^2_-(\lambda) - 1}/\varphi_-(\lambda); \tag{4}$$

$\tilde\varphi_{1,2}(x, \lambda)$ — функции Флоке для уравнения (3) с потенциалом $q_+(x)$

$$\tilde\varphi_{1,2}(x, \lambda) = \theta_+(x, \lambda) + m^+_{1,2}(\lambda)\,\varphi_+(x, \lambda),$$
$$m^+_{1,2}(\lambda) = (\varphi'_+(\lambda) - \theta_+(\lambda))/2\varphi_+(\lambda) \pm \sqrt{F^2_+(\lambda) - 1}/\varphi_+(\lambda) \tag{5}$$

(верхний знак в формулах (4), (5) соответствует индексу 1, нижний — индексу 2).

Известно [3], что спектр $\sigma^\pm = \sigma^\pm(q_\pm)$ оператора

$$L_\pm = -\frac{d^2}{dx^2} + q_\pm(x)\quad \sigma^\pm = \{\lambda : \operatorname{Im}\lambda = 0,\ |F_\pm(\lambda)| \leqslant 1\}$$

есть объединение отрезков (зон) $S^\pm_n = [S^\pm_{n1}, S^\pm_{n2}]$, $n = 0, 1, \ldots, N_\pm$, причем $S^\pm_{N_\pm 2} = +\infty$. Интервалы $\Delta^\pm_0 = (-\infty, S^\pm_{01})$, $\Delta^\pm_n = (S^\pm_{(n-1)2}, S^\pm_{n1})$, $n = 1, 2, \ldots, N_\pm$, разделяющие зоны, называются лакунами. Будем называть зоны (лакуны) спектров σ^+ и σ^- положительными и отрицательными зонами (лакунами) соответственно. Обозначим $\Delta^\pm_k$, $k = 1, 2, \ldots, N_1$ ($\Delta^\mp_k, k = 1, 2, \ldots, N_2$) интервалы, которые получаются в результате пересечения положительных (отрицательных) лакун с отрицательными (положи-

тельными) зонами; $\Delta^\pm = \bigcup_{n=0}^{N_\pm} \Delta_n^\pm$. Ветвь радикала в формулах (4), (5) выбрана из условия $\sqrt{F_\pm^2(\lambda)-1} > 0$ при $\lambda \in \Delta_0^\pm$.

При $\lambda \in \operatorname{Int} \sigma^-$ фундаментальную систему решений уравнения (1) образуют функции [4]

$$\psi_{1,2}(x, \lambda) = \tilde{\psi}_{1,2}(x, \lambda) + \int_{-\infty}^{x} K^-(x, y)\, \tilde{\psi}_{1,2}(y, \lambda)\, dy, \tag{6}$$

а при $\lambda \in \operatorname{Int} \sigma^+$ уравнение (1) имеет линейно независимые решения, представимые в виде

$$\varphi_{1,2}(x, \lambda) = \tilde{\varphi}_{1,2}(x, \lambda) + \int_{x}^{\infty} K^+(x, y)\, \tilde{\varphi}_{1,2}(y, \lambda)\, dy, \tag{7}$$

причем потенциал $q(x)$ связан с ядрами $K^\pm(x, y)$ соотношениями

$$q(x) = q_-(x) + 2\frac{dK^-(x, x)}{dx} = q_+(x) - 2\frac{dK^+(x, x)}{dx}.$$

Из представлений (6), (7) следует, что функция $\psi_1(x, \lambda)$ допускает аналитическое продолжение в комплексную λ плоскость с разрезами по спектру σ^-, а функция $\varphi_2(x, \lambda)$ — в комплексную плоскость λ с разрезами по спектру σ^+.

Так как функции $\varphi_{1,2}$, $\psi_{1,2}$ образуют фундаментальные системы решений уравнения (1), то они связаны равенствами

$$\psi_1(x, \lambda) = c_{12}(\lambda)\, \varphi_1(x, \lambda) + c_{11}(\lambda)\, \varphi_2(x, \lambda), \quad \lambda \in \operatorname{Int} \sigma^+, \tag{8}$$

$$\varphi_2(x, \lambda) = c_{22}(\lambda)\, \psi_1(x, \lambda) + c_{21}(\lambda)\, \psi_2(x, \lambda), \quad \lambda \in \operatorname{Int} \sigma^-. \tag{9}$$

Таблица коэффициентов $C = \| c_{ij}(\lambda) \|_{i,j=1,2}$ называется матрицей перехода уравнения (1).

В настоящей работе изучаются свойства матрицы C и решается задача восстановления потенциала $q(x)$ по матрице C и некоторым характеристикам точечного спектра; получены основные интегральные уравнения для решения обратной задачи, а также показано, что найденные свойства элементов некоторой матрицы C являются достаточными для того, чтобы она была матрицей перехода для уравнения (1) с потенциалом, удовлетворяющим условиям (2).

Используя равенства (8), (9), выразим коэффициенты $c_{ij}(\lambda)$ через вронскианы

$$c_{11}(\lambda) = \frac{W\{\psi_1, \varphi_1\}}{W\{\varphi_2, \varphi_1\}} = \frac{\psi_1'(x, \lambda)\, \varphi_1(x, \lambda) - \psi_1(x, \lambda)\, \varphi_1'(x, \lambda)}{m_2^+(\lambda) - m_1^+(\lambda)},$$

$$c_{12}(\lambda) = \frac{W\{\varphi_2, \psi_1\}}{m_2^+(\lambda) - m_1^+(\lambda)}, \quad \lambda \in \operatorname{Int} \sigma^+;$$

$$c_{21}(\lambda) = \frac{W\{\varphi_2, \psi_1\}}{m_2^-(\lambda) - m_1^-(\lambda)}, \quad c_{22}(\lambda) = \frac{W\{\psi_2, \varphi_2\}}{m_2^-(\lambda) - m_1^-(\lambda)}, \tag{10}$$

$$\lambda \in \operatorname{Int} \sigma^-.$$

Стандартным образом [1, 2] из формул (6)—(10) устанавливаются следующие свойства элементов $c_{ij}(\lambda)$ матрицы C:

I. При $\lambda \in \operatorname{Int} \sigma^+ \cap \operatorname{Int} \sigma^-$

$$c_{21}(\lambda) = c_{12}(\lambda) \frac{m_2^+(\lambda) - m_1^+(\lambda)}{m_2^-(\lambda) - m_1^-(\lambda)},$$

$$c_{11}(\lambda) = \overline{c_{22}(\lambda)} \frac{m_1^-(\lambda) - m_2^-(\lambda)}{m_2^+(\lambda) - m_1^+(\lambda)},$$

$$|c_{21}(\lambda)|^2 - |c_{22}(\lambda)|^2 = \frac{m_2^+(\lambda) - m_1^+(\lambda)}{m_2^-(\lambda) - m_1^-(\lambda)},$$

$$|c_{12}(\lambda)|^2 - |c_{11}(\lambda)|^2 = \frac{m_2^-(\lambda) - m_1^-(\lambda)}{m_2^+(\lambda) - m_1^+(\lambda)};$$

$$c_{12}(\lambda) = \overline{c_{11}(\lambda)} \text{ при } \lambda \in \operatorname{Int} \sigma^+ \cap \Delta^-;$$

$$c_{21}(\lambda) = \overline{c_{22}(\lambda)} \text{ при } \lambda \in \operatorname{Int} \sigma^- \cap \Delta^+.$$

II. Функции $c_{12}(\lambda)$ и $c_{21}(\lambda)$ являются предельными значениями функций мероморфных в комплексной плоскости λ с разрезами по спектрам σ^+ и σ^-, причем

$$c_{12}(\lambda^{\text{в}}) = \overline{c_{12}(\lambda^{\text{н}})},\ c_{11}(\lambda^{\text{в}}) = \overline{c_{11}(\lambda^{\text{н}})} \text{ при } \lambda \in \operatorname{Int} \sigma^+;$$

$$c_{21}(\lambda^{\text{в}}) = \overline{c_{21}(\lambda^{\text{н}})} \text{ при } \lambda \in \operatorname{Int} \sigma^-.$$

(Здесь и далее $\lambda^{\text{в}}$, $\lambda^{\text{н}}$ — точки верхнего и нижнего берегов разрезов соответственно).

III. Для функций $c_{ij}(\lambda)$ справедливы следующие асимптотические равенства:

$$c_{12}(\lambda) = 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),\ c_{21}(\lambda) = 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \text{ при } |\lambda| \to \infty;$$

$$c_{11}(\lambda) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),\ c_{22}(\lambda) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \text{ при } \lambda \to +\infty.$$

IV. Функции $\dfrac{\varphi_2(x, \lambda)}{c_{21}(\lambda)}$ и $\dfrac{\psi_1(x, \lambda)}{c_{12}(\lambda)}$ (x фиксировано) ограничены на σ^- и $(\sigma^+ \cap \Delta^-) \cup \{S_{nj}^+\}_{n=0, j=1,2}^{N_+}$ соответственно.

V. При $\lambda \overline{\in} M = \{S_{nj}^{\pm}:\ n = 0,\ 1,\ \ldots,\ N_{\pm},\ j = 1,\ 2\}$ функция $c_{12}(\lambda)\sqrt{F_+^2(\lambda) - 1}\ \varphi_-(\lambda)$ непрерывно дифференцируема по переменной λ. Функции $c_{12}(\lambda)\sqrt{F_+^2(\lambda) - 1}\ m_2^-(\lambda)\varphi_-(\lambda)$ и $c_{21}(\lambda) \times \times \sqrt{F_-^2(\lambda) - 1}\ \varphi_+(\lambda)\, m_1^+(\lambda)$ непрерывны в плоскости λ с разрезами по спектрам σ^+ и σ^- вплоть до границ. Кроме того:

А. Если функция $\tilde{\psi}_1(x, \lambda)$ имеет полюс в точке $\lambda = S_{ki}^+$ ($k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N_+;\ i = 1,\ 2$), то

$$\lim_{\lambda \to S_{ki}^+} \sqrt{\lambda - S_{ki}^+}\, \varphi_-(\lambda)\, c_{12}(\lambda) \left[\frac{c_{11}(\lambda)}{c_{12}(\lambda)} + 1\right] = 0,$$

в противном случае

$$\lim_{\lambda \to S_{kl}^{+}} \sqrt{\lambda - S_{kl}^{+}}\, c_{12}(\lambda)\left[\frac{c_{11}(\lambda)}{c_{12}(\lambda)} + 1\right] = 0.$$

Б. Если функция $\varphi_2(x, \lambda)$ имеет полюс в точке $\lambda = S_{nj}^{-}$ ($n = 0, 1, \ldots, N_-$; $j = 1, 2$), то

$$\lim_{\lambda \to S_{nj}^{-}} \sqrt{\lambda - S_{nj}^{-}}\, c_{21}(\lambda)\left[\frac{c_{22}(\lambda)}{c_{21}(\lambda)} + 1\right]\psi_+(\lambda) = 0,$$

в противном случае

$$\lim_{\lambda \to S_{nj}^{-}} \sqrt{\lambda - S_{nj}^{-}}\, c_{21}(\lambda)\left[\frac{c_{22}(\lambda)}{c_{21}(\lambda)} + 1\right] = 0.$$

Обозначим дискретные собственные значения оператора $L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ через λ_n, а обратные величины норм собственных функций дискретного спектра $\hat{\varphi}_2(x, \lambda_n)$, $\hat{\psi}_1(x, \lambda_n)$ через m_n^+, m_n^-, так что

$$(m_n^+)^{-2} = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}_2(x, \lambda_n)|^2\, dx, \quad (m_n^-)^{-2} = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}_1(x, \lambda_n)|^2\, dx,$$

где

$$\hat{\psi}_1(x, \lambda_n) = \begin{cases} \lim\limits_{\lambda \to \lambda_n} \dfrac{\psi_1(x, \lambda)}{m_2^-(\lambda) - m_1^-(\lambda)}, & \text{если } \lambda_n \text{ — особая точка функции } \tilde{\psi}_1(x, \lambda) \\ \psi_1(x, \lambda_n), & \text{если функция } \tilde{\psi}_1(x, \lambda) \text{ непрерывна в точке } \lambda_n; \end{cases}$$

$$\hat{\varphi}_2(x, \lambda_n) = \begin{cases} \lim\limits_{\lambda \to \lambda_n} \dfrac{\varphi_2(x, \lambda)}{m_2^+(\lambda) - m_1^+(\lambda)}, & \text{если } \lambda_n \text{ — особая точка функции } \tilde{\varphi}_2(x, \lambda) \\ \varphi_2(x, \lambda_n), & \text{если функция } \tilde{\varphi}_2(x, \lambda) \text{ непрерывна в точке } \lambda_n. \end{cases}$$

VI. Оператор L имеет конечное число собственных значений λ_n ($n = 1, 2, \ldots, l$), лежащих в пересечении лакун спектров σ^+ и σ^-, причем

1) если $\varphi_-(\lambda_n) \neq 0$, $\varphi_+(\lambda_n) \neq 0$, то λ_n — простой корень функций $c_{12}(\lambda)$ и $c_{21}(\lambda)$, а нормировки m_n^+, m_n^- связаны соотношением

$$(m_n^-)^{-2} = (m_n^+)^2\,[m_2^+(\lambda_n) - m_1^+(\lambda_n)]^2 \left[\left.\frac{dc_{12}(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_n}\right]^2;$$

2) если $\varphi_-(\lambda_n) = \varphi_+(\lambda_n) = 0$, но функции $\tilde{\psi}_1(x, \lambda)$ и $\tilde{\varphi}_2(x, \lambda)$ непрерывны в точке λ_n, то λ_n — двукратный корень функций $c_{12}(\lambda)$, $c_{21}(\lambda)$ и

$$(m_n^-)^{-2} = (m_n^+)^2 \left[\frac{d}{d\lambda} \{c_{12}(\lambda)[m_2^+(\lambda) - m_1^+(\lambda)]\} \Big|_{\lambda=\lambda_n} \right]^2;$$

3) если $\varphi_-(\lambda_n) \neq 0$, а функция $\tilde{\varphi}_2(x, \lambda)$ имеет полюс в точке λ_n, то λ_n — простой корень функции $c_{12}(\lambda)$, а

$$(m_n^-)^{-2} = (m_n^+)^2 \left[\frac{dc_{12}(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_n} \right]^2;$$

4) если $\varphi_+(\lambda_n) \neq 0$, а функция $\tilde{\psi}_1(x, \lambda)$ имеет полюс в точке λ_n, то λ_n — простой корень функции $c_{21}(\lambda)$ и

$$(m_n^-)^{-2} = (m_n^+)^2 \left[\frac{dc_{21}(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_n} \right]^2;$$

5) если $\varphi_+(\lambda_n) \neq 0$, $\varphi_-(\lambda_n) = 0$, но функция $\tilde{\psi}_1(x, \lambda)$ непрерывна в точке λ_n, то λ_n — простой корень функции $c_{12}(\lambda)$ и двукратный корень функции $c_{21}(\lambda)$, в этом случае

$$(m_n^-)^{-2} = (m_n^+)^2 [m_2^+(\lambda_n) - m_1^+(\lambda_n)]^2 \left[\frac{dc_{12}(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_n} \right]^2;$$

6) если $\varphi_-(\lambda_n) \neq 0$, $\varphi_+(\lambda_n) = 0$, но функция $\tilde{\varphi}_2(x, \lambda)$ непрерывна в точке λ_n, то λ_n — простой корень функции $c_{21}(\lambda)$ и двукратный корень функции $c_{12}(\lambda)$, а

$$(m_n^-)^{-2} = (m_n^+)^2 [m_2^-(\lambda_n) - m_1^-(\lambda_n)]^2 \left[\frac{dc_{21}(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_n} \right]^2;$$

7) если $\varphi_-(\lambda_n) = 0$, но функция $\tilde{\psi}_1(x, \lambda)$ непрерывна в точке λ_n, а функция $\tilde{\varphi}_2(x, \lambda)$ имеет в этой точке полюс, то λ_n — простой корень функций $c_{12}(\lambda)$, $c_{21}(\lambda)$ и

$$(m_n^-)^{-2} = (m_n^+)^2 \left[\frac{dc_{12}(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_n} \right]^2;$$

8) если $\varphi_+(\lambda_n) = 0$, но функция $\tilde{\varphi}_2(x, \lambda)$ непрерывна в точке λ_n, а функция $\tilde{\psi}_1(x, \lambda)$ имеет в точке λ_n полюс, то λ_n — простой корень функций $c_{12}(\lambda)$ и $c_{21}(\lambda)$, кроме того,

$$(m_n^-)^{-2} = (m_n^+)^2 \left[\frac{dc_{21}(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_n} \right]^2;$$

9) если функции $\tilde{\varphi}_2(x, \lambda)$ и $\tilde{\psi}_1(x, \lambda)$ имеют полюсы в точке λ_n, то λ_n — простой корень функций $c_{12}(\lambda)\varphi_-(\lambda)$ и $c_{21}(\lambda)\varphi_+(\lambda)$, а

$$(m_n^-)^{-2} = (m_n^+)^2 \left[\frac{d}{d\lambda} \left\{ \frac{c_{12}(\lambda)}{m_2^-(\lambda) - m_1^-(\lambda)} \right\} \Bigg|_{\lambda=\lambda_n} \right]^2.$$

Используя свойства I — VI элементов матрицы C и соотношения (6) — (9), можно получить приводимые ниже основные интегральные уравнения для ядер $K^+(x, y)$, $K^-(x, y)$ операторов преобразования, позволяющие восстанавливать потенциал $q(x)$ по матрице C и наборам чисел $\{\lambda_n, m_n^+ > 0, m_n^- > 0; \ n = 1, 2, \ldots, l\}$:

$$K^+(x, y) + F^+(x, y) + \int_x^\infty K^+(x, t) F^+(t, y)\, dt = 0, \ y > x, \quad (11)$$

$$K^-(x, y) + F^-(x, y) + \int_{-\infty}^x K^-(x, t) F^-(t, y)\, dt = 0, \ y < x, \quad (12)$$

где

$$F^+(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_{11}(k_+)}{c_{12}(k_+)} \tilde{\varphi}_2(x, k_+) \tilde{\varphi}_2(y, k_+) \rho_+(k_+)\, dk_+ +$$

$$+ \sum_{k=1}^{l} (m_k^+)^2 \hat{\tilde{\varphi}}_2(x, \lambda_k) \hat{\tilde{\varphi}}_2(y, \lambda_k) +$$

$$+ \frac{i}{2\pi} \sum_{n=1}^{N_1} \int_{\Delta_n^\pm} \frac{\tilde{\varphi}_2(x, \lambda) \tilde{\varphi}_2(y, \lambda)\, d\lambda}{|c_{21}(\lambda)|^2 [m_2^-(\lambda^{\text{в}}) - m_1^-(\lambda^{\text{в}})]}; \quad (13)$$

$$F^-(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_{22}(k_-)}{c_{21}(k_-)} \tilde{\psi}_1(x, k_-) \tilde{\psi}_1(y, k_-) \times$$

$$\times \rho_-(k_-)\, dk_- + \sum_{k=1}^{l} (m_k^-)^2 \hat{\tilde{\psi}}_1(x, \lambda_k) \hat{\tilde{\psi}}_1(y, \lambda_k) +$$

$$+ \frac{i}{2\pi} \sum_{n=1}^{N_2} \int_{\Delta_n^\mp} \frac{\tilde{\psi}_1(x, \lambda) \tilde{\psi}_1(y, \lambda)\, d\lambda}{|c_{12}(\lambda)|^2 [m_2^+(\lambda^{\text{в}}) - m_1^+(\lambda^{\text{в}})]}; \quad (14)$$

$$k_\pm = \arcsin\left(i\sqrt{F_\pm^2(\lambda) - 1}\right), \ \rho_\pm(k_\pm) = -\varphi_\pm(k_\pm)/F'_\pm(k_\pm),$$

$$\hat{\tilde{\psi}}_1(x, \lambda) = \begin{cases} \lim\limits_{\mu \to \lambda} \dfrac{\tilde{\psi}_1(x, \mu)}{m_2^-(\mu) - m_1^-(\mu)}, & \text{если } \lambda \text{ — особая точка функции } \tilde{\psi}_1(x, \lambda); \\ \tilde{\psi}_1(x, \lambda), & \text{если функция } \tilde{\psi}_1(x, \lambda) \text{ непрерывна в точке } \lambda; \end{cases}$$

$$\hat{\tilde{\varphi}}_2(x,\lambda)=\begin{cases}\lim\limits_{\mu\to\lambda}\dfrac{\tilde{\varphi}_2(x,\mu)}{m_2^+(\mu)-m_1^+(\mu)}, & \text{если } \lambda \text{ — особая точка функции } \tilde{\varphi}_2(x,\lambda);\\ \tilde{\varphi}_2(x,\lambda), & \text{если функция } \tilde{\varphi}_2(x,\lambda) \text{ непрерывна в точке } \lambda.\end{cases}$$

Аналогично тому, как это сделано в [1], используя уравнения (11), (12), можно установить следующие свойства функций $F^+(x, y)$, $F^-(x, y)$:

VII. Функции $F^+(x, y)$, $F^-(x, y)$ абсолютно непрерывны по каждой переменной при фиксированной другой. Пусть

$$g^\pm(x, y)=\max_{\pm(t_1-x)\geqslant 0,\ \pm(t_2-y)\geqslant 0}|F^\pm(t_1, t_2)|,$$

$$g_i^\pm(t_1, t_2)=\frac{\partial F^\pm(t_1, t_2)}{\partial t_i}\quad i=1, 2.$$

Тогда

А. При всех $d>-\infty$

$$\int\limits_d^\infty g^+(x, y)\,dy=\tilde{g}^+(x)\leqslant C^+(d)$$

$$(1+|x|)\max_{t\geqslant x}\int\limits_x^\infty|g_i^+(t, y)|\,dy\leqslant C^+(d)\ \text{при}\ x\geqslant d$$

$$\int\limits_d^\infty|y||g^+(y, y)|\,dy<\infty;\ \int\limits_d^\infty(1+y^2)\left|\frac{dF^+(y, y)}{dy}\right|dy<\infty$$

и равномерно по $x\geqslant d$

$$\lim_{h\to 0}\max_{t\geqslant x}\int\limits_x^\infty|g_1^+(t+h, y)-g_1^+(t, y)|\,dy=0,$$

$$\lim_{h\to 0}\max_{t\geqslant x}\int\limits_x^\infty|g_2^+(t, y+h)-g_2^+(t, y)|\,dy=0.$$

Б. При всех $d<\infty$

$$\int\limits_{-\infty}^d g^-(x, y)\,dy=\tilde{g}^-(x)\leqslant C^-(d),$$

$$(1+|x|)\max_{t\leqslant x}\int\limits_{-\infty}^x|g_i^-(t, y)|\,dy\leqslant C^-(d)\ \text{при}\ x\leqslant d;$$

$$\int\limits_{-\infty}^d|y|g^-(y, y)\,dy<\infty,\ \int\limits_{-\infty}^d(1+y^2)\left|\frac{dF^-(y, y)}{dy}\right|dy<\infty$$

и равномерно по $x\leqslant d$

$$\lim_{h\to 0}\max_{t\leqslant x}\int\limits_{-\infty}^x|g_1^-(t+h, y)-g_1^-(t, y)|\,dy=0,$$

$$\lim_{h\to 0}\max_{t\leqslant x}\int\limits_{-\infty}^x|g_2^-(t, y+h)-g_2^-(t, y)|\,dy=0.$$

Сформулированные выше условия I — VII полностью определяют данные рассеяния, а именно, справедлива следующая

Теорема. *Для того, чтобы матрица* $C = \| c_{ij}(\lambda) \|_{i,\, j=1,\, 2}$ *и наборы чисел* $\{\lambda_k,\ m_k^{\pm} > 0,\ k = 1, 2, \ldots, l\}$ *являлись данными рассеяния некоторого уравнения* (1) *с вещественным потенциалом* $q(x)$, *удовлетворяющим неравенствам* (2), *необходимо и достаточно, чтобы элементы матрицы* C *обладали свойствами* I — VI, *а функции* $F^{\pm}(x, y)$, *построенные по формулам* (13), (14), *удовлетворяли условию* VII.

Замечание. В случае, когда $q_+(x) = q_-(x)$, возможно безотражательное возмущение, т. е. коэффициент отражения $r^+(\lambda) = c_{11}(\lambda)/c_{12}(\lambda)$ можно положить равным нулю при $\lambda \in \sigma$. При этом функция $F^+(x, y)$ имеет следующий вид:

$$F^+(x, y) = \sum_{k=1}^{l} (m_k^+)^2\, \hat{\tilde{\varphi}}_2(x, \lambda_k)\, \hat{\tilde{\varphi}}_2(y, \lambda_k).$$

Список литературы: 1. *Марченко В. А.* Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения. — К.: Наук. думка, 1977.—358 с. 2. *Ермакова В. Д.* Обратная задача рассеяния для уравнения Шредингера на всей оси с неубывающим потенциалом специального вида. — Вестн. Харьк. ун-та, № 230. Механика, теория управления и математическая физика, 1982, с. 50—60. 3. *Титчмарш Э. Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. II. — М.: Изд-во иностр. лит., 1961.—555 с. 4. *Фирсова Н. Е.* Обратная задача рассеяния для возмущенного оператора Хилла.— Мат. заметки, 1975, 18 : 6, с. 831—843.

Поступила в редколлегию 27.06.83.

УДК 517.9

А. М. БЛОХ

О ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ НА ОДНОМЕРНЫХ РАЗВЕТВЛЕННЫХ МНОГООБРАЗИЯХ. II

Настоящая статья продолжает статью [1]. Обозначения и определения взяты из [1]. Напомним, что многообразиями мы называем одномерные разветвленные многообразия; ниже рассматриваются непрерывные отображения многообразий. В [2] доказаны следующая теорема и следствие.

Теорема I. *Пусть* $f : K \to K$ *транзитивное отображение многообразия*, $\mathrm{Per} f \neq \varnothing$. *Тогда* $K = \bigcup_{i=0}^{n-1} K_i$, *все* K_i *— связные компакты,* $K_i \cap K_j$ *конечно при* $i \neq j$, $fK_i \neq K_{i+1}$ $(0 \leqslant i \leqslant n-2)$, $fK_{n-1} = K_0$, f^n/K_i *обладает свойством спецификации.*

Следствие I. *Пусть* $f : K \to K$ *— транзитивно*, $\mathrm{Per} f \neq \varnothing$. *Тогда:* 1) *семейство* $\{\nu :\ \nu$ *— инвариантная мера*, $\mathrm{supp}\, \nu = \mathrm{orb}\, p$, $p \in \mathrm{Per} f\}$ *плотно в множестве всех инвариантных мер;* 2) *у любой инвариантной меры есть типичная точка;* 3) *семейство инвариантных эргодических неатомических мер с носителем* K *массивно в слабой топологии во всех инвариантных мерах.*

Следствие 2. *Для инвариантной неатомической меры* μ *равносильны такие свойства: а)* $\exists x : \operatorname{supp}\mu \subset \omega(x)$; *б) у* μ *есть типичная точка; в)* μ *можно приблизить эргодическими мерами с носителями на циклах или* $\operatorname{supp}\mu = S(M_i)$ — *окружностное множество.*

Замечание. В настоящее время автором получено доказательство следствия 2 без предположения неатомичности μ.

Доказательство. Можно считать, что

$$\operatorname{supp}\mu \cap \left(\bigcup_{i=1}^{s} S(M_i)\right) = \varnothing,$$

где $\{S(M_i)\}_{i=1}^{s}$ — все окружностные множества. Очевидно, что б) $\Rightarrow$ а). Далее, если $\exists x : \operatorname{supp}\mu \subset \omega(x)$, то по доказанному в [1] нужно рассмотреть два случая: $\operatorname{supp}\mu \subset B(M)$, где M — некоторое инвариантное подмногообразие или $\operatorname{supp}\mu = \Omega_\alpha'$ для некоторого α. Во втором случае ввиду не более, чем двукратного полусопряжения между f/Ω_α' и минимальным сдвигом в компактной абелевой бесконечной группе очевидно, что любая точка Ω_α' типична для μ. Если же $\operatorname{supp}\mu \subset B(M)$, то f/M полно и почти точно на $B(M)$ полусопряжено отображением ψ с транзитивным g: $M \to M$, где $\operatorname{Per} g \neq \varnothing$. Пусть мера μ переходит при этом в g-инвариантную меру $\tilde{\mu}$; у $\tilde{\mu}$ по следствию *1* есть типичная точка $\tilde{x} \in \tilde{M}$. Обе меры μ и $\tilde{\mu}$ в силу условия неатомичны, и так как $\tilde{A} = \{\tilde{y} \in \tilde{M} : \operatorname{card}\{\psi^{-1}(y)\} \geqslant 2\}$ не более, чем счетно, то $\tilde{\mu}(\tilde{A}) = \mu(\psi^{-1}\tilde{A}) = 0$. Значит, если рассмотреть $\tilde{\psi} : \tilde{M} \to M$ со свойством $\psi \circ \tilde{\psi} = \mathrm{id}/\tilde{M}$, то соответствующее $\tilde{\psi}$ отображение $T_{\tilde{\psi}}$ из пространства $\Gamma_{\tilde{M}}$ мер на $\tilde{M}$ в пространство Γ_M мер на M непрерывно в мере $\tilde{\mu}$ [3]. Поэтому, выбирая $\tilde{\psi}$ так, что

$$\{\tilde{\psi}(g^i\tilde{x})\}_{i=0}^{\infty} = \{f^i(\tilde{\psi}(\tilde{x}))\}_{i=0}^{\infty},$$

получим, что типичность x под действием g для $\tilde{\mu}$ влечет типичность $\tilde{\psi}(\tilde{x})$ под действием f для μ, т. е. а) $\Rightarrow$ б).

Покажем, что а) $\Rightarrow$ в). Пусть $\operatorname{supp}\mu = \Omega_\alpha \subset \bigcap_{n \geqslant 0} M_n$, где $M_n = \bigcup_{i=0}^{m_n-1} M_n^{(i)}$, все $M_n^{(i)}$ связны, компактны, попарно не пересекаются, и можно считать, что

$$fM_n^{(i)} = M_n^{(i+1)} \ (0 \leqslant i \leqslant m_n - 2), \ fM_n^{(m_n-1)} = M_n^{(0)},$$

причем $m_n \to \infty$. Для больших n можно считать все $M_n^{(0)}$ дугами, в которых, значит, есть точка $x_n : f^{m_n}x_n = x_n$. Так как все

$\{M_n^{(i)}\}_{i=0}^{m_n-1}$ попарно не пересекаются, то для некоторого

$$c < \infty \sum_{i=0}^{m_n-1} \operatorname{diam} M_n^{(i)} \leqslant c\,(\forall n),$$

что, очевидно, влечет возможность приближения меры μ мерами ν_n: $\operatorname{supp}\nu_n \subset \operatorname{orb} x_n$. Пусть $\operatorname{supp}\mu \subset B(M)$. Пользуясь обозначениями предыдущего абзаца, будем считать, что $\tilde{\nu}_n \to \tilde{\mu}$. Здесь $\operatorname{supp}\tilde{\nu} = \operatorname{orb}_g(\tilde{x}_n)$, где $\tilde{x}_n \in \operatorname{Per} g$, причем период $\tilde{x}_n$ равен q_n. Из неатомичности $\tilde{\mu}$ $q_n \to \infty$, так что можно считать $\psi^{-1}(\tilde{x}_n)$ дугой или точкой, и, пользуясь этим, найти $\tilde{\psi}: \tilde{M} \to M$ так, что $\psi \bigcirc \tilde{\psi} = \mathrm{id}/\tilde{M}$, причем $\tilde{\psi}(\operatorname{orb}_g \tilde{x}_n) = \operatorname{orb}_f x_n$, где $x_n \in \operatorname{Per} f$, период x_n равен q_n. Как и выше, это и [3] влечет, что мера μ аппроксимируется мерами $\nu_n: \operatorname{supp}\nu_n = \operatorname{orb} x_n$, т. е. а) $\Rightarrow$ в).

Пусть верно в), т. е. $\nu_n \to \mu$ (слабо), где $\operatorname{supp}\nu_n = \operatorname{orb}_f x_n$, $x_n \in \operatorname{Per} f$, D — производное множество для $\operatorname{orb} x_n$, т. е.

$$D = \{z : \forall U \ni z\ \exists\ n_k \to \infty : \operatorname{orb} x_{n_k} \cap U \neq \varnothing\}.$$

Тогда, очевидно, $\operatorname{supp}\mu \subset D$; если $z \in \operatorname{supp}\mu$, то для любой окрестности $U \ni z$ $\overline{\operatorname{orb} U} \supset \operatorname{supp}\mu$. Если есть $x \in \operatorname{supp}\mu \cap \Omega''_\alpha \subset \bigcap_{n \geqslant 0} M_n$, то для любого n есть $y_n \in \operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{int} M_n$, откуда $\operatorname{supp}\mu \subset \bigcap_{n\geqslant 0} M_n$, т. е. $\operatorname{supp}\mu = \Omega'_\alpha$ (см. [1]). Значит, т. к. по условию $\operatorname{supp}\mu$ бесконечно и из свойств пролонгации (см. лемму 1 [1]) можно считать, что $\operatorname{supp}\mu \subset \bigcap_{y \in \operatorname{supp}\mu} P(y) = M = \bigcap_{i=0}^{m-1} M^{(i)}$, где $M^{(i)}$ связны, компактны, $fM^{(i)} = M^{(i+1)}$ $(0 \leqslant i \leqslant m-2)$, $fM^{(m-1)} = M^{(0)}$, причем

$$\operatorname{int} M \cap \operatorname{supp}\mu \subset E(M, f/M),$$

и в силу бесконечности $\operatorname{supp}\mu$ окончательно $\operatorname{supp}\mu \subset B(M)$, что и требовалось доказать.

Лемма 1. *Пусть M — замкнутое инвариантное невырожденное подмногообразие в K, $x \in \operatorname{Per} f \cap \partial M$, у x есть сторона T такая, что $M = \bigcap_{V_T(x)} \operatorname{orb} V_T(x)$. Тогда, если $U_M(x)$ — окрестность x в M, то $\overline{\operatorname{orb} U_M(x)} = M$.*

Доказательство. Если для малых $V_T(x)$ $M \supset V_T(x)$ ($\underset{\mathrm{def}}{\equiv}$ сторона T ведет в M), то лемма очевидна. Пусть T не ведет в M, для некоторой $U_M^{(0)}(x)$ $\overline{\operatorname{orb} U_M^{(0)}(x)} \subset M$, n — период x. Выберем у точек $fx, \ldots, f^{n-1}x$ окрестности $U_M^{(1)}(fx)$, $U_M^{(2)}(f^2x), \ldots$, $U_M^{(n-1)}(f^{n-1}x)$ в M так, что

$$fU_M^{(1)}(fx) \subset U_M^{(2)}(f^2x), \ldots, fU_M^{(n-1)}(f^{n-1}x) \subset U_M^{(0)}(f^nx),$$

причем $\bigcup\limits_{i=0}^{n-1} \mathrm{orb}\, U_M^{(i)}(f^i x) \subset M$. Затем выберем у $\mathrm{orb}\, x$ окрестность W так, что $W \cap M \subset \overset{+}{\bigcup\limits_{i=0}^{n-1}} U_M^{(i)}(f^i x) = U$ и для любого y $y \in W \setminus M$, $fy \in W \setminus M, \ldots, f^l y \in W \setminus M$, $f^{l+1} y \in M$ влечет $f^{l+1} y \in U$. Пусть $V_T(x) \subset W$ — малая связная полуокрестность x. Найдется

$$r : f^r V_T(x) \cap (\partial W \setminus M) \neq \varnothing$$

(иначе $\overline{\mathrm{orb}\, V_T(x)} \subset \overline{\mathrm{orb}\, U} \cup W$, а по выбору $\{U_M^{(i)}(f^i x\}_{i=0}^{n-1}$ и W $\overline{\mathrm{orb}\, U} \cup W \not\supset M$, так что $\overline{\mathrm{orb}\, V_T(x)} \not\supset M$ — противоречие). Значит, $\overline{\mathrm{orb}\, V_T(x)} \cap (\partial W \setminus M)$ для любой $V_T(x)$ — противоречие с условием. Лемма доказана.

Введем обозначения. Множество сторон точки x обозначим $\mathrm{Si}\,(x)$. Пусть $f: K \to K$; пара $\underset{\mathrm{def}}{\equiv} \langle p, R \rangle$, где

$$R \in \mathrm{Si}\,(p);\ f \langle p, R \rangle \underset{\mathrm{def}}{\equiv} \{\langle fp, S \rangle : S \in \mathrm{Si}\,(fp),\ S$$

принадлежит образу $R\}$, $\tilde{O}(K, f) \underset{\mathrm{def}}{\equiv} \{x \in K$: есть сторона $T \in \mathrm{Si}\,(x)$: для любой $V_T(x)$ в K $\overline{\mathrm{orb}\, V_T(x)} = K\}$,

$$\tilde{O}_S(K, f) \underset{\mathrm{def}}{\equiv} \{\langle x, T \rangle : \forall V_T(x)\ \overline{\mathrm{orb}\, V_T(x)} = K\}.$$

Ясно, что $\tilde{O}(K, f) \subset E(K, f)$, а если $E(K, f)$ бесконечно, то по утверждению A из доказательства теоремы *2* в [1] $\tilde{O}(K, f) = E(K, f)$. Пусть M — инвариантное многообразие. Если $\tilde{O}(K, f)$ конечно, обозначим его $O(K, f)$. Если ясно, о каком многообразии или отображении идет речь, ссылка на них опускается.

Лемма 2. *Если M — инвариантное подмногообразие, $O(M, f/M) \neq \varnothing$, то $O(M, f/M)$ — цикл.*

Доказательство. Всегда $f/\tilde{O}(M, f/M)$ сюръективно. Действительно, пусть $x \in \tilde{O} = \tilde{O}(M, f/M)$, $T \in \mathrm{Si}\,(x)$ ведет в M, для малых $V_T(x)\ \overline{\mathrm{orb}\, V_T(x)} = M$. Пусть для любого $y \in M$ и любой ведущей в M $S \in \mathrm{Si}\,(y)$ есть $V_S(y): fV_S(y)$ не содержит T — полуокрестности x. Тогда у любого $y \in M$ есть окрестность в M с тем же свойством, откуда, очевидно, $f(M)$ не содержит некоторой T-полуокрестности x — противоречие. Значит, есть ведущая в M сторона S точки $y \in M$ такая, что $\langle x, T \rangle \in f \langle y, S \rangle$, причем $y \in \tilde{O}(M, f/M)$, $fy = x$, $\langle y, S \rangle \in \tilde{O}_S(K, f)$ (из определения). Мы доказали, что в смысле наших определений $\tilde{O}_S(K, f)$ — f^{-1} — инвариантно. Отсюда, если $\tilde{O}(M, f/M) \setminus \mathrm{Per}\, f \neq \varnothing$, то $\tilde{O}(M, f/M)$ бесконечно и совпадает с $E(M, f/M)$. Если же $\tilde{O}(M, f/M) = O$

конечно, то $O = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{orb}\, p_i$, где все $p_i \in \mathrm{Per}\, f$, $\widetilde{O_S}(K, f) = O_S$ конечно. Пусть $<p, R> \in O_S$, $f<p, R>$ содержит $<fp, S>$, $<fp, T>$. Тогда очевидно, в любой полуокрестности $V_R(p)$ есть точки $x_S \neq p$ и $x_T \neq p$ со сторонами Q_S и Q_T такие, что

$$<fp, S> \in f<x_S, Q_S>, <fp, T> \in f<x_T, Q_T> —$$

противоречие с тем, что $O = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{orb}\, p_i$, где $p_i \in \mathrm{Per}\, f$. Отсюда $\mathrm{card}\, \{f<p, R>\} = 1$ ($\forall <p, R> \in O_S$), так что f/O_S — подстановка, и достаточно доказать, что она циклическая.

Пусть $<p, R> \in O_S \setminus \mathrm{orb}_f(<q, S>)$, где $<q, S> \in O_S$. Пусть период $<p, R>$ под действием f есть n, период $<q, S>$ — m. Далее, пусть $V_R^{(0)}(p)$, $W_S^{(0)}(q)$ — малые полуокрестности, $V^{(0)} = \bigcup_{i=0}^{n-1} f^i V_R^{(0)}(p)$, $W^{(0)} = \bigcup_{i=0}^{m-1} f^i W_S^{(0)}(q)$. Тогда, очевидно, $fV^{(0)} \supset V^{(0)}$, $fW^{(0)} \supset W^{(0)}$, причем $fV^{(0)} \setminus V^{(0)}$ состоит из n непересекающихся дуг, $fW^{(0)} \setminus W^{(0)}$ — из m непересекающихся дуг. Из условия есть $x \in V^{(0)}$ такое, что для некоторого l $f^l x \in W^{(0)}$, так что $f^l V^{(0)}$ содержит одну из дуг, составляющих $fW^{(0)} \setminus W^{(0)}$. Из условия очевидно, в ней есть точка y такая, что для некоторого r $f^r y \in V^{(0)}$. Окончательно имеем: есть $z \in V^{(0)}$ такое, что $y = f^l z \in fW^{(0)}$, $f^{l+r} z \in V^{(0)}$. Выбирая $\{V_R^{(j)}(p)\}_{j=0}^{\infty}$ и $\{W_S^{(j)}(q)\}_{j=0}^{\infty}$ так, что $V_R^{(j)}(p)$ сжимаются к p, $W_S^{(j)}(q)$ сжимаются к q, и, рассмотрев

$$\left\{V^{(j)} = \bigcup_{i=0}^{n-1} f^i V_R^{(j)}(p)\right\}_{j=0}^{\infty} \text{ и } \left\{W^{(j)} = \bigcup_{i=0}^{m-1} f^i W_S^{(j)}(q)\right\}_{j=0}^{\infty},$$

найдем по доказанному $z^{(j)} \in V^{(j)}$, $l_j \to \infty$, $r_j \to \infty$ так, что $f^{l_j} z^{(j)} \in W^{(j)}$ (поскольку $fW^{(j)}$ сжимаются к $\mathrm{orb}\, q$ вместе с $W_S^{(j)}(q)$, то можно писать $W^{(j)}$ вместо $fW^{(j)}$) $f^{l_j + r_j}(z^{(j)}) \in V^{(j)}$.

Компактность влечет, что выбирая, если надо, подпоследовательность j, можно найти $\{t_j\}$ так, что $f^{t_j}(z^{(j)}) \to z$ $(t_j \leqslant l_j)$, где $z \in \mathrm{int}\, M \setminus O$. Если любая окрестность $U \ni z$ не есть сильно блуждающая, то $\overline{\mathrm{orb}\, U}$ — инвариантное подмногообразие, содержащее по выбору z некоторую полуокрестность вида $f^i W_S^{(j)}(q)$, т. е. $\overline{\mathrm{orb}\, U} = M$; поэтому если таких z бесконечно много, то есть множество $B(M) \supset O$ — противоречие. Но точек z, для которых найдется (возможно, после выбора подпоследовательности j) последовательность $\{t_j\} : f^{t_j}(z^{(j)}) \underset{j \to \infty}{\to} z (t_j \leqslant l_j)$, очевидно, бесконечно много, так что есть $z = \lim_{j \to \infty} f^{t_j}(z^{(j)}) \in \mathrm{int}\, M \setminus O$ и сильно блуждающая окрестность $U \ni z$. Но отсюда $\omega(z) \supset \mathrm{orb}_f\, p \cup \mathrm{orb}_f\, q$, так что по доказанному в [1] есть базисное множество $B(\widetilde{M}) \supset \mathrm{orb}_f\, p \cup \mathrm{orb}_f\, q$, где $\widetilde{M} \subset M$. Больше того, для j больших $f^{l_j + r_j - t_j}(z)$ лежит в $V^{(j)}$,

а с другой стороны, для N больших $f^N(z) \in \operatorname{int} \widetilde{M}$, так что по свойствам $V^{(l)}$ имеем: $\widetilde{M} = M$, это противоречит условию ввиду существования множества $B(M)$, что и требовалось доказать.

Обозначим $\widetilde{O}'(M, f/M)$ множество, получающееся добавлением к $\widetilde{O}(M, f/M)$ тех точек $x \in (M \cap \Omega(f)) \setminus \widetilde{O}(M, f/M)$, у которых есть сторона S и число n такие, что $f^n \langle x, S \rangle \ni \langle y, T \rangle$, где $\langle y, T \rangle \in \widetilde{O}_S(M, f/M)$. Ясно, что S не ведет в M, так что $\widetilde{O}'(M, f/M) \setminus \widetilde{O}(M, f/M) \subset \partial M$. Далее, если $\bigcap\limits_{n \geqslant 0} M_n$ — сильно соленоидально, то пусть $\Omega''' = \left(\bigcap\limits_{n \geqslant 0} M_n\right) \cap \Omega(f)$.

Лемма 3. *Если $x \in \Omega(f) \setminus \omega(f)$, то либо $x \in \widetilde{O}'(M, f/M)$ для некоторого M, либо $x \in \Omega'''$ для некоторого сильно соленоидального Ω'''.*

Доказательство. Можно считать, что $x \notin \Omega'''$ ни для какого сильно соленоидального Ω'''. Рассмотрим частично упорядоченное по включению семейство A инвариантных подмногообразий $M \ni x$ таких, что если $M = M_1 \cup \ldots \cup M_{l(M)}$ — разложение M на компоненты связности, то можно считать, что $fM_1 \subset M_2, \ldots, fM_{l(M)} \subset M_1$. Из предположения $\max\limits_{M \in A} l(M) = l < \infty$ и A удовлетворяет лемме Цорна, так что в A есть минимальный элемент $\widetilde{M}$, $l(\widetilde{M}) = \tilde{l}$. Пусть $f^n x \in \operatorname{int} \widetilde{M}$. Выберем у $f^n x$ сторону T так, что для любой $V_T(f^n x)$ $\overline{\operatorname{orb} f(V_T(f^n x))} \ni x$, причем есть

$$S \in \operatorname{Si}(x) : \langle f^n x, T \rangle \in f^n \langle x, S \rangle$$

(это возможно, так как $x \in \Omega(f)$). Очевидно, $\overline{\operatorname{orb} f(V_T(f^n x))}$ — подмногообразие, компоненты связности которого циклически переставляются под действием f, так что $\overline{\operatorname{orb} f(V_T(f^n x))} = \widetilde{M}$ для любой $V_T(f^n x) \subset \widetilde{M}$ и $f^n x \in \widetilde{O}(\widetilde{M}, f/\widetilde{M})$, откуда $x \in \widetilde{O}'(\widetilde{M}, f/\widetilde{M})$.

Пусть $\operatorname{orb} x \in \partial \widetilde{M}$. Пусть $n \geqslant 1$ — наименьшее такое, что $f^n x \in \operatorname{Per} f$. Поскольку $x \in \Omega(f)$, то у x есть сторона S, у $f^n x$ — сторона T, причем $f^n \langle x, S \rangle \ni \langle f^n x, T \rangle$ и для любой $V_T(f^n x)$ $x \in \overline{\operatorname{orb} V_T(f^n x)}$. Пусть $M_T = \bigcap\limits_{V_T(f^n x)} \overline{\operatorname{orb} V_T(f^n x)}$. Так как x не принадлежит никакому сильно соленоидальному множеству, то $M_T \in A$. Если T ведет внутрь M_T, то, взяв $M = M_T$, имеем: $f^n x \in \widetilde{O}(M_T, f/M_T)$, и лемма доказана. Если T не ведет внутрь M_T, то по лемме 1 для любой окрестности W точки $f^n x$ в M_T $\overline{\operatorname{orb} W} = M_T$. Значит, у $f^n x$ есть сторона T_1, ведущая внутрь M_T и такая, что $x \in \overline{\operatorname{orb} V_{T_1}(f^n x)}$ для любой $V_{T_1}(f^n x)$; очевидно, можно считать, что

для некоторого N_1 $f^{N_1} <f^n x, T> \ni <f^n x, T_1>$. Для T_1 построим инвариантное подмногообразие $M_{T_1} = \bigcap\limits_{V_{T_1}(f^n x)} \overline{\mathrm{orb}\, V_{T_1}(f^n x)}$, для него повторим проведенные рассуждения и т. д. Окончательно придем к ситуации, когда инвариантное подмногообразие M' содержит x, из точки $f^n x$ внутрь M' ведет сторона T' такая, что для любой полуокрестности

$$V_{T'}(f^n x) \subset M' \ \overline{\mathrm{orb}\, V_{T'}(\overline{f^n x})} = M' \text{ и } f^{N'} <f^n x, T> \ni <f^n x, T'>,$$

откуда $f^{n+N'} <x, S> \ni <f^n x, T'>$, что завершает доказательство.

Пусть $\psi\colon S^1 \to K$ непрерывно; под замкнутой кривой будем понимать $\psi(S^1)$ при условии, что в S^1 нет невырожденных дуг I_1, I_2, где $\psi(I_1) = \psi(I_2)$, $I_1 \cap I_2 = \varnothing$. Перейдем к доказательству конечности семейства $\{O'(M)\}$.

Лемма 4. *Пусть $f: K \to K$ непрерывно, $\tilde{O}(K, f) = O$ конечно, в K нет замкнутой кривой, содержащей полуокрестность вида* $V_S(p)$, где $<p, S> \in \tilde{O}_S(K, f) = O_S$. *Тогда O f^{-1} — инвариантно.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{card}\, O_S = n$, т. е. для любой пары $<p, S> \in O_S$ $f^n <p, S> = <p, S>$ (см. лемму 2, в которой доказано, что в нашем случае f/O_S — циклическая перестановка). Для каждой пары $<q, T> \in O_S$ пусть

$$P(<q, T>) = \bigcap_{V_q(T)} \overline{\mathrm{orb}_{f^n} V_q(T)};$$

тогда ясно, что $P(<q, T>)$ — f^n — инвариантное связное подмногообразие в K и $fP(<q, T>) = P(f <q, T>)$. Пусть $<q, T> \in O_S$, r минимальное положительное такое, что $f^r q \in P(<q, T>)$, причем $q \neq f^r q$ (так что если m — период q, то $r < m$). Значит, всегда $<q', T'> \in O_S$ влечет $P(<q', T'>) \ni f^r q'$, где $f^r q' \neq q'$. Поэтому найдется такое m, что

$$f^r q \in P(<q, T>),\ f^{2r} q \in P(f^r <q, T>),\ \ldots,\ f^{mr} q = \\ = q \in P(f^{(m-1)r} <q, T>),$$

причем $f^{ir} q \neq q\ (1 \leqslant i \leqslant m-1)$.

Выберем дугу γ_0, содержащую T — полуокрестность q и соединяющую q и $f^r q$. Чтобы показать, что это возможно, достаточно показать, что $P(<q, T>)$ не содержит никакой полуокрестности $V_S(q)$, где $S \neq T$. В противном случае для любой $V_T(q)$ есть $N: f^{nN} V_T(q) \cap V_S(q) \neq \varnothing$. Ясно, что при малой $V_T(q)$ $\alpha = f^n(V_T(q)) \setminus V_T(q)$ — дуга, $\beta = \bigcup\limits_{i=0}^{N-1} f^{ni}\alpha$ связно, причем так как $\tilde{O}_S(P(<q, T>), f^n) = <q, T>$, то для некоторой $W_T(q)$ $\beta \cap W_T(q) = \varnothing$, а с другой стороны, $\beta \cap V_S(q) \neq \varnothing$. Отсюда, дополняя β соответствующими S- и T-полуокрестностями q, найдем замкнутую кривую, содержащую T-полуокрестность q — противоречие.

Итак, γ_0 — дуга, содержащая q и f^r и содержащая T-полуокрестность q. Если $f^r <q, T> = <f^r q, T_1>$, то аналогично найдем дугу γ_1, соединяющую $f^r q$ с $f^{2r} q$ и содержащую T_1-полуокрестность $f^r q$ и т. д. Наконец, пусть дуга γ_{m-1} соединяет $f^{(m-1)r} q$, $f^{mr} q = q$ и содержит T_{m-1}-полуокрестность $f^{(m-1)r} q$, где $f^{(m-1)r} <q, T> = <f^{(m-1)r} q, T_{m-1}>$. Тогда ясно, что ни одна дуга $\gamma_i (2 \leqslant i \leqslant m-1)$ не содержит T-полуокрестность q. Дуги $\{\gamma_i\}$ могут пересекаться и не только в своих концах-точках $\{f^{ir} q\}$; пусть $x \in \gamma_i \cap \gamma_j$, причем $i < j$, $x \neq f^{(i+1)r} q$, $x \neq f^{jr} q$ и никакие другие дуги $\gamma_t (i \leqslant t \leqslant j)$ не имеют дополнительных по сравнению с концами точек пересечения (ясно, что такие γ_i, γ_j найдутся). Считая $f^{ir} <q, T> = <f^{ir} q, T_i>$, $f^{jr} <q, T> = <f^{jr} q, T_j>$, имеем: γ_i не содержит некоторой $V_{T_j} (f^{jr} q)$, γ_j не содержит некоторой $V_{T_i} (f^{ir} q)$. Поскольку x можно выбрать так, что δ_i (часть дуги γ_i, соединяющая x и $f^{(i+1)r} q$) не пересекается с γ_j, δ_j (часть дуги γ_j, соединяющая $f^{jr} q$ и x) не пересекается с γ_i, и по выбору γ_i, γ_j получаем, что кривая, составленная из $\delta_i, \gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_{j-1}, \delta_j$ — замкнутая кривая, содержащая, например, T_{i+1}-полуокрестность $f^{r(i+1)} q$ (где $f^{(i+1)r} <q, T> = <f^{(i+1)r} q, T_{i+1}>$) — противоречие. Если же дуги $\{\gamma_i\}$ попарно пересекаются лишь в своих концах, то $\gamma = \bigcup_{i=0}^{m-1} \gamma_i$ — замкнутая кривая, содержащая T-полуокрестность q, что противоречит условию. Значит, $q = f^r q$.

Пусть $x \in K$, $f^n (x) = q \in O$. Тогда, так как при $<q', T'> \in O_S$ $f^n P (<q', T'>) = P (<q', T'>)$, из доказанного $x \in P (<q, T>)$ для некоторой пары $<q, T> \in O_S$. Но $P (<q, T>)$ не содержит по доказанному некоторого множества вида $W = \bigcup_{S \in \mathrm{Si}(q),\, S \neq T} W_S (q)$, откуда следует, что есть точка $x' \in P (<q, T>)$ и сторона $S' \in \mathrm{Si} (x')$ такие, что $f^n <x', S'> = <q, T>$, $x' \neq q$, а это противоречит тому, что $\tilde{O} (P (<q, T>), f^n) = q$. Лемма доказана.

Итак, каждому конечному множеству $O (M)$, которое не является $(f/M)^{-1}$-инвариантным, соответствует замкнутая кривая $\gamma (M)$, причем разным $O (M)$ соответствуют разные $\gamma (M)$. Всего разных замкнутых кривых (в смысле нашего определения) у K — конечное число. Далее, если есть множество $O' (M)$, то $O (M)$ не $(f/M)^{-1}$ — инвариантно; значит, число множеств $O' (M)$ не больше числа $o (K)$ разных замкнутых кривых в K; с учетом теоремы 4 из [1] получаем теперь следующую теорему (напомним, что X_f — объединение всех максимальных по включению среди ω — предельных множеств циклов).

Теорема 2. *Существует не более, чем счетное семейство пар множеств* $\{B (M_i) = B_i \subset B' (M_i) = B'_i\}_{i=1}^{b}$, *конечное семейство пар множеств* $\{S (\tilde{M}_i) = S_i \subset S' (\tilde{M}_i) = S'_i\}_{i=1}^{s}$, *конечное семейство множеств* $\{O' (\hat{M}_i)\}_{i=1}^{q} = \{O'_i\}_{i=1}^{q}$ *и семейство троек сильно соленоидаль-*

ных множеств $\{\Omega'_\alpha \subset \Omega''_\alpha \subset \Omega'''_\alpha\}_{\alpha\in A}$, *где* $\Omega'''_\alpha \neq \Omega'_\alpha$ *для не более, чем счетного набора индексов, такие, что:*

$$1)\ \operatorname{Per} f = \left(\bigcup_{i=1}^{b} B_i\right) \cup \left(\bigcup_{\alpha\in A} \Omega'_\alpha\right) \cup X_f;$$

$$C(f) = \left(\bigcup_{i=1}^{b} B_i\right) \cup \left(\bigcup_{\alpha\in A} \Omega'_\alpha\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{s} S_i\right) \cup X_f;$$

$$\omega(f) = \left(\bigcup_{i=1}^{b} B_i\right) \cup \left(\bigcup_{\alpha\in A} \Omega''_\alpha\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{s} S_i\right) \cup X_f;$$

$$\Omega(f) = \left(\bigcup_{i=1}^{b} B'_i\right) \cup \left(\bigcup_{\alpha\in A} \Omega'''_\alpha\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{s} S'_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{q} O_i\right) \cup X_f; .$$

2) *существуют зависящие только от топологии* K *числа* $s(K)$, $o(K)$ и $c(K)$ *такие, что* $s \leqslant s(K)$, $q \leqslant o(K)$, *пересечение в нашем разложении* $\Omega(f)$ *возможно лишь между множествами* B'_i, O'_i *конечно и никакие* $c(K)$ *множеств разложения не пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Часть пункта 1), не относящаяся к $\Omega(f)$, доказана [1, теорема 4]. Там же доказано, что если $s(K)$ — максимальное число попарно не пересекающихся замкнутых кривых в K, то $s \leqslant s(K)$. Из рассуждений, проведенных перед теоремой 2, следует, что если $o(K)$ — максимальное число попарно различных замкнутых кривых в K, то $q \leqslant o(K)$. Часть пункта 1), относящаяся к $\Omega(f)$, следует из леммы 3. Далее, свойства сильно соленоидальных множеств Ω'''_α и окружностных множеств влекут, что пересечение между ними и другими элементами разложения невозможно. Так как $\Omega'''_\alpha \cap \operatorname{Per} f = \varnothing$, $S'_i \cap \operatorname{Per} f = \varnothing$, то достаточно рассмотреть случай пересечения с B_i, а оно невозможно, поскольку по определению никакой $x \in B'_i$ не может лежать в $\bigcap_{n\geqslant 0} M_n$, порождающем Ω'''_α или в $\widetilde{M}_i$, порождающем $S(M_i)$.

Пусть $c(K) - 1$ — максимальное число сторон у точки $x \in K$. Если x принадлежит пересечению некоторых множеств B'_i или O'_i, то рассматривая $x' = f^N x$ для достаточно большого N, имеем: x' принадлежит пересечению множеств B_i и O_i. Но из их свойств следует, что каждому B_i или O_i соответствует сторона $S \in \operatorname{Si}(x')$ такая, что для любой $V_S(x')$ $\overline{\operatorname{orb} V_S(x')}$ совпадает с подмногообразием, порождающим соответствующее B_i или O_i. Значит, разным множествам соответствуют разные стороны x, а всего их не больше $c(K) - 1$, что и требовалось доказать.

Как обычно, кусочно-монотонным назовем непрерывное отображение f многообразия K в себя, для которого есть разложение K на связные множества $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ такие, что f/γ_i монотонно (т. е. для любого x множество $f^{-1}(x) \cap \gamma_i$ связно). В этом

случае в теореме 2 можно сделать уточнение. Если f/M монотонно, где $M = \bigcup\limits_{i=0}^{n-1} M^{(i)}$ и $M^{(0)}$ — дуга, то $f^n : M^{(0)} \to M^{(0)}$ монотонно, что в силу свойств отображений отрезка влечет отсутствие у f/M сильно соленоидальных множеств. Значит, если $\bigcap\limits_{n\geqslant 0} M_n$ сильно соленоидально, то f/M_n не монотонно $(\forall n)$, т. е. всегда есть компоненты M_n, на каждой из которых f не монотонно. Обозначая их объединение M_n', имеем:

$$M_n' \supset M_{n+1}' \neq \varnothing \ (\forall n) \Rightarrow \bigcap_{n\geqslant 0} M_n' \neq \varnothing,$$

т. е. есть $x \in \bigcap\limits_{n\geqslant 0} M_n^{(i_n)}$, где $f/M_n^{(i_n)}$ не монотонно $(\forall n)$. Значит, если K представлено в виде объединения дуг $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ так, что f/γ_j монотонно $(1 \leqslant j \leqslant m)$ и множество концов этих дуг имеет минимальную по всем таким представлениям мощность $m(f)$, то $\bigcap\limits_{n\geqslant 0} M_n^{(i_n)}$ содержит один из таких концов, откуда следует, что у f — не более $m(f)$ сильно соленоидальных множеств.

Второе уточнение сформулируем как

Утверждение 1. *Пусть $f: K \to K$ транзитивно, кусочно-монотонно,* $\mathrm{Per} f \neq \varnothing$. *Тогда на K можно задать длину l так, что если γ связно и f/γ монотонно, то $l(f(\gamma)) = e^{h/f} l(\gamma)$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $\psi : K \to [0, 1]$, биективное и кусочно-разрывное. Очевидно, что $g = \psi_0 f_0 \psi^{-1} : [0, 1] \to [0, 1]$ транзитивно, кусочно-разрывно и кусочно-монотонно. Больше того, по доказанному в [2] есть n и $\widetilde{K} \subset K : f^n \widetilde{K} = \widetilde{K}$, $f^n/\widetilde{K}$ обладает свойством спецификации, из которого, как известно, следует $h(f) > 0$. Значит, у f есть инвариантная мера μ с $h_\mu(f) > 0$; очевидно тогда, что и у g есть инвариантная мера ν с $h_\nu(g) > 0$. В силу доказанного в [4] (см. также [5]) это влечет, что g сопряжено с помощью φ с отображением постоянного угла наклона $\widetilde{g}[0, 1] \to [0, 1]$ причем для любого интервала монотонности $\widetilde{g}I$ имеем: $\lambda(\widetilde{g}I) = e^{h(\widetilde{g})}\lambda(I) = e^{h(f)}\lambda(I)$, где λ — мера Лебега на $[0, 1]$, $h(\widetilde{g}) = \sup h_\nu(\widetilde{g})$ по всем $\widetilde{g}$ — инвариантным мерам ν, так что из свойств энтропии действительно $h(f) = h(\widetilde{g})$. Т. к. φ — гомеоморфизм, то $\varphi \circ \psi$ кусочно-разрывно и биективно. «Возвращая» меру Лебега λ с $[0, 1]$ на K с помощью $(\varphi \circ \psi)^{-1}$, получим меру l на K, обладающую, очевидно, требуемым свойством.

Утверждение 1 уточняет теорему 2 для кусочно-монотонных f, т. к. показывает, что в этом случае «модельные» (см. [1, теорема 2]) для f/B_i транзитивные отображения многообразий с циклами можно считать имеющими постоянный коэффициент растяжения.

Список литературы: 1. *Блох А. М.* О динамических системах на одномерных разветвленных многообразиях. 1. — Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1986, вып. 46, с. 20—25. 2. *Блох А. М.* О транзитивных отображениях одномерных разветвленных многообразий. — В кн.: Дифференциально-разностные уравнения и задачи математической физики: Тр. ин-та мат. АН УССР. К., 1984, с. 3—11. 3. *Биллингсли П.* Сходимость вероятных мер. — М.: Наука, 1977. — 352 с. 4. *Parry W.* Symbolic dynamics and transformations of the interval. — Trans. Amer. Math. Soc., 1966, **22**, p. 368—378. 5. Hofbauer F., Keller G. Ergodic properties of invariant measures for piecewise monotonic transformations. — Math. Zeit., 1982, 180, № 1, p. 119—140.

Поступила в редколлегию 14.06.84.

УДК 517.98

М. М. ПОПОВ

ИЗОМОРФНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ $L_p(\mu)$ ПРИ $0<p<1$

Исследуются некоторые свойства подпространств и факторпространств $L_p(\mu)$ при $0 < p < \infty$ для конечных положительных безатомных мер μ. В частности, доказано, что если X — собственное (замкнутое) подпространство $L_p = L_p\{-1, 1\}^M$, $0 < p < 1$, M — бесконечное множество, то $\dim L_p/X$ (наименьшая мощность подмножеств с плотной линейной оболочкой) факторпространства L_p/X равна мощности $\overline{\overline{M}}$ множества M. На основе этого доказано, что для безатомных измеримых пространств $<\Omega_i, \sigma_i, \mu_i>$, $i = 1, 2$ и $0 < p < 1$ пространства $L_p(\mu_1)$ и $L_p(\mu_2)$ изоморфны тогда и только тогда, когда разложения Магарам исходных измеримых пространств совпадают.

Рассуждения проводятся для действительного и для комплексного поля скаляров.

Каноническим представителем измеримого пространства с $\dim L_p(\mu) = \tau$ при $0 < p < \infty$ является тройка

$$D^M = <\{-1, 1\}^M, \sigma_M, \mu_M>,$$

где M — произвольное множество мощности τ; σ_M определяется как борелевская σ-алгебра подмножеств декартовой степени $\{-1, 1\}^M$, наделенной тихоновской топологией степени двухэлементного дискретного топологического пространства $\{-1, 1\}$; μ_M — соответствующая степень меры μ_0 на подмножествах $\{-1, 1\}$:

$$\mu_0\{-1\} = \mu_0\{1\} = 1/2.$$

По-другому, μ_M — есть мера Хаара на компактной абелевой группе $\{-1, 1\}^M$ с поточечным произведением.

Приведем одно следствие теоремы Д. Магарам [1, 2, с. 127].

Теорема 0. *Всякое пространство $L_p(\mu)$ при $0 < p \leqslant \infty$ изометрично конечной или счетной p-сумме*

$$\Big(\sum_n L_p\{-1, 1\}^{M_n}\Big)_p,$$

где $\{M_n\}_n$ — некоторые бесконечные множества, причем набор мощностей $\{\overline{\overline{M}}_n\}_n$ определяется исходным измеримым пространством (не зависимо от p) и называется разложением Магарам измеримого пространства (очевидно, можно считать, что среди $\{M_n\}_n$ нет двух равномощных множеств).

Известна следующая изоморфная классификация пространств $L_p(\mu)$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Теорема (*И. Линденштраус* [2, с. 130]). *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $p \neq 2$; N_1 *и* N_2 — *конечные или счетные подмножества натурального ряда;* $\{M_n^{(i)}\}_{n \in N_i}$, $i = 1, 2$ — *бесконечные множества. Пространства*

$$\left(\sum_{n \in N_i} L_p\{-1, 1\}^{M_n^{(i)}}\right)_p, \ i = 1, 2$$

изоморфны тогда и только тогда, когда

$$\sup\{\overline{\overline{M}}_n^{(1)} : n \in N_1\} = \sup\{\overline{\overline{M}}_n^{(2)} : n \in N_2\},$$

и либо оба множества $\{\overline{\overline{M}}_n^{(i)} : n \in N_i\}$, $i = 1, 2$ *содержат максимальный элемент, либо оба не содержат.*

Таким образом, если τ — несчетноконфинальная мощность (т. е. не равна счетной сумме меньших мощностей) и

$$\dim L_p(\mu_i) = \tau, \ i = 1, 2,$$

то $L_p(\mu_1)$ изоморфно $L_p(\mu_2)$ при $1 \leqslant p < \infty$. Если же $\tau = \sum_n \tau_n$, где $\tau_n < \tau$, то при $p \neq 2$ существует ровно два неизоморфных $L_p(\mu_i)$, $i = 1, 2$ с $\dim L_p(\mu_i) = \tau$, $i = 1, 2$, именно

$$L_p\{-1, 1\}^M \text{ и } \left(\sum_{n=1}^{\infty} L_p\{-1,1\}^{M_n}\right)_p,$$

где $\overline{\overline{M}} = \tau$ и $\overline{\overline{M}}_n = \tau_n$.

Теорема (*Х. П. Розенталь* [3]). $L_\infty(\mu_1)$ *изоморфно* $L_\infty(\mu_2)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\dim L_1(\mu_1) = \dim L_1(\mu_2).$$

Основным приемом нашего подхода является рассмотрение следующего понятия.

Определение. *Пусть* $<\Omega, \sigma, \mu>$ — *измеримое пространство,* $0 < p < \infty$. *Подпространство* $X \subset L_p(\mu)$ *назовем богатым, если для любого* $A \in \sigma$ и *любого* $\varepsilon > 0$ *существуют*

$$x \in X \text{ и } y \in L_p(\mu)$$

такие, что $y^2 = \chi_A$ (χ_A — *характеристическая функция множества* A), $\|x - y\|_p < \varepsilon$ *и*

$$\mu\{t : y(t) = -1\} = \mu\{t : y(t) = 1\}.$$

При $0 < p < 1$ обозначаем

$$\|x\|_p = \int_\Omega |x(t)|^p \, d\mu(t),$$

так что $\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$ и при $0 < p < 1$.

Для удобства всюду в дальнейшем будем считать $L_p\{-1, 1\}^{M_n}$ подпространством $(\sum_n L_p\{-1, 1\}^{M_n})_p$.

Следующее предложение хорошо известно; его можно вывести из теоремы Магарам, однако мы приведем элементарное доказательство.

Лемма 1. *Пусть* $A \subset \{-1, 1\}^M$ — *измеримое подмножество,* $\mu(A) > 0$. *Существует система функций* $\{r_m\}_{m\in M} \subset L_\infty\{-1, 1\}^M$ *со свойствами:*

(I) $r_m^2 = \chi_A$;

(II) $\int r_m d\mu = 0$;

(III) $\mu\left\{t : \frac{r_{m_1} - r_{m_2}}{2} = 1\right\} = \mu\left\{t : \frac{r_{m_1} - r_{m_2}}{2} = -1\right\} = \frac{\mu(A)}{4}$

и

$$\mu\left\{t : \frac{r_{m_1} - r_{m_2}}{2} = 0\right\} = \frac{\mu(A)}{2}$$

для любых $m, m_1, m_2 \in M$; $m_1 \neq m_2$.

Доказательство. В случае, когда M счетно, лемму легко доказать с помощью последовательного деления множества A на подмножества равной меры и построении функций, аналогичных системе Радемахера. Говорят, что измеримая функция $x \in L_0\{-1, 1\}^M$ зависит от координаты $m_1 \in M$, если сужения

$$x(\{t_m\}_{m\in m})|_{t_{m_1}=1} \neq x(\{t_m\}_{m\in M})|_{t_{m_1}=-1}$$

на множестве положительной меры как элементы $L_0\{-1, 1\}^{M\setminus\{m_1\}}$. Хорошо известно (и легко видеть), что измеримая функция зависит от не более чем счетного множества координат.

Пусть M несчетно и пусть M_0 — множество всех координат, от которых зависит χ_A. Тогда $M_1 = M\setminus M_0$ равномощно M. Пусть $f: M \to M_1$ — биекция. Для каждого $m_1 \in M_1$ обозначим через $r_{m_1}^{(1)}$ функцию Радемахера на $\{-1, 1\}^M$:

$$r_{m_1}^{(1)}(\{t_m\}_{m\in M}) = t_{m_1}.$$

Наконец, положим $r_m = \chi_A r_{m_1}^{(1)}$, где $m_1 = f(m)$. Проверка свойств (I) — (III) проста и использует тот факт, что χ_A не зависит от m_1 при $m_1 \in M_1$.

Теорема 2. *Пусть* X — *подпространство*

$$L_p = \Big(\sum_{n\in N_0} L_p\{-1, 1\}^{M_n}\Big)_p, \quad 0 < p < \infty,$$

N_0 — *конечное или бесконечное подмножество натурального ряда* N; M_n *бесконечны. Пусть* $n \in N_0$ *таково, что* $\operatorname{codim} X < \overline{\overline{M}}_n$ *(через* $\operatorname{codim} X$ *будем обозначать* $\dim L_p/X$*). Тогда для каждого измеримого подмножества* $A \subset \{-1, 1\}^{M_n}$ и $\varepsilon > 0$ *существуют* $x \in X$ и $y \in L_p\{-1, 1\}^{M_n}$ *такие, что* $y^2 = \chi_A$, $\|x - y\| < \varepsilon$ *и*

$$\mu\{t \in \{-1, 1\}^{M_n} : y(t) = 1\} = \mu\{t \in \{-1, 1\}^{M_n} : y(t) = -1\}.$$

Доказательство. В случае $\mu(A)=0$ полагаем $x=y=0$. Пусть $\mu(A)>0$ Согласно лемме 1, существует система функций $\{r_m^{(1)}\}_{m\in M_n}$, удовлетворяющая (I) — (III). Далее, существуют такие $m_1^{(1)}$, $m_2^{(1)}\in M_n$ и $x_1\in X$, что для $y=\left(r_{m_1^{(1)}}^{(1)}-r_{m_2^{(1)}}^{(1)}\right)/2$ верно $\|x_1-y_1\|<\varepsilon/2$, поскольку в противном случае система $\{Tr_m^{(1)}\}_{m\in M_n}$ (T — факторотображение L_p на L_p/X) образовывала бы в L_p/X изолированное множество точек, удаленных друг от друга на расстояние, не меньшее $\varepsilon/2$, что противоречит предположению $\operatorname{codim} X<\overline{\overline{M}}_n$ (в случае конечного $\operatorname{codim} X$ последнее противоречит компактности единичного шара в L_p/X). Обозначим $B_1=\operatorname{supp} y_1$ и $A_1=A\setminus B_1$. Тогда

$$y_1^2=\chi_{B_1} \text{ и } \mu(A_1)=\mu(A)/2.$$

Аналогично поступаем с множеством A_1, выбрав

$$x_2\in X \text{ и } y_2\in L_p\{-1,\ 1\}^{M_n}$$

так, чтобы $\|x_2-y_2\|<\varepsilon/4$ и для $B_2=\operatorname{supp} y_2$ было выполнено $y_2^2=\chi_{B_2}$ и

$$\mu(B_2)=\mu(A_1\setminus B_2)=\mu(B_1)/2=\mu(A)/4.$$

Продолжая процесс построения x_n и y_n очевидным образом, получим

$$y^2=\left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n\right)^2=\chi_A \text{ и } \left\|\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)\right\|<\varepsilon.$$

Условие

$$\mu\{t: y(t)=1\}=\mu\{t: y(t)=-1\}$$

следует из построения.

Следствие 3. *Пусть X — подпространство*

$$L_p=\left(\sum_{n\in N_0} L_p\{-1,\ 1\}^{M_n}\right)_p,\quad 0<p<\infty,\ N_0\subset N \text{ и } M_n$$

бесконечны. Если $\operatorname{codim} X<\min\{\overline{\overline{M}}_n: n\in N_0\}$, то X — богатое подпространство. В частности, подпространство $X\subset L_p\{-1,\ 1\}^M$ является богатым, если $\operatorname{codim} X<\overline{\overline{M}}$.

Теорема 4. *Пусть $0<p<1$ и X — подпространство*

$$L_p=\left(\sum_{n\in N_0} L_p\{-1,\ 1\}^{M_n}\right)_p.$$

Если $n\in N_0$ таково, что для любого измеримого подмножества $A\subset\{-1,\ 1\}^{M_n}$ и любого $\varepsilon>0$ существуют $x\in X$ и $y\in L_p\{-1,\ 1\}^{M_n}$ такие, что $y^2=\chi_A$, $\|x-y\|<\varepsilon$ и

$$\mu\{t\in\{-1,\ 1\}^{M_n}: y(t)=1\}=\mu\{t\in\{-1,\ 1\}^{M_n}: y(t)=-1\},$$

то $L_p\{-1,\ 1\}^{M_n}\subset X$.

Доказательство. Докажем, что $\chi_A \in X$ для любого измеримого подмножества $A \subset \{-1, 1\}^{M_n}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем $x_1 \in X$ и $y_1 \in L_p\{-1, 1\}^{M_n}$ так, чтобы $y_1^2 = \chi_A$, $\|x_1 - y_1\| < \varepsilon/4$ и

$$\mu\left(y_1^{-1}\{1\}\right) = \mu\{t \in \{-1, 1\}^{M_n} : y_1(t) = 1\} = \frac{1}{2}\mu(A)$$

и положим $A_1 = y_1^{-1}\{-1\}$. По индукции выбираем $y_{n+1} \in L_p\{-1, 1\}^{M_n}$ и $x_{n+1} \in X$ так, чтобы

$$y_{n+1}^2 = \chi_{A_n};\ \|x_{n+1} - y_{n+1}\| < 2^{-(n+2)-np}\cdot\varepsilon \text{ и } \mu\left(y_{n+1}^{-1}\{1\}\right) = \mu(A_n)/2$$

и положим $A_{n+1} = y_{n+1}^{-1}\{-1\}$. Индукцией по n легко доказать, что

$$\chi_A - \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} y_k = 2^n \cdot \chi_{A_n} \text{ и } \mu(A_n) = 2^{-n}\cdot\mu(A)$$

для любого n. Поэтому

$$\left\|\chi_A - \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\cdot x_k\right\| \leqslant \|2^n\cdot\chi_{A_n}\| + \left\|\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}(x_k - y_k)\right\| \leqslant$$

$$\leqslant 2^{np}\mu(A_n) + \frac{\varepsilon}{2} = (2^{p-1})^n\cdot\mu(A) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

для достаточно большого n. В силу произвольности ε и замкнутости X, $\chi_A \in X$. ■

Следствие 5. *Пусть* $0 < p < 1$ *и* X — *подпространство*

$$L_p = \left(\sum_{n \in N_0} L_p\{-1, 1\}^{M_n}\right)_p.$$

Пусть $n \in N_0$ *таково, что* $\operatorname{codim} X < \overline{\overline{M}}$. *Тогда*

$$L_p\{-1, 1\}^{M_n} \subset X.$$

Для доказательства следует воспользоваться теоремами 2 и 4.

Следствие 6. *Пусть* $0 < p < 1$. *Если* X — *богатое подпространство* $L_p(\mu)$, *то* $X = L_p(\mu)$.

Следующее предложение усиливает основной результат [4].

Следствие 7. *Пусть* $0 < p < 1$. *Если* X — *собственное подпространство*

$$L_p = \left(\sum_{n \in N_0} L_p\{-1, 1\}^{M_n}\right)_p \ (\text{т. е. } X \neq L_p),$$

то $\operatorname{codim} X \geqslant \min\{\overline{\overline{M}}_n : n \in N_0\}$. *В частности, если* X — *собственное подпространство* $L_p\{-1, 1\}^M$, *то* $\operatorname{codim} X = \overline{\overline{M}}$.

Теорема 8. *Пусть* X — *собственное подпространство*

$$L_p = \left(\sum_{n \in N_0} L_p\{-1, 1\}^{M_n}\right)_p, \ 0 < p < 1.$$

Обозначим через Λ *множество всех мощностей, являющихся не*

более, чем счетными суммами мощностей вида $\overline{\overline{M}}_n$, $n \in N_0$ *(в частности,* $\overline{\overline{M}}_n \in \Lambda$ *при* $n \in N_0$*). Тогда* $\operatorname{codim} X \in \Lambda$. *Обратно, если* $\lambda \in \Lambda$, *то существует подпространство* $X \subset L_p$ *такое, что* $\operatorname{codim} X = \lambda$.

Доказательство. Согласно следствию 5, если

$$\operatorname{codim} X < \overline{\overline{M}}_n, \text{ то } L_p\{-1, 1\}^{M_n} \subset X.$$

Положим

$$N_1 = \{n \in N_0 : \operatorname{codim} X < \overline{\overline{M}}_n\}.$$

Тогда

$$Y = \Big(\sum_{n \in N_1} L_p\{-1, 1\}^{M_n}\Big)_p \subset X.$$

Следовательно,

$$\operatorname{codim} X \leqslant \operatorname{codim} Y = \sum_{n \in N_0 \setminus N_1} \overline{\overline{M}}_n.$$

С другой стороны, $\overline{\overline{M}}_n \leqslant \operatorname{codim} X$ при $n \in N_0 \setminus N_1$, следовательно, $\sum_{n \in N_0 \setminus N_1} \overline{\overline{M}}_n \leqslant \operatorname{codim} X$. Итак,

$$\operatorname{codim} X = \sum_{n \in N_0 \setminus N_1} \overline{\overline{M}}_n \in \Lambda.$$

Пусть $\lambda \in \Lambda$, $\lambda = \sum_{n \in N_1} \overline{\overline{M}}_n$ для некоторого $N_1 \subset N_0$. Тогда

$$\operatorname{codim}\Big(\sum_{n \in N_0 \setminus N_1} L_p\{-1, 1\}^{M_n}\Big)_p = \lambda. \ \blacksquare$$

Теорема 9. *Пусть* $0 < p < 1$,

$$L_p(\mu) = \Big(\sum_{n \in N_0} L_p\{-1, 1\}^{M_n}\Big)_p, \quad n_0 \in N_0 \text{ и } N_1 = \{n \in N_0 : \overline{\overline{M}}_n \geqslant \overline{\overline{M}}_{n_0}\}.$$

Если $U : L_p \to L_p$ *— изоморфизм, то подпространство*

$$X = \Big(\sum_{n \in N_1} L_p\{-1,1\}^{M_n}\Big)_p$$

неподвижно относительно U *(т. е.* $UX = X$*).*

Доказательство. Сначала докажем более слабое утверждение: именно, что неподвижно

$$X' = \Big(\sum_{n \in N_1'} L_p\{-1, 1\}^{M_n}\Big)_p,$$

где

$$N_1' = \{n \in N_0 : \overline{\overline{M}}_n > \overline{\overline{M}}_{n_0}\}$$

(это утверждение слабее, поскольку если N_1' непусто и $\overline{\overline{M}}_{n_1}$ непосредственно следует за $\overline{\overline{M}}_{n_0}$ в ряду $\{\overline{\overline{M}}_n : n \in N_0\}$, то

$$N_1' = \{n \in N_0 : \overline{\overline{M}}_n \geqslant \overline{\overline{M}}_{n_1}\}).$$

Действительно, поскольку

$$\operatorname{codim} UX' = \operatorname{codim} U^{-1}X' = \sum_{n \in N_0 \setminus N_1'} \overline{\overline{M}}_n \leqslant \overline{\overline{M}}_{n_0} < \overline{\overline{M}}_{n_1}$$

при $n_1 \in N_1'$, то, согласно следствию 5,

$$X' \subset UX' \text{ и } X' \subset U^{-1}X',$$

откуда $X' = UX'$.

Для доказательства теоремы заметим, что если N_1 не представимо в виде $\{n \in N_0 : \overline{\overline{M}}_n > \overline{\overline{M}}_{n_1}\}$, где $n_1 \in N_0$, то существуют $\{n_k\}_{k=2}^{\infty} \subset N_0$ такие, что $\overline{\overline{M}}_{n_k} < \overline{\overline{M}}_{n_{k+1}}$ для любого $k \geqslant 2$, причем $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \overline{\overline{M}}_{n_k} = \overline{\overline{M}}_{n_0}$. Положим

$$N_k = \{n \in N_0 : \overline{\overline{M}}_n > \overline{\overline{M}}_{n_k}\}; \quad X_k = \left(\sum_{n \in N_k} L_p \{-1, 1\}^{M_n}\right)_p$$

при $k \geqslant 2$. Тогда $N_1 = \bigcap\limits_{k=2}^{\infty} N_k$, следовательно, $X = \bigcap\limits_{k=2}^{\infty} X_k$. Однако, согласно доказанному выше, $UX_k = X_k$ для любого $k \geqslant 2$. Итак, $UX = X$. ■

Замечание. Если $\overline{\overline{M}}_{n_0}$ — не наибольшая из всех мощностей $\overline{\overline{M}}_n$, $n \in N_0$, то теорема 9 перестает быть верной при замене знака в неравенстве на противоположный:

$$N_1 = \{n \in N_0 : \overline{\overline{M}}_n \leqslant \overline{\overline{M}}_{n_0}\}.$$

Доказательство. Положим

$$N_1' = N_0 \setminus N_1 = \{n \in N_0 : \overline{\overline{M}}_n > \overline{\overline{M}}_{n_0}\}.$$

Пусть T — произвольный ненулевой линейный непрерывный оператор из

$$L_p(\mu_1) = \left(\sum_{n \in N_1} L_p \{-1, 1\}^{M_n}\right)_p \text{ в } L_p(\mu_2) = \left(\sum_{n \in N_1'} L_p \{-1, 1\}^{M_n}\right)_p$$

(таковой существует, так как $L_p\{-1, 1\}^{M_{n_0}}$ изоморфно подпространству $L_p(\mu_2)$ в силу того, что $n_0 \in N_1$; $\overline{\overline{M}}_n > \overline{\overline{M}}_{n_0}$ при $n \in N_1'$ и N_1' непусто, согласно условию). Положим

$$Y = \{x + Tx : x \in L_p(\mu_1)\}.$$

Тогда, как нетрудно видеть, $L_p(\mu) = Y \oplus L_p(\mu_2)$. Поскольку Y и $L_p(\mu_1)$ дополняют $L_p(\mu_2)$ до $L_p(\mu)$, то они изоморфны. Пусть

$U_1 : L_p(\mu_1) \to Y$ — изоморфизм, I — единичный оператор в $L_p(\mu_2)$. Тогда $U = U_1 \oplus I$ — изоморфизм $L_p(\mu)$ на себя, а поскольку T — ненулевой оператор, то $Y \neq L_p(\mu_1)$, следовательно, $L_p(\mu_1)$ не является неподвижным относительно U. ■

Теорема 10. *Пусть $0 < p < 1$ и существует ненулевой линейный непрерывный оператор T из $L_p\{-1, 1\}^M$ в*

$$L_p(\mu) = \Big(\sum_{n \in N_0} L_p\{-1, 1\}^{M_n}\Big)_p.$$

Тогда $\overline{\overline{M}} \leqslant \overline{\overline{M}}_n$ для некоторого $n \in N_0$.

Доказательство. Пусть, напротив, $\overline{\overline{M}}_n < \overline{\overline{M}}$ для каждого $n \in N_0$. Положим

$$Z = (L_p(\mu) \oplus L_p\{-1, 1\}^M)_p.$$

Нетрудно видеть, что $Z = L_p(\mu) \oplus Y$, где

$$Y = \{x + Tx : x \in L_p\{-1, 1\}^M\}.$$

Поскольку Y и $L_p\{-1, 1\}^M$ являются дополняющими подпространствами к $L_p(\mu)$ в Z, то существует изоморфизм U_1 из $L_p\{-1, 1\}^M$ на Y. Обозначим через I единичный оператор в $L_p(\mu)$ и $U = I \oplus U_1$. Итак, U — изоморфизм Z на себя. Поскольку T — ненулевой оператор, то $Y \neq L_p\{-1, 1\}^M$, следовательно, $L_p\{-1, 1\}^M$ не является неподвижным подпространством относительно U, что противоречит теореме 9. ■

Следствие 11. *Пусть $0 < p < 1$ и*

$$L_p(\mu_i) = \Big(\sum_{n \in N_i} L_p\{-1, 1\}^{M_n^{(i)}}\Big)_p, \quad i = 1, 2.$$

Существует ненулевой линейный непрерывный оператор из $L_p(\mu_1)$ в $L_p(\mu_2)$ тогда и только тогда, когда $\overline{\overline{M}}_n^{(1)} \leqslant \overline{\overline{M}}_m^{(2)}$ для некоторых $n \in N_1$ и $m \in N_2$.

Теорема 12. *Пусть $0 < p < 1$. Пространства*

$$L_p(\mu_i) = \Big(\sum_{n \in N_i} L_p\{-1, 1\}^{M_n^{(i)}}\Big)_p, \quad i = 1, 2$$

изоморфны тогда и только тогда, когда

$$\{\overline{\overline{M}}_n^{(1)} : n \in N_1\} = \{\overline{\overline{M}}_n^{(2)} : n \in N_2\}.$$

Доказательство. Пусть $U : L_p(\mu_1) \to L_p(\mu_2)$ — изоморфизм, $n_1 \in N_1$. Тогда $L_p(\mu_1) = X \oplus Y$, где

$$Y = L_p\{-1, 1\}^{M_{n_1}^{(1)}} \text{ и } X = \Big(\sum_{n \in N_1 \setminus \{n_1\}} L_p\{-1, 1\}^{M_n^{(1)}}\Big)_p.$$

Следовательно, $L_p(\mu_2) = UX \oplus UY$, причем $\operatorname{codim} UX = \overline{\overline{M}}_{n_1}^{(1)}$. Положив

$$N_2 = \{n \in N_2 : \overline{\overline{M}}_n^{(2)} > \overline{\overline{M}}_{n_1}^{(1)}\},$$

будем иметь, согласно следствию 5,

$$Z = \left(\sum_{n \in N_2}, L_p \{-1, 1\}^{M_n^{(2)}} \right)_p \subset UX.$$

Пусть $\delta > 0$ таково, что если $x \in UX$, $y \in UY$ и $\|x\| = \|y\| = 1$, то $\|x - y\| \geqslant \delta$. Фактор-отображение T из $L_p(\mu_2)$ на $L_p(\mu_2)/Z$ изоморфно вкладывает UY в $L_p(\mu_2)/Z$, поскольку $\|x - y\| \geqslant \delta$, как только $x \in Z$, $y \in UY$ и $\|x\| = \|y\| = 1$, в силу включения $Z \subset UX$. Итак, Y изоморфно вкладывается в $L_p(\mu_2)/Z$, которое, в свою очередь, изоморфно $\left(\sum_{n \in N_2 \setminus N_2'}, L_p \{-1, 1\}^{M_n^{(2)}} \right)_p$. Согласно теореме 10, существует $n \in N_2 \setminus N_2'$ такое, что $\overline{\overline{M}}_n^{(2)} \geqslant \overline{\overline{M}}_{n_1}^{(1)}$. С другой стороны, $\overline{\overline{M}}_n^{(2)} \leqslant \overline{\overline{M}}_{n_1}^{(1)}$, согласно определению N_2. Итак,

$$\{\overline{\overline{M}}_n^{(1)} : n \in N_1\} \subset \{\overline{\overline{M}}_n^{(2)} : n \in N_2\}$$

в силу произвольности $n_1 \in N_1$. Обратное включение доказывается аналогично. Доказательство изоморфности (даже изометричности) $L_p(\mu_1)$ и $L_p(\mu_2)$ в случае равенства соответствующих множеств мощностей не представляет труда.

Следствие 13. *Пусть $0 < p < 1$. Если пространства $L_p(\mu_1)$ и $L_p(\mu_2)$ изоморфны, то они изометричны.*

Список литературы: 1. *Maharam D.* On gomogeneous measure algebras. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1942, 28, p. 108—111. 2. *Lacey H. E.* The isometric theory of classical Banach spaces. — Berlin — Heidelberg — New York: Springer Verl., 1974.—270 p. 3. *Rosenthal H. P.* On injective Banach spaces and the spaces $L^\infty(\mu)$ for finite measures μ. — Acta Math., 1970, **124**, № 3—4, p. 205—248. 4. *Попов М. М.* О коразмерности пространств $L_p(\mu)$ при $p < 1$. — Функцион. анализ и его прил., 1984, **18**, № 2, с. 94—95.

Поступила в редколлегию 08.07.85.

УДК 517.5

О. В. ЕПИФАНОВ, Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК

О СОХРАНЕНИИ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

1. Пусть $a(D) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{(k)}(0)}{k!} \frac{d^k}{dz^k}$ — дифференциальный оператор бесконечного порядка с характеристической функцией $a(z)$, $f(z)$— целая функция экспоненциального типа, сопряженную диаграмму