ISSN 0321-4427

Теория функций, функциональный анализ

47

»ВИЩА ШКОЛА«

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ХАРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО
ЗНАМЕНИ И ОРДЕНА ДРУЖБЫ НАРОДОВ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени А. М. ГОРЬКОГО

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Республиканский
междуведомственный
научный сборник

Основан в 1965 г.

ВЫПУСК 47

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ
«ВИЩА ШКОЛА»
1987

УДК 513.53

Сборник содержит статьи по теории функций вполне регулярного роста, спектральной теории дифференциальных операторов, теории, распределения значений, аналитическим вопросам теории вероятностей, геометрии банаховых пространств, теории аналитических матриц-функций.

Для научных работников и специалистов.

Редакционная коллегия: В. А. Марченко (отв. ред.), В. К. Дзядык (зам. отв. ред.), И. В. Островский (отв. секр.), Ю. М. Березанский, М. С. Бродский, Н. А. Давыдов, Л. Е. Дундученко, М. Г. Крейн, А. В. Кужель, Б. Я. Левин, Н. И. Симонов, И. Г. Соколов

Адрес редакционной коллегии: 310077, Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, университет, механико-математический факультет, тел. 45-73-27

Редакция литературы по естественным наукам и филологии
Зав. редакцией *Е. П. Иващенко*

Т $\frac{1702050000\text{-}001}{\text{М}226(04)\text{-}87}$ 492-87

© Издательское объединение «Вища школа», 1987

УДК 519.2

Г. П. ЧИСТЯКОВ

О ФАКТОРИЗАЦИИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ КЛАССА L Ю. В. ЛИННИКА. 1

В 1957 г. Ю. В. Линник [1, с. 128] установил необходимые условия принадлежности классу I_0 функций распределения (ф. р.) с гауссовой компонентой. Оказалось, что если ф. р. с гауссовой компонентой $\Lambda(x) \in I_0$, то она принадлежит классу $\boldsymbol{L}$ Ю. В. Линника, т. е. ее характеристическая функция (х. ф.) имеет вид

$$\varphi(t;\ \Lambda) = \exp\left\{i\beta t + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)\right\},\quad t \in \boldsymbol{R}^1, \tag{1}$$

где $\beta \in \boldsymbol{R}^1$, $G(x)$ — неубывающая функция ограниченной вариации (о. в.) с точками роста, лежащими во множестве

$$\{\mu_{n2}\}_{n=-\infty}^{\infty} \cup \{0\} \cup \{\mu_{n1}\}_{n=-\infty}^{\infty},$$

$\mu_{n1} > 0$, $\mu_{n2} < 0$, числа $\mu_{n+1,j}/\mu_{nj}$, $j = 1,\ 2;\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$ — натуральные, отличные от единицы. Возникает вопрос об условиях, которые нужно накладывать на ф. р. $\Lambda(x) \in \boldsymbol{L}$, чтобы она принадлежала классу I_0. Заметим, что ф. р. $\Lambda(x) \in \boldsymbol{L}$ могут не иметь гауссовой компоненты, т. е. в представлении (1) $G(+0) - G(0) = 0$. В настоящей работе дается ответ на этот вопрос при таком дополнительном ограничении на поведение спектральной функции Леви — Хинчина $G(x)$

$$G(+\infty) - G(x) + G(-x) = O(\exp(-rx)),$$
$$\exists\, r > 0,\ x \to +\infty. \tag{2}$$

Обозначим через $S(G)$ — спектр функции $G(x)$. Справедлива

Теорема 1. *Пусть ф. р. $\Lambda(x) \in \boldsymbol{L}$ и пусть спектральная функция Леви — Хинчина $G(x)$ удовлетворяет условию (2). Для того чтобы $\Lambda(x) \in I_0$, необходимо и достаточно, чтобы не существовало множества*

$$\{\nu_q\}_{q=1}^{\infty}$$

такого, что $\nu_q \in S(G)$ для всех q, $\nu_q \uparrow +\infty$ или $\nu_q \downarrow -\infty$, причем выполняются два условия:

$$1)\ \varlimsup_{q\to\infty} (\ln|\nu_{q+1}|)/|\nu_q| < \infty, \tag{3}$$

$$2)\ \varlimsup_{q\to\infty} (-\ln\{G(\nu_q + 0) - G(\nu_q)\})/|\nu_q| < \infty. \tag{4}$$

Сам Ю. В. Линник полагал [2], что если потребовать от ф. р. $\Lambda(x) \in \boldsymbol{L}$ выполнения условия (2) с $\forall r > 0$, то $\Lambda(x) \in I_0$. Это предположение Ю. В. Линника долгое время не удавалось доказать. Оно было доказано при более жестких ограничениях на поведение функции $G(x)$ на бесконечности [1], [3]. В 1981 г. гипотеза Ю. В. Линника была доказана автором [4]. В связи с этим представляет интерес такое простое следствие теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть ф. р.* $\Lambda(x) \in \boldsymbol{L}$ *и пусть выполняется условие* (2) *для спектральной функции Леви — Хинчина* $G(x)$ *с* $\forall r>0$. *Тогда* $\Lambda(x) \in I_0$.

Теорема 2 следует из теоремы 1, поскольку из соотношения (2) с $\forall r > 0$ вытекает, что не существует бесконечных подмножеств спектра $S(G)$, на которых выполняется соотношение (4).

С помощью теоремы 1 получаем полное описание класса I_0 для ф. р. с гауссовой компонентой при условии, что спектр функции Леви — Хинчина $G(x)$ содержится на полуоси. Это описание содержится в таком следствии теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть ф. р.* $\Lambda(x) \in \boldsymbol{L}$ *и пусть* $S(G) \subseteq [b, \infty)$, $b \in \boldsymbol{R}^1$. *Для того чтобы* $\Lambda(x) \in I_0$, *необходимо и достаточно, чтобы не существовало подмножества спектра* $S(G)$, *удовлетворяющего условиям* (3), (4).

Приступая к доказательству теоремы 1, отметим, что необходимость условий теоремы 1 является простым следствием такой теоремы, обобщающей один результат Хеймана [1, с. 218].

Теорема 4. *Пусть* $\varphi(t)$ — *функция вида*

$$\varphi(t) = \exp\left\{\sum_{p=1}^{\infty} a^{\nu_p} e^{i\nu_p t}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{ik\nu_1 t}, \ t \in \boldsymbol{R}^1,$$

где $0 < a < 1$, $\nu_1 \geqslant 1$, *числа* ν_{p+1}/ν_p, $(p = 1, 2, \ldots)$ — *натуральные, отличные от единицы. Для того чтобы существовала постоянная* $c_\varphi > 0$ *такая, что* $A_{k+1} \cdot A_k^{-1} \geqslant c_\varphi$, $\forall k \geqslant 0$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение*

$$\overline{\lim_{p\to\infty}} (\ln \nu_{p+1})/\nu_p < \infty.$$

Доказательство теоремы 4 приведем в § 1, а пока покажем, как из нее вытекает необходимость условий теоремы 1. Пусть ф. р. $\Lambda(x)$ такова, что найдется подмножество

$$\{\nu_q\}_{q=1}^{\infty} \subseteq S(G), \ |\nu_q| \uparrow \infty,$$

удовлетворяющее условиям (3), (4). Не уменьшая общности, считаем $\nu_q > 0$, $q \geqslant 1$. В силу теоремы 4 у ф. р. $\Lambda(x)$ имеется компонента $\Lambda_1(x)$ с х. ф. $\varphi(t; \Lambda_1)$ вида

$$\varphi(t; \Lambda_1) = \exp\left\{\sum_{q=1}^{\infty} a^{\nu_q} (e^{i\nu_q t} - 1)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_1(k) e^{ik\nu_1 t},$$

где $0 < a < 1$, коэффициенты $\lambda_1(k)$ обладают свойством: $\exists$ постоянная c_φ, $0 < c_\varphi \leqslant 1/2$, такая, что

$$\lambda_1(k+1)(\lambda_1(k))^{-1} \geqslant c_\varphi, \quad \forall k \geqslant 0.$$

Рассмотрим ф. р. $F_1(x)$ с х. ф. $\varphi(t; F_1)$ $\varphi(t; F_1) = \left(1 - (1/2)c_\varphi^3\right) \times \left(1 - (1/2)c_\varphi^3 e^{i3\nu_1 t}\right)^{-1}$. С другой стороны,

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t; \Lambda_1)(\varphi(t; F_1))^{-1} = \left(1 - \frac{1}{2}c_\varphi^3\right)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty}\left(\lambda_1(k) - \frac{1}{2}c_\varphi^3\lambda_1(k-3)\right)e^{ik\nu_1 t}.$$

В этой формуле $\lambda_1(m) = 0$, если $m < 0$. Учитывая свойство коэффициентов $\lambda_1(k)$, видим, что $\tilde{\varphi}(t)$ является х. ф. некоторой ф. р. $F_2(x)$. Эта ф. р. не является безгранично делимой (б. д.) ф. р., что легко усматривается из разложения в ряд Фурье $\ln\tilde{\varphi}(t)$. Таким образом, у ф. р. $\Lambda(x)$ имеется не б. д. компонента $F_2(x)$, что и требовалось доказать.

Достаточность условий теоремы 1 является следствием условной теоремы 5. Перед тем как ее формулировать, отметим, что при доказательстве теоремы 5 будем работать с неубывающими функциями о. в. $V(x)$, для которых выполняются оценки: $\exists$ постоянные $r_1 > 0$ и $B = B(V) > 0$, что для всех $x > 0$

$$V(+\infty) - V(x) + V(-x) \leqslant Be^{-r_1 x}. \tag{5}$$

Теорема 5. *Пусть ф. р.* $\Lambda(x) \in \boldsymbol{L}$ *и пусть спектральная функция Леви — Хинчина* $G(x)$ *удовлетворяет условию* (2). *Предположим, что для ф. р.* $\Lambda(x)$ *и любых ф. р.* $F_j(x)$, $j = 1, 2$, *удовлетворяющих соотношению*

$$(F_1 * F_2)(x) = \Lambda(x), \tag{6}$$

выполняются следующие условия:

а) *существуют положительные, строго возрастающие к* ∞ *последовательности* $\{T\}$, $\{N_T\}$, $\{M_T\}$, $M_T \geqslant \exp(TN_T)$, *такие, что найдутся ф. р.* $F_{jT}(x)$, $j = 1, 2$ с $S(F_{jT}) \subseteq (-\infty, M_T]$; *б. д. ф. р.* $\Lambda_T(x) \in \boldsymbol{L}$ *со спектральными функциями Леви — Хинчина* $G_T(x)$, с $S(G_T) \subseteq (-\infty, N_T]$, *такими, что величины их скачков не превосходят величин скачков функции* $G(x)$; *неубывающие функции о. в.* $Q_T(x)$ *такие, что*

$$Q_T(+\infty) - Q_T(x) \leqslant \exp(-Tx), \quad x \geqslant 0, \tag{7}$$

для которых выполняются соотношения при $T \to \infty$

$$\mathrm{Var}(F_{jT} - F_j) \to 0, \quad j = 1, 2,$$

$$\mathrm{Var}(\Lambda_T - \Lambda) \to 0, \quad \mathrm{Var}(Q_T - E) \to 0; \tag{8}$$

$$\mathrm{Var}(F_{1T} * F_{2T} - Q_T * \Lambda_T) \leqslant \exp(-TM_T), \tag{9}$$

где $E(x)$ — *единичная ф. р.*

Для функций о. в. $\Lambda_T(x)$, $F_{jT}(x)$, $j=1, 2$, $Q_T(x)$ *выполняется условие* (5) *с* $r_1 = 1/2r$ *и одной постоянной* B, *зависящей только от* r, $\Lambda(x)$, $F_j(x)$, $j=1, 2$;

б) *условие* а) *выполняется для ф. р.* $1-\Lambda(-x+0)$ *и ее компонент* $1-F_j(-x+0)$, $j=1, 2$.

Тогда $\Lambda(x) \in I_0$.

Вывод достаточности условий теоремы 1 из теоремы 5 будет сделан в § 3. В § 3 покажем, что для ф. р. $\Lambda(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы 1 и любых ф. р. $F_j(x)$, $j=1, 2$, таких, что имеет место соотношение (6), выполняются условия а), б) теоремы 5. При этом, не уменьшая общности, будем в дальнейшем считать, что параметр β из представления (1) равен 0.

В свою очередь доказательство теоремы 5 опирается на следующий теоретико-функциональный результат.

Теорема 6. *Пусть* $\varphi(z)$ — *функция, аналитическая в квадрате*

$$K_R = \{z: 0 < \operatorname{Im} z < R,\ |\operatorname{Re} z| < R/2\}$$

и непрерывная вплоть до границы K_R, $R \geqslant 10$. *Предположим, что для* $\varphi(z)$ *найдутся постоянные* $B_1 \geqslant 1$, $d \geqslant 0$, $0 < a < 1$, $0 < \delta < 1$, *такие, что выполняются следующие оценки*

1) $|\varphi(z)| \leqslant B_1(1+|z|)^d$, $0 \leqslant -iz \leqslant R$;

2) *оценка из пункта* 1 *сохраняется для* $z \in K_R$, $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 2a$;

3) *для каждого* r, $0 < r < R$, *где*

$$M(r, \varphi) = \max_{z \in K_r} |\varphi(z)| \geqslant \exp\left\{\frac{10^4}{a\delta}(r+1)\right\} + \exp\{10^8(d + (\delta(1 - \delta))^{-3})\} = \varphi(d, a, \delta; r), \tag{10}$$

найдется число $h(r)$,

$$1 \leqslant h(r)(\delta \ln M(r, \varphi)/(1+r)) \leqslant 10,$$

такое, что на системе вертикальных отрезков $z = iy + lh(r)$, $0 \leqslant y \leqslant r$, $l \in \boldsymbol{Z}$, *лежащих в* K_r, *выполняется*

$$|\operatorname{Re} \varphi(z)| \leqslant B_1(M(r, \varphi))^\delta.$$

Тогда в квадрате $K_{R/3}$ *справедлива оценка*

$$|\varphi(z)| \leqslant \{B_1 c^{d+1} \delta^{-2}(1+|z|)^{d+4}\}^{2/(1-\delta)} + \varphi(d, a, \delta; 2e|z|),$$

$c > 0$ — *абсолютная постоянная.*

В качестве следствия этого результата нетрудно получить такую теорему, имеющую возможно самостоятельное значение и использовавшуюся ранее автором [4] для доказательства гипотезы Ю. В. Линника.

Теорема 7. *Пусть для целой функции* $\varphi(z)$ *найдутся постоянные* $B_1 \geqslant 1$, $d > 0$, $\mu \geqslant 0$ *такие, что выполняются оценки:* 1) $|\varphi(z)| \leqslant B_1(1+|z|)^d e^{\mu|\operatorname{Im} z|}$, $z \in \boldsymbol{R}^1$, $iz \in \boldsymbol{R}^1$; 2) *существует последовательность чисел* $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$, $h_n \uparrow \infty$, *такая, что* h_n *делит* h_{n+1} *нацело для всех* $n \in \boldsymbol{N}$ *и имеют место при* $y \in \boldsymbol{R}^1$ *для* $l \in \boldsymbol{Z}$ *неравенства*

$$|\operatorname{Re} \varphi(iy + 2\pi l/h_{n+1})| \leqslant B_1(1+|z|)^d e^{h_n|y|}.$$

Тогда оценка из пункта 1, где вместо B_1 стоит $2^d B_1$, выполняется для всех $z \in \boldsymbol{C}^1$.

1. Доказательство теоремы 4. Сначала докажем достаточность условий теоремы 4. Для этого исследуем поведение коэффициентов A_k при условии, что найдется такое $N \geqslant 10$, что

$$\nu_{q+1} \leqslant \exp(N\nu_q), \quad \forall q \in \boldsymbol{N}. \tag{1.1}$$

Для каждого натурального n рассмотрим функции $\varphi_n(t)$

$$\varphi_n(t) = \exp\left\{\sum_{q=1}^{n} e^{it\nu_q}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} A_n(k)\, e^{itk\nu_1}.$$

Для этих функций докажем лемму.

Лемма 1. *Для $k \geqslant T_n = \nu_n \exp\{(3N+32)\nu_n\}$ коэффициенты $A_n(k)$ удовлетворяют неравенствам*

$$\frac{1}{16} \leqslant 2\pi(\nu_n/\nu_1)\, A_n(k)\,(\varphi_n(-i\sigma(k)))^{-1} \times \times \exp\left\{\left(\frac{1}{2}\nu_n + k\nu_1\right)\sigma(k)\right\} \leqslant 16, \tag{1.2}$$

где параметр $\sigma = \sigma(k)$ определяется из уравнения

$$\sum_{q=1}^{n} \nu_q e^{\sigma\nu_q} = k\nu_1. \tag{1.3}$$

Доказательство леммы 1. Учитывая $2\pi/\nu_1$-периодичность функции $\varphi_n(t)$, а также теорему Коши, легко получаем формулу для коэффициентов $A_n(k)$

$$A_n(k) = \varphi_n(-i\sigma)\, e^{-\sigma k\nu_1} \frac{\nu_1}{2\pi} \int_{-\pi/\nu_1}^{\pi/\nu_1} R(t, k, \sigma)\, dt, \quad \sigma > 0, \tag{1.4}$$

в которой функция $R(t, k, \sigma)$ определяется следующим образом:

$$R(t, k, \sigma) = e^{-itk\nu_1}\varphi_n(t - i\sigma)/\varphi_n(-i\sigma).$$

Из определения $R(t, k, \sigma)$ имеем два соотношения

$$-\ln|R(t, k, \sigma)| = 2\sum_{q=1}^{n} e^{\sigma\nu_q} \sin^2\frac{\nu_q t}{2},$$

$$\operatorname{Im}\ln R(t, k, \sigma) = \sum_{q=1}^{n} e^{\sigma\nu_q}\sin(\nu_q t) - tk\nu_1.$$

Параметр $\sigma = \sigma(k)$ в формуле (1.4) определим из уравнения (1.3). Легко видеть, что для $k \geqslant T_n$ у этого уравнения найдется решение $\sigma = \sigma(k)$, для которого выполняется неравенство $\sigma \geqslant 3N + 30$. На отрезке $[-\pi/\nu_1, \pi/\nu_1]$ рассмотрим точки $2\pi p/\nu_n$, $p = 0, \pm 1, \ldots, \pm P_n$, где $P_n = [\nu_n/2\nu_1]$. Если точка $2\pi p/\nu_n$ не попадает на границу отрезка, то обозначим через Γ_p окрестности этих точек

$$\Gamma_p = \left\{t : |t - 2\pi p/\nu_n| < \sigma\nu_n \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma\nu_n\right) = r(\sigma)\right\},$$

через D_p обозначим множества

$$D_p = \{t \mid r(\sigma) \leqslant |t - 2\pi p/\nu_n| \leqslant \pi/\nu_n\}.$$

Если точка $2\pi p/\nu_n$ попадает на границу отрезка, то под Γ_p, D'_p будем понимать множества Γ_p, D_p, построенные выше, пересеченные с отрезком $[-\pi/\nu_1, \pi/\nu_1]$. Через Q_l, $l = 2, \ldots, n$, обозначим множества целых чисел q, по модулю не превосходящих $[\nu_l/2\nu_1]$, и таких, что $q\nu_{l-1}$ не делится нацело на ν_l. При этом считаем $Q_1 = \{0\}$. Тогда множество Γ, являющееся объединением множеств Γ_p, $p = 0, \pm 1, \ldots, \pm P_n$ перепишем в виде

$$\Gamma = \bigcup_{l=1}^{n} \bigcup_{q \in Q_l} \Gamma_{q\nu_n\nu_l^{-1}}.$$

Кроме того, обозначим через $S(j, m, \sigma)$ сумму

$$S(j, m, \sigma) = \sum_{q=j}^{m} \nu_q^2 e^{\sigma\nu_q}, \; j, m \in Z.$$

Поскольку на каждом из множеств $\Gamma_{q\nu_n\nu_l^{-1}}$, $q \in Q_l$, $t = 2\pi q\nu_l^{-1} + v$, $|v| \leqslant r(\sigma)$, и выполняются неравенства

$$\sin^2\left(\frac{1}{2}\nu_p\left(\frac{2\pi q}{\nu_l} + v\right)\right) \geqslant \left(\frac{\nu_p}{\nu_l}\right)^2, \; p < l,$$

$$\sin^2 \frac{\nu_p v}{2} \geqslant \frac{1}{\pi^2}\nu_p^2 v^2, \; p \geqslant l,$$

то на этих множествах имеем оценку

$$\begin{aligned} -\ln|R(v + 2\pi q/\nu_l, k, \sigma)| &\geqslant 2\nu_l^{-2} S(1, l-1, \sigma) + \\ + 2\sum_{p=l}^{n} e^{\sigma\nu_p} \sin^2 \frac{\nu_p v}{2} &\geqslant 2\nu_l^{-2} S(1, l-1, \sigma) + \frac{2v^2}{\pi^2} S(l, n, \sigma) \geqslant \\ &\geqslant \nu_l^{-2} S(1, l-1, \sigma) + \frac{v^2}{\pi^2} S(1, n, \sigma). \end{aligned} \quad (1.5)$$

С помощью этой оценки получаем неравенство

$$\begin{aligned} &\Big|\int_{\Gamma\setminus\Gamma_0} R(t, k, \sigma)\,dt\Big| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{l=2}^{n} \sum_{q \in Q_l} \int_{\Gamma_{q\nu_n\nu_l^{-1}}} |R(t, k, \sigma)|\,dt \leqslant \\ &\leqslant \left(\sum_{l=2}^{n} \nu_l \exp\{-\nu_l^{-2} S(1, l-1, \sigma)\}\right) \times \\ &\times \int_{|v| \leqslant r(\sigma)} \exp\left\{-\frac{v^2}{\pi^2} \cdot S(1, n, \sigma)\right\} dv = M(n, \sigma) \cdot I(n, \sigma). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Для интеграла $I(n, \sigma)$ в правой части этого неравенства справедлива оценка $I(n, \sigma) \leqslant \pi^{3/2}(S(1, n, \sigma))^{-1/2}$. Множитель $M(n,$

σ) в (1.6) оценим, учитывая соотношение (1.1), а также факт, что для рассматриваемых k, $\sigma(k) \geqslant 3N+30$:

$$M(n, \sigma) \leqslant \sum_{l=2}^{n} \nu_l \exp\left\{-\nu_l^{-2} e^{\sigma\nu_{l-1}}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=2}^{n} \exp\left\{N\nu_{l-1} - e^{(N+3)\nu_{l-1}}\right\} \leqslant \frac{1}{16\pi^{3/2}}.$$

Последние два неравенства в применении к (1.6) дают оценку

$$\Big|\int_{\Gamma\setminus\Gamma_0} R(t, k, \sigma)\,dt\Big| \leqslant \frac{1}{16}(S(1, n, \sigma))^{-1/2}. \tag{1.7}$$

На множествах $D_{q\nu_n\nu_l^{-1}}$, $q \in Q_l$, используя неравенство $\sin^2\theta \geqslant (2\theta/\pi)^2$, $|\theta| \leqslant \pi/2$, получаем соотношение

$$-\ln|R(v + 2\pi q/\nu_l, k, \sigma)| \geqslant$$

$$\geqslant 2\sum_{p=l}^{n} e^{\sigma\nu_p}\sin^2\frac{\nu_p v}{2} \geqslant \frac{2v^2}{\pi^2} S(l, n, \sigma).$$

Из него следует оценка

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{q\in Q_l}\int_{D_{q\nu_n\nu_l^{-1}}} |R(t, k, \sigma)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=1}^{n}\nu_l \int_{r(\sigma)\leqslant|v|\leqslant\pi/\nu_n} \exp\left\{-\frac{v^2}{\pi^2} S(1, n, \sigma)\right\} dv \leqslant$$

$$\leqslant \pi(S(1, n, \sigma))^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{l=1}^{n}\nu_l \cdot \int_{|v|\geqslant R(\sigma)} e^{-v^2/2}dv, \tag{1.8}$$

где величина $R(\sigma)$ определяется равенством

$$R(\sigma) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}(S(1, n, \sigma))^{1/2} r(\sigma).$$

Для нее выполняется простая оценка $R(\sigma) \geqslant \sqrt{2}\sigma\nu_n/\pi$, позволяющая написать неравенство для $k \geqslant T_n$

$$\sum_{l=1}^{n}\nu_l \cdot \int_{|v|\geqslant R(\sigma)} e^{-v^2/2}dv \leqslant 8\nu_n e^{-\frac{1}{2}R(\sigma)} \leqslant \frac{1}{32\pi}.$$

Обозначим через D объединение D_p, $p = 0, \pm 1, \ldots, \pm P_n$. Тогда из последнего неравенства и неравенства (1.8) получаем оценку

$$\Big|\int_{D} R(t, k, \sigma)\,dt\Big| \leqslant \frac{1}{16}(S(1, n, \sigma))^{-1/2}. \tag{1.9}$$

Теперь получим оценки интеграла I^0 функции $R(t, k, \sigma)$ по множеству Γ_0. Из (1.5) легко получаем оценку сверху

$$|I^0| \leqslant \pi^{3/2}(S(1, n, \sigma))^{-1/2}. \tag{1.10}$$

На множестве Γ_0 имеем такую простую оценку

$$-\ln|R(v,\ k,\ \sigma)| \leqslant \frac{1}{2} S(1,\ n,\ \sigma) v^2. \tag{1.11}$$

На этом же множестве исследуем поведение $\operatorname{Im}\ln R(t,\ k,\ \sigma)$. Из формулы Тейлора с учетом выбора параметра $\sigma = \sigma(k)$ и нечетности функции $\operatorname{Im}\ln R(t,\ k,\ \sigma)$ следует

$$\operatorname{Im}\ln R(v,\ k,\ \sigma) = \\ = -\frac{v^3}{3!}\sum_{p=1}^{n} \nu_p^3 e^{\sigma\nu_p} \cos(\nu_p \cdot v^*),$$

v^* — точка из отрезка $[-r(\sigma),\ r(\sigma)]$. Из этой формулы, учитывая определение $r(\sigma)$, приходим к оценке для $v \in \Gamma_0$

$$|\operatorname{Im}\ln R(v,\ k,\ \sigma)| \leqslant \pi/12. \tag{1.12}$$

Из неравенств (1.11), (1.12) следует оценка снизу для интеграла I^0

$$I^0 = \int_{\Gamma_0} \exp\{\ln|R(v,\ k,\ \sigma)|\} \cos\{\operatorname{Im}\ln R(v,\ k,\ \sigma)\}\, dv \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{2} \int_{|v|<r(\sigma)} \exp\left\{-\frac{v^2}{2} S(1,\ n,\ \sigma)\right\} dv \geqslant \frac{1}{4}(S(1,\ n,\ \sigma))^{-\frac{1}{2}}. \tag{1.13}$$

Применяя оценки (1.10), (1.13), (1.7), (1.9) к формуле (1.4), получаем для $k \geqslant T_n$ неравенства (1.2). Лемма доказана.

Поскольку для $k,\ \nu_n \leqslant k\nu_1 < \nu_{n+1},\ A_k = a^{k\nu_1} A_n(k)$, то утверждение теоремы 4 в сторону достаточности будет доказано, если будет доказано неравенство для $k,\ \nu_n \leqslant k\nu_1 \leqslant M_n = \nu_n \exp\{4N + 28)\nu_n\}$,

$$A_n(k+1) A_n^{-1}(k) \geqslant c_\varphi = \exp\{-(5N + 40)\nu_1\}. \tag{1.14}$$

Неравенство (1.14) докажем по индукции. При $n = 1$ оно, как легко видеть, выполняется. Пусть оно выполнено для коэффициентов $A_p(k)$, $1 \leqslant p \leqslant n$, докажем его для коэффициентов $A_{n+1}(k)$. Коэффициенты $A_{n+1}(k)$, $A_n(k)$ связаны между собой формулой

$$p\tilde{\nu}_{n+1} \leqslant k < (p+1)\tilde{\nu}_{n+1}, \quad \tilde{\nu}_{n+1} = \nu_{n+1}/\nu_1,$$

$$A_{n+1}(k) = \sum_{l=0}^{p} \frac{1}{(p-l)!} A_n(k - (p-l)\tilde{\nu}_{n+1}). \tag{1.15}$$

Обозначим через

$$n_1 = \nu_n[\exp\{(3N + 32)\nu_n\}], \quad n_2 = \nu_n[\exp\{(5N + 30)\nu_n\}].$$

Предположим, что $k + 1 < (p+1)\tilde{\nu}_{n+1}$. Тогда для коэффициента $A_{n+1}(k+1)$ сохранится формула (1.15). Пусть $p \geqslant n_2$, тогда запишем

$$A_{n+1}(k+1) = \sum_{j=1}^{3} \sum_{l=l_j+1}^{l_{j+1}} \frac{1}{(p-l)!} A_n(k + 1 - (p-l)\tilde{\nu}_{n+1}) = \\ = S_{1,k+1} + S_{2,k+1} + S_{3,k+1},$$

где $l_1 = -1$, l_{j+1}, $j = 1, 2$ — наибольшие из целых чисел l, для которых выполняются соответственно неравенства

$$k - (p - l)\tilde{\nu}_{n+1} \leqslant (n_j - 1), \ j = 1, 2,$$

$l_4 = p$. Если $p \leqslant n_1$, то в последней формуле для $A_{n+1}(k+1)$ в правой части будет только слагаемое $S_{1,k+1}$, если $n_1 < p < n_2$, то $S_{1,k+1}$ и $S_{2,k+1}$. Эти два случая исследуются аналогично рассматриваемому.

Для первого слагаемого $S_{1,k+1}$ в силу предположения индукции имеем

$$S_{1,k+1} \geqslant c_\varphi \sum_{l=0}^{l_2} \frac{1}{(p-l)!} A_n (k - (p-l)\tilde{\nu}_{n+1}) = c_\varphi \hat{S}_{1k}. \quad (1.16)$$

Для исследования поведения $S_{2,k+1}$ вернемся к формуле (1.2). Параметр $\sigma = \sigma(x)$, определяемый из уравнения (1.3), если в нем вместо k брать положительное $x \geqslant T_n$, является дифференцируемой функцией от x и для $\sigma'(x)$ следует соотношение

$$\sigma'(x) = \left\{ \sum_{l=1}^{n} \nu_l^2 e^{\sigma(x)\nu_l} \right\}^{-1} \nu_1. \quad (1.17)$$

Из неравенств (1.2) получаем для $k \geqslant T_n$, $m \geqslant 0$:

$$\frac{1}{256} \leqslant \frac{A_n(k+m)}{A_n(k)} \exp\left\{ -\int_k^{k+m} \frac{d}{dx} (\ln \varphi_n(-i\sigma(x)) - \right.$$

$$\left. - \left(\nu_1 x + \frac{1}{2}\nu_n\right)\sigma(x)\right) dx \right\} \leqslant 256.$$

Поскольку в силу уравнения (1.3) имеем соотношение

$$\frac{d}{dx}\left\{ \ln \varphi_n(-i\sigma(x)) - \left(\nu_1 x + \frac{1}{2}\nu_n\right)\sigma(x)\right\} = -\nu_1\sigma(x) - \frac{1}{2}\sigma'(x)\nu_n,$$

то с помощью соотношения (1.17) для рассматриваемых k и m приходим к неравенству

$$\frac{1}{256} \leqslant \frac{A_n(k+m)}{A_n(k)} \exp\left\{ \int_k^{k+m} \nu_1 \sigma(x)\, dx \right\} \leqslant 512. \quad (1.18)$$

Из уравнения (1.3) следует, что для x, $n_1 \leqslant x \leqslant n_2$, справедлива оценка $\sigma(x) \leqslant 5N + 32$, поэтому из левой части неравенства (1.18) получаем для k, $n_1 \leqslant k < n_2$,

$$A_n(k+1)(A_n(k))^{-1} \geqslant \frac{1}{256} \exp\{(-5N - 32)\nu_1\}.$$

Эти неравенства позволяют написать оценку снизу

$$S_{2,k+1} \geqslant \frac{1}{256} \exp\{(-5N-32)\nu_1\} \times$$

$$\times \sum_{l=l_2+1}^{l_3} \frac{1}{(p-l)!} A_n(k - (p-l)\tilde{\nu}_{n+1}). \quad (1.19)$$

Через $\hat{S}_{2k}$, $\hat{S}_{3k}$ обозначим суммы, аналогичные суммам $S_{2,k+1}$, $S_{3,k+1}$, получаемые из последних заменой в коэффициентах $A_n(\cdot)$ параметра $k+1$ на k. Запишем формулу

$$\frac{(p-l_3)!}{A_n(k-(p-l_3)\tilde{\nu}_{n+1})}\hat{S}_{3k}=\sum_{l=1}^{p-l_3}A^l_{p-l_3}\prod_{q=1}^{l}\beta(k-(p-l_3-q)\tilde{\nu}_{n+1})=S_{4k},$$

где $A^l_{p-l_3}$ — число размещений из $p-l_3$ по l, множители $\beta(k-$ $-(p-l_3-q)\tilde{\nu}_{n+1})$ определяются следующим образом:

$$\beta(k-(p-l_3-q)\tilde{\nu}_{n+1})=\frac{A_n(k-(p-l_3-q)\tilde{\nu}_{n+1})}{A_n(k-(p-l_3-q+1)\tilde{\nu}_{n+1})}.$$

Поскольку $k-(p-l_3)\tilde{\nu}_{n+1}\geqslant n_2/2$, а для $x\geqslant n_2/2$ $\sigma(x)\geqslant 5N+28$, то из правой части неравенства (1.18) получаем оценку

$$\beta(k-(p-l_3-q)\tilde{\nu}_{n+1})\leqslant 512\exp\{-(5N+28)\nu_{n+1}\}.$$

Из этой оценки следует, что для $p\leqslant M_{n+1}$, M_{n+1} из (1.14)

$$S_{4k}\leqslant 512\sum_{l=1}^{p-l_3}A^l_{p-l_3}\exp\{-(5N+28)l\nu_{n+1}\}\leqslant$$

$$\leqslant 512\sum_{l=1}^{p-l_3}M^l_{n+1}\exp\{-(5N+28)l\nu_{n+1}\}\leqslant 1024\exp(-N\nu_{n+1}).$$

Отсюда получаем следующее неравенство:

$$\hat{S}_{3k}\leqslant 1024\cdot\hat{S}_{2k}\exp(-N\nu_{n+1}). \tag{1.20}$$

Из соотношений (1.16), (1.19), (1.20) получаем цепочку неравенств, доказывающих индуктивное предположение (1.14)

$$S_{1,k+1}+S_{2,k+1}+S_{3,k+1}\geqslant c_\varphi\hat{S}_{1k}+$$

$$+\frac{1}{256}\exp\{-(5N+32)\nu_1\}\cdot\hat{S}_{2k}\geqslant c_\varphi\hat{S}_{1k}+$$

$$+\left(\frac{1}{256}\exp\{-(5N+32)\nu_1\}-1024\exp(-N\nu_{n+1})c_\varphi\right)\times$$

$$\times\hat{S}_{2k}+c_\varphi\hat{S}_{3k}\geqslant c_\varphi(\hat{S}_{1k}+\hat{S}_{2k}+\hat{S}_{3k})=c_\varphi A_n(k).$$

Неравенство (1.14) доказано для случая $k+1<(p+1)\tilde{\nu}_{n+1}$. Пусть теперь $k+1=(p+1)\tilde{\nu}_{n+1}$. В этом случае формула (1.15) принимает вид

$$A_{n+1}(k+1)=\sum_{l=0}^{p}\frac{1}{(p-l)!}A_n((l+1)\tilde{\nu}_{n+1})+\frac{A_n(0)}{(p+1)!}.$$

К суммам в правых частях этих формул применимы те же рассуждения, что и для случая $k+1<(p+1)\tilde{\nu}_{n+1}$. Из этих рассуждений следует справедливость неравенства (1.14) и в случае $k+1=(p+1)\tilde{\nu}_{n+1}$. Достаточность условий теоремы 4 доказана.

Докажем необходимость условий теоремы 4. Действительно, если для $\forall k\in \boldsymbol{N}\cup\{0\}$, $A_{k+1}\cdot A_k^{-1}\geqslant c_\varphi>0$, то имеем оценку снизу для коэффициентов A_k

$$A_k\geqslant c_\varphi^k,\quad \forall k\in \boldsymbol{N},\ 0<c_\varphi<1. \tag{1.21}$$

С другой стороны, если бы при этом $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(\ln \nu_{n+1}/\nu_n)=\infty$, то для $\forall N\geqslant 3-4\ln c_\varphi$ найдется такое $n=n(N)$, что на отрезке $[\nu_n, \exp(2N\nu_n)]$ $A_k=a^{k\nu_1}A_n(k)$. Для коэффициентов $A_n(k)$ функции $\varphi_n(t)$ справедлива оценка для $k\geqslant 0$

$$A_n(k)\leqslant \varphi(-iN)\exp(-Nk\nu_1). \tag{1.22}$$

Эта оценка, очевидно, следует из формулы (1.4) при $\sigma=N$, если учесть, что при $t\in \boldsymbol{R}^1$ $|R(t,\ k,\ \sigma)|\leqslant 1$. Из (1.22) имеем для k, $\exp(N\nu_n)\leqslant k\leqslant \exp(2N\nu_n)$,

$$A_n(k)\leqslant \exp\left(\sum_{q=1}^{n} e^{N\nu_q}-Nk\nu_1\right)\leqslant \exp\left(-\frac{1}{2}Nk\nu_1\right)\leqslant c_\varphi^{2k\nu_1},$$

что противоречит имеющейся оценке (1.21) для коэффициентов A_k. Теорема 4 доказана.

Замечание. Как видно из доказательства теоремы 4, в качестве постоянной c_φ можно взять $c_\varphi=a^{\nu_1}\exp\{-(5N+40)\nu_1\}$. ■

Знак ■ означает конец очередного параграфа.

В дальнейшем условимся обозначать положительные абсолютные постоянные независимо от их величины одной буквой c.

2. Доказательство теоремы 6. Зададимся точкой r, $a<r<R-1$, в которой выполняется неравенство (10), и запишем формулу Шварца для функции $\varphi(z)$ в прямоугольнике

$$\Pi_{lr}=\{z: 0<\operatorname{Im} z<r,\ \ lh(r)<\operatorname{Re} z<(l+1)h(r)\}.$$

Конформное отображение прямоугольника Π_{lr} на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ осуществляется функцией эллиптический синус [5, с. 214]

$$f_l(z)=\operatorname{sn}\left(2K\left(z-l-\frac{1}{2}\right)/h(r);\ k\right), \tag{2.1}$$

где параметры K и k определяются соотношениями

$$K=\frac{\pi}{2}(1+2\alpha+2\alpha^4+\ldots)^2,$$

$$k^2=\left(\frac{2\alpha^{1/4}+2\alpha^{9/4}+\ldots}{1+2\alpha+2\alpha^4+\ldots}\right)^4,\ \alpha=e^{\pi i\tau},\ \tau=\frac{2ir}{h(r)}. \tag{2.2}$$

Поэтому, как нетрудно доказать, формула Шварца в каждом прямоугольнике Π_{lr}, лежащем в квадрате K_r, имеет вид

$$\varphi(z) = \int_{\partial\Pi_{lr}} \operatorname{Re}\varphi(\zeta) K_l(\zeta, z)\, d\zeta + ic_\varphi(r). \tag{2.3}$$

В этой формуле ядро $K_l(\zeta, z)$ выписывается следующим образом:

$$K_l(\zeta, z) = \frac{1}{\pi i} \cdot \frac{(f_l(\zeta))^{(1)}}{f_l(\zeta) - f_l(z)},$$

$\partial\Pi_{lr}$ — граница прямоугольника Π_{lr}, $c_\varphi(r)$ — вещественная постоянная, интеграл понимается как особый с особой точкой $\zeta = \left(l + \frac{1}{2}\right)h(r) + ir$. Граница прямоугольника Π_{lr} состоит из двух горизонтальных стенок $\Gamma_{\text{гн}l}$ — нижней и $\Gamma_{\text{гв}l}$ — верхней, и двух вертикальных — $\Gamma_{\text{вл}l}$ — левой и $\Gamma_{\text{вп}l}$ — правой. Интегралы вида (2.3) по этим стенкам будем обозначать соответственно через

$$I_{\text{гн}l}(z),\ I_{\text{гв}l}(z),\ I_{\text{вл}l}(z),\ I_{\text{вп}l}(z),\ \hat{I}_{\text{гв}l}(z) = I_{\text{гв}l}(z) + ic_\varphi(r).$$

Оценим в прямоугольнике Π_{lr} интегралы $I_{\text{вл}l}(z)$, $I_{\text{вп}l}(z)$. Функция $U_l(\zeta) = \operatorname{Re}\varphi(\zeta + lh(r))$, $0 < -i\zeta \leqslant r$, продолжается аналитически с помощью формулы

$$U_l(\zeta) = \frac{1}{2}\{\varphi(\zeta + lh(r)) + \overline{\varphi(-\bar{\zeta} + lh(r))}\},$$

в прямоугольники

$$\left\{\zeta : |\operatorname{Re}\zeta| \leqslant \frac{1}{2}r - |l|h(r),\ 0 < \operatorname{Im}\zeta \leqslant r\right\},$$

причем для таких ζ выполняется оценка

$$|U_l(\zeta)| \leqslant M(r, \varphi). \tag{2.4}$$

В силу аналитичности функции $U_l(\zeta)$ для указанных ζ выполняется соотношение, когда $z \in \Pi_{lr}$, $a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant r - h(r)$, $\hat{\zeta} = \zeta - lh(r)$,

$$I_{\text{вл}l}(z) = \int_{\Omega} U_l(\hat{\zeta}) K_l(\zeta, z)\, d\zeta, \tag{2.5}$$

где контур Ω совпадает с $\Gamma_{\text{вл}l}$, если $\operatorname{Re} z > (l + (1 - \delta)/20)\, h(r)$, и Ω совпадает с $\Gamma_{\text{вл}l}$, деформированным в $(1 - \delta)h(r)/20$ — окрестности точки $z_0 = i\operatorname{Im} z + lh(r)$ в дугу $E_l = \{\zeta : \operatorname{Re}\zeta \leqslant lh(r),\ |\zeta - z_0| = (1 - \delta)h(r)/20\}$, если $0 \leqslant \operatorname{Re} z - lh(r) \leqslant (1 - \delta)\ h(r)/20$.

Нам понадобится оценка функции $U_l(\hat{\zeta})$ на полуокружности E_l. Будем рассматривать прямоугольники Π_{lr} с $|l| \leqslant -3 + \frac{1}{2} r/h(r)$. Для $z \in \Pi_{lr}$, $a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant r - h(r)$, полуокружность E_l лежит в квадрате K_r, и потому на ней для $U_l(\hat{\zeta})$ выполняется неравенство (2.4). В дальнейшем будем пользоваться такой леммой.

Лемма 2. *Пусть* $\omega(\zeta)$ — *гармоническая мера дуги сектора* $S=\{\zeta:|\zeta|<\rho,\ 0\leqslant\beta_1<\arg\zeta<\beta_2\leqslant 2\pi\}$ *относительно этого сектора. Для* $\omega(\zeta)$ *выполняется оценка для* $\zeta\in S$

$$\omega(\zeta)\leqslant\frac{4}{\pi}\left|\frac{\zeta}{\rho}\right|^{\pi/(\beta_2-\beta_1)}\left(1-\left|\frac{\zeta}{\rho}\right|^{\pi/(\beta_2-\beta_1)}\right)^{-1}.$$

Доказательство леммы 2 легко следует из явного вида гармонической меры $\omega(\zeta)$ [6, с. 294] и потому приводить его не будем.

По теореме о двух константах [6, с. 296] получаем для $\zeta\in E_l$

$$\ln|U_l(\hat{\zeta})|\leqslant\omega_1(\zeta)\max_{\zeta\in E}\ln|U_l(\hat{\zeta})|+(1-\omega_1(\zeta))\max_{\zeta\in\partial D\setminus E}\ln|U_l(\hat{\zeta})|,$$

где $\omega_1(\zeta)$ — гармоническая мера полуокружности

$$E=\{\zeta:|\zeta-z_0|=h(r),\ \zeta\bar{\in}\Pi_{lr}\}$$

относительно полукруга

$$D=\{\zeta:|\zeta-z_0|<h(r),\ \zeta\bar{\in}\Pi_{lr}.$$

Применяя лемму 2 к функции

$$\omega_1(\zeta-z_0)\ \ (\rho=h(r),\ \beta_1=\pi/2,\ \beta_2=3\pi/2),$$

получаем для ζ $\zeta\in E_l$, оценку: $\omega_1(\zeta)\leqslant(1-\delta)/10$. Из этой оценки, оценки (2.4) и условия 3 теоремы получаем для $\zeta\in E_l$

$$\ln|U_l(\zeta)|\leqslant\left(\delta+\frac{1-\delta}{10}\right)\ln M(r,\ \varphi)+\ln B_1. \tag{2.6}$$

Нам понадобятся следующие две леммы о поведении эллиптических функций Якоби: $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{dn} z$.

Лемма 3. *Для* $z, 0\leqslant\operatorname{Im} z\leqslant r-bh(r)$, $b\geqslant 1$, *выполняются соотношения:*

$$\operatorname{sn}(2Kz/h(r);\ k)=B_1(z)\sin(\pi z/h(r)),$$
$$\operatorname{ch}(2Kz/h(r);\ k)=B_2(z)\cos(\pi z/h(r)),$$
$$\operatorname{dn}(2Kz/h(r);\ k)=B_3(z),$$

где параметры K, k определены в (2.2), функции $B_j(z)$, $j=1$, 2, 3, аналитичны в рассматриваемой полосе и допускают в ней оценки

$$|B_j(z)-1|\leqslant 4\exp(-\pi b). \tag{2.7}$$

Доказательство леммы 3. Для эллиптического синуса $\operatorname{sn}(2Kz/h(r);\ k)$ справедлива формула [5, с. 205, 216];

$$\operatorname{sn}(2Kz/h(r);\ k)=\left(\frac{2}{\sqrt{k}}\alpha^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}(1-\alpha^{2n}w^2)\times\right.$$
$$\times(1-\alpha^{2n}w^{-2})\Bigg/\prod_{n=1}^{\infty}(1-\alpha^{2n-1}w^2)\times$$
$$\left.\times(1-\alpha^{2n-1}w^{-2})\right)\frac{w-w^{-1}}{2i}=B_1(z)\frac{w-w^{-1}}{2i},$$

в которой $w^2 = e^{2\pi i t/h(r)}$. Из вида функции $B_1(z)$ легко усматриваем в полосе $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant r - h(r)$ нужную для нее оценку (2.7). Для остальных функций Якоби утверждение леммы 2 доказывается аналогично.

Лемма 4. *Пусть* $\zeta,\ z \in \Pi_j = \{w : |\operatorname{Re} w - jh(r)| < h(r)/8,\ 0 \leqslant \operatorname{Im} w \leqslant r - h(r)\}$, $j = l,\ l+1$, *и пусть* $|\zeta - z| < h(r)/8$, *тогда*

$$c_1 \leqslant |(\zeta - z) K_l(\zeta, z)| \leqslant c_2,$$

$c_q > 0$, $q = 1, 2$ — *абсолютные постоянные.*

Доказательство леммы 4. Из хорошо известных формул [5, с. 220] для эллиптического синуса получаем

$$\operatorname{sn}(\zeta;\ k) - \operatorname{sn}(z;\ k) = 2\operatorname{sn}\left(\frac{\zeta - z}{2};\ k\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\zeta + z}{2};\ k\right) \times$$
$$\times \operatorname{dn}\left(\frac{\zeta + z}{2};\ k\right) \Big/ \left(1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\frac{\zeta - z}{2};\ k\right) \operatorname{sn}^2\left(\frac{\zeta + z}{2};\ k\right)\right).$$

С помощью этого соотношения запишем

$$(\zeta - z) K_l(\zeta, z) = \frac{K \cdot (\zeta - z)}{h(r) \operatorname{sn}(K(\zeta - z)/h(r);\ k)} \times$$
$$\times \frac{\operatorname{ch}(K(2\zeta - 2l - 1)/h(r);\ k)}{\operatorname{ch}(K(\zeta + z - 2l - 1)/h(r);\ k)} \times \frac{\operatorname{dn}(K(2\zeta - 2l - 1)/h(r);\ k)}{\operatorname{dn}(K(\zeta + z - 2l - 1)/h(r);\ k)} \times$$
$$\times (1 - k^2 \operatorname{sn}^2(K(\zeta - z)/h(r);\ \ k) \operatorname{sn}^2(K(\zeta + z - 2l - 1)/h(r);\ k)).$$

С помощью леммы 3 нетрудно получить, что для ζ, z, удовлетворяющих условиям леммы 4, каждый множитель из правой части написанного равенства оценивается по модулю снизу и сверху абсолютными положительными постоянными, что и доказывает лемму 4.

Из леммы 4 и неравенства (2.6) для z, удовлетворяющих условию $0 \leqslant \operatorname{Re} z - lh(r) \leqslant (1 - \delta) h(r)/20$, $a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant r - h(r)$, получаем оценку

$$\left|\int_{E_l} U_l(\hat{\zeta}) K_l(\zeta, z)\, d\zeta\right| \leqslant \max_{\zeta \in E_l} \left|U_l(\hat{\zeta})\right| \times$$
$$\times \int_{E_l} |(\zeta - z) K_l(\zeta, z)| \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|} \leqslant c B_1 \{M(r, \varphi)\}^{\frac{1 + 9\delta}{10}}.$$

Учитывая эту оценку, условие 3 теоремы, тот факт, что функция $f_l(z)$ из (2.1) осуществляет конформное отображение прямоугольника Π_{lr} так, что левая вертикальная стенка $\Gamma_{\text{вл}l}$ переходит в отрезок $(-1/k,\ -1)$, а также лемму 3 о поведении эллиптического синуса, легко получаем для

$$z \in \Pi_{lr},\ a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant r - 8h(r)/(1 - \delta),$$

$$|I_{\text{вл}l}(z)| \leqslant \max_{\zeta \in \Gamma_{\text{вл}l}} |U_l(\hat{\zeta})| \cdot \int_{\Omega} |K_l(\zeta, z)|\, |d\zeta| +$$

$$+ cB_1 (M(r, \varphi))^{\frac{1+9\delta}{10}} \leqslant cB_1 (M(r, \varphi))^{\frac{1+9\delta}{10}} \times$$

$$\times \left\{ 1 + \int\limits_{-1/k}^{-1} ((x - \operatorname{Re} f_l(z))^2 + (\operatorname{Im} f_l(z))^2 + 1)^{-1/2} dx \leqslant \right.$$

$$\leqslant cB_1 \ln \frac{1}{k} \cdot (M(r, \varphi))^{\frac{1+9\delta}{10}} = q(r). \tag{2.8}$$

Такую же оценку получаем аналогично для интеграла $I_{\text{вп}l}(z)$ Для оценки интеграла $I_{\text{гн}l}(z)$ воспользуемся неравенством для $z \in \Pi_{lr}$, $a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant r - h(r)$, вытекающим из леммы 3

$$|f_l(z)| \geqslant 1/4 \exp(\pi a/h(r)).$$

Используя это неравенство, условие 2 теоремы и замечая, что функция $f_l(z)$ переводит $\Gamma_{\text{гн}l}$ в отрезок $(-1, 1)$, приходим для $z \in \Pi_{lr}$, $a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant r - h(r)$, к следующей оценке

$$|I_{\text{гн}l}(z)| \leqslant \max_{\zeta \in \Gamma_{\text{гн}l}} |\operatorname{Re} \varphi(\zeta)| \int\limits_{-1}^{1} ((x - \operatorname{Re} f_l(z))^2 +$$

$$+ (\operatorname{Im} f_l(z))^2)^{-1/2} dx \leqslant cB_1 (|l| + 1)^d. \tag{2.9}$$

Перейдем к исследованию интеграла $I_{\text{гв}l}(z)$. Рассмотрим функцию $\hat{I}_{\text{гв}l}(z)$. Эта функция аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im} z < r$ и для нее выполняется в этой полуплоскости соотношение

$$\hat{I}_{\text{гв}l}(z) = \hat{I}_{\text{гв}l}(z + 2h(r)). \tag{2.10}$$

Запишем формулу Шварца для функции $\varphi(z)$ в соседних прямоугольниках $\Pi_{l-1,r}$, Π_{lr} и сравним значения функций $\hat{I}_{\text{гв},l-1}(z)$, $\hat{I}_{\text{гв}l}(z)$ на общей части границы этих прямоугольников. В силу оценок (2.8), (2.9) для $z \in \Gamma_{\text{вл}l}$, $a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant r - 8h(r)/(1-\delta)$, имеем

$$|\hat{I}_{\text{гв}l}(z) - \hat{I}_{\text{гв},l-1}(z)| \leqslant c(|l| + 1)^d q(r). \tag{2.11}$$

Такая же оценка в силу соотношения (2.10) справедлива и для $z \in \Gamma_{\text{вл},l-2}$, $a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant r - 8h(r)/(1-\delta)$. Проведем оценку функций $\hat{I}_{\text{гв}l}(z)$ на прямых $\operatorname{Im} z = a$, $\operatorname{Im} z = r - 8h(r)/(1-\delta)$. Поскольку на отрезках $\Gamma_{\text{вл}l}$ $\operatorname{Re} \hat{I}_{\text{гв}l}(z) = 0$, то в силу принципа симметрии

$$\hat{I}_{\text{гв}l}(z) = -\overline{\hat{I}_{\text{гв}l}(-\bar{z} + 2lh(r))}, \quad z \in \Pi_{lr}. \tag{2.12}$$

Из формулы Шварца для функции $\varphi(z)$ в прямоугольнике Π_{lr} с помощью оценок (2.8), (2.9) получаем для $z \in \Pi_{lr}$, $\operatorname{Im} z = a$,

$$|\hat{I}_{\text{гв}l}(z)| \leqslant |I_{\text{вл}l}(z)| + |I_{\text{вп}l}(z)| +$$

$$+ |I_{\text{гн}l}(z)| + |\varphi(z)| \leqslant c(|l| + 1)^d q(r). \tag{2.13}$$

Учитывая соотношения (2.10), (2.12), видим, что это неравенство сохраняется для всех z прямой $\operatorname{Im} z = a$. Оценим интеграл $I_{\text{гв}l}(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z \leqslant r - h(r)$. Вспомним, что $I_{\text{гв}l}(z)$ — особый интеграл с особой точкой $ir + \left(l + \frac{1}{2}\right) h(r)$. Перепишем его в виде

$$I_{\text{гв}l}(z) = \int\limits_{\Gamma_{\text{гв}l}} \left\{\operatorname{Re}\varphi(\zeta) - \operatorname{Re}\varphi\left(ir + \left(l + \frac{1}{2}\right) h(r)\right)\right\} \times$$

$$\times K_l(\zeta, z)\, d\zeta + \operatorname{Re}\varphi\left(ir + \left(l + \frac{1}{2}\right) h(r)\right) \int\limits_{\Gamma_{\text{гв}l}} K_l(\zeta, z)\, d\zeta =$$

$$= I_{1l}(z) + \operatorname{Re}\varphi\left(ir + \left(l + \frac{1}{2}\right) h(r)\right) I_{2l}(z). \qquad (2.14)$$

Интеграл $I_{1l}(z)$ не является особым и его оценим следующим образом:

$$|I_{1l}(z)| \leqslant \max_{\zeta \in \Gamma_{\text{гв}l}} \left| \frac{\operatorname{Re}\varphi(\zeta) - \operatorname{Re}\varphi\left(ir + \left(l + \frac{1}{2}\right) h(r)\right)}{\zeta - ir - \left(l + \frac{1}{2}\right) h(r)} \right| \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_{\Gamma_{\text{гв}l}} \left|\zeta - ir - \left(l + \frac{1}{2}\right) h(r)\right| \cdot K_l(\zeta, z) \Big| \, |d\zeta| \right\}. \qquad (2.15)$$

Обозначим интеграл в фигурных скобках через $I_{3l}(z)$. Сделаем в нем замену $x = f_l(\zeta)$. Эта замена, если вспомнить, что отрезок $\left(ir + lh(r),\ ir + \left(l + \frac{1}{2}\right) h(r)\right)$ при отображении (2.1) переходит в полупрямую $\left(-\infty,\ -\frac{1}{k}\right)$, а отрезок $(ir + (l + 1) h(r),\ ir + \left(l + \frac{1}{2}\right) h(r)\Big)$ — в полупрямую $\left(\frac{1}{k},\ \infty\right)$, позволяет переписать интеграл $I_{3l}(z)$ в виде

$$I_{3l}(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{1/k}^{\infty} \frac{h(r)}{2K} \left(\int\limits_{x}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(u^2 - 1)(k^2 u^2 - 1)}} \right) \times$$

$$\times (|x - f_l(z)|^{-1} + |x + f_l(z)|^{-1})\, dx.$$

Из леммы 3 на прямой $\operatorname{Im} z = r - h(r)$ следует оценка

$$|\operatorname{sn}(2Kz/h(r);\ k)| \leqslant (k(1 + c))^{-1}. \qquad (2.16)$$

Применим ее для оценивания интеграла $I_{3l}(z)$. На прямой $\operatorname{Im} z = r - h(r)$ легко получаем

$$I_{3l}(z) \leqslant \frac{ch(r)}{k} \int\limits_{1/k}^{\infty} \frac{dx}{x(x - 1/(k(1 + c)))} \leqslant ch(r).$$

Используя это неравенство, из соотношения (2.15) нетрудно вывести оценку

$$|I_{1l}(z)| \leqslant cM(r+2h(r),\ \varphi),\ \operatorname{Im} z = r - h(r). \qquad (2.17)$$

Аналогично подсчету интеграла $I_{3l}(z)$ особый интеграл $I_{2l}(z)$ запишем в виде

$$I_{2l}(z) = \frac{2}{\pi i}\int_{1/k}^{\infty}\frac{f_l(z)}{x^2 - f_l^2(z)}\,dx.$$

Используя неравенство (2.16), выводим отсюда

$$|I_{2l}(z)| \leqslant c,\ \operatorname{Im} z = r - h(r). \qquad (2.18)$$

Из соотношения (2.14) с помощью неравенств (2.17), (2.18) приходим к оценке на прямой $\operatorname{Im} z = r - h(r)$

$$|I_{\text{гв}l}(z)| \leqslant cM(r+2h(r),\ \varphi). \qquad (2.19)$$

Вернемся к формуле Шварца для $\varphi(z)$ в прямоугольнике Π_{lr}. Положим в ней $z = ia + \left(l + \frac{1}{2}\right)h(r)$ и воспользуемся неравенствами (2.8), (2.9), (2.19). Из них следует, что $|c_\varphi(r)| \leqslant c(|l| + 1)^d q(r) + cM(r+2h(r),\ \varphi)$. Таким образом, в полосе $a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant r - h(r)$ имеем оценку

$$|\hat{I}_{\text{гв}l}(z)| \leqslant c(|l|+1)^d q(r) + cM(r+2h(r),\ \varphi). \qquad (2.20)$$

Из нее для z, $a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant r - h(r)$, следует неравенство

$$|\hat{I}_{\text{гв},l-1}(z) - \hat{I}_{\text{гв}l}(z)| \leqslant |\hat{I}_{\text{гв},l-1}(z)| + |\hat{I}_{\text{гв}l}(z)| \leqslant$$
$$\leqslant c(|l|+1)^d q(r) + cM(r+2h(r),\ \varphi). \qquad (2.21)$$

Из оценки (2.13) на всей прямой $\operatorname{Im} z = a$ получаем аналогично

$$|\hat{I}_{\text{гв},l-1}(z) - \hat{I}_{\text{гв}l}(z)| \leqslant c(|l|+1)^d q(r). \qquad (2.22)$$

К функции $g_l(z) = \hat{I}_{\text{гв},l-1}(z) - \hat{I}_{\text{гв}l}(z)$ применим в прямоугольнике $\Pi_{lr}(a,\ \delta) = \{z : (l-2)h(r) < \operatorname{Re} z < lh(r),\ a < \operatorname{Im} z < r - 8h(r)/(1-\delta)\}$ теорему о двух константах. Из нее следует неравенство для $z \in \Pi_{lr}(a,\ \delta)$

$$\ln|g_l(z)| \leqslant \omega_2(z)\max_{z_1 \in H_1}\ln|g_l(z_1)| +$$
$$+ (1-\omega_2(z))\max_{z_1\in H_2}\ln|g_l(z_1)|, \qquad (2.23)$$

где H_1 — верхняя горизонтальная стенка прямоугольника $\Pi_{lr}(a,\ \delta)$, H_2 — остальная часть границы, $\omega_2(z)$ — гармоническая мера H_1 относительно всей области $\Pi_{lr}(a,\ \delta)$. Для оценки гармонической меры $\omega_2(z)$ применим следующую лемму.

Лемма 5. *Пусть* $\omega(z)$ — *гармоническая мера верхней стенки полуполосы* $\Pi(\beta,\ b) = \{z : |\operatorname{Re} z| < \beta,\ \operatorname{Im} z < b\}$, $\beta > 0$, $b > 0$,

относительно всей полуполосы $\Pi(\beta, b)$. *Для* $\omega(z)$ *выполняется оценка:* $z \in \Pi(\beta, b)$, $\omega(z) \leqslant \frac{4}{\pi} e^{\pi(\operatorname{Im} z - b)/(2\beta)}(1 - e^{\pi(\operatorname{Im} z - b)/(2\beta)})^{-1}$.

Доказательство леммы 5 легко следует из явного вида гармонической меры $\omega(z)$ [6, с. 294] и потому приводить его не будем.

Применим лемму 5 для оценки гармонической меры $\omega_3(z)$ верхней стенки полуполосы $\{z : |\operatorname{Re} z - (l-1)h(r)| < h(r),\ \operatorname{Im} z < r - 8h(r)/(1-\delta)\}$ относительно всей этой полуполосы. Получаем оценку для z из этой полуполосы, $\operatorname{Im} z \leqslant r - 9h(r)/(1-\delta)$, $\omega_3(z) \leqslant 4\exp\{\pi(\operatorname{Im} z - r)/(2h(r)) + 4\pi/(1-\delta)\} = \hat{\omega}_3(z)$. Поскольку имеет место простое неравенство $\omega_2(z) \leqslant \omega_3(z) \leqslant \hat{\omega}_3(z)$ для $z \in \Pi_{lr}(a, \delta)$, $\operatorname{Im} z \leqslant r - 9h(r)/(1-\delta)$, то применим его и неравенства (2.21), (2.22), (2.11) к соотношению (2.23). Приходим к выводу, что для $z \in \Pi_{lr}(a, \delta)$, $\operatorname{Im} z \leqslant r - 9h(r)/(1-\delta)$

$$\ln|g_l(z)| \leqslant c + \ln\{(|l|+1)^d q(r)\} + \hat{\omega}_3(z) \times$$
$$\times \ln M(r + 2h(r), \varphi) = c + \ln\{(|l|+1)^d q(r)\} + Q(r, z). \quad (2.24)$$

Вспомним, что для функции $\hat{I}_{\text{гв}l}(z)$ выполняется соотношение (2.12). Из него и из оценки (2.24) следует для $z \in \Pi_{l-1,r}$, $a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant r - 9h(r)/(1-\delta)$, $|\hat{I}_{\text{гв},l-1}(z) + \hat{I}_{\text{гв}l}(-\bar{z} + 2lh(r))| \leqslant c \times (|l|+1)^d q(r) \exp\{Q(r, z)\}$, что с учетом неравенств (2.8), (2.9) дает для тех же z $|\varphi(z) + \varphi(-\bar{z} + 2lh(r))| \leqslant c(|l|+1)^d q(r) \exp \times \{Q(r, z)\}$. Отсюда следует нужное неравенство для r_1, $a \leqslant r_1 \leqslant r - 9h(r)/(1-\delta)$,

$$\left|\max_{z \in \Pi_{0r_1}} |\varphi(z)| - M(r_1, \varphi)\right| \leqslant$$
$$\leqslant c(r+1)^{d+1}(h(r))^{-1} q(r) \exp\{Q(r, ir_1)\}. \quad (2.25)$$

Рассмотрим функцию $\varphi(z)$ в прямоугольнике Π_{0r}. Для функции $\varphi(z)$ выполняется условие 1 теоремы 6. Учитывая неравенства (2.8), (2.9), получаем для $z \in \partial\Pi_{2r}(a, \delta)$, $\operatorname{Re} z = 0$, $|\hat{I}_{\text{гв}0}(z)| \leqslant B_1(r+1)^d + cq(r)$. В силу (2.10) такая же оценка имеет место для $z \in \partial\Pi_{2r}(a, \delta)$, $\operatorname{Re} z = 2h(r)$. На отрезках $z \in \partial\Pi_{2r}(a, \delta)$, $\operatorname{Im} z = a$, $\operatorname{Im} z = r - 8h(r)/(1-\delta)$, справедливы оценки (2.13), (2.20) с $l = 0$. В прямоугольнике $\Pi_{2r}(a, \delta)$ применим к функции $\hat{I}_{\text{гв}0}(z)$ теорему о двух константах точно так же, как это делалось для функции $g_l(z)$ в области $\Pi_{lr}(a, \delta)$. Дословно повторяя рассуждения, приведенные для получения неравенства (2.24), приходим к следующей оценке при $z \in \Pi_{2r}(a, \delta)$, $\operatorname{Im} z \leqslant r - 9h(r)/(1-\delta)$, $|\hat{I}_{\text{гв}0}(z)| \leqslant c(r+1)^d q(r) \exp\{Q(r, z)\}$. Вспоминая оценки (2.8), (2.9) для $I_{\text{вл}0}(z)$, $I_{\text{вп}0}(z)$, $I_{\text{гн}0}(z)$ получаем из формулы Шварца

$\max\limits_{z\in\Pi_{0r_1}} |\varphi(z)| \leqslant c(r+1)^d q(r)\exp\{Q(r, ir_1)\}$, $a \leqslant r_1 \leqslant r - 9h(r)/(1 - \delta)$. Тогда из соотношения (2.25) приходим к выводу, что для r_1, $a \leqslant r_1 \leqslant r - 9h(r)/(1-\delta)$,

$$M(r_1, \varphi) \leqslant c(r+1)^{d+1}(h(r))^{-1} q(r)\exp\{Q(r, ir_1)\}. \qquad (2.26)$$

Положим в этом неравенстве $r_1 = r - 20h(r)/(1-\delta)$. Поскольку для величины $\hat{\omega}_3(z)$ выполняется неравенство $\hat{\omega}_3(r - 20h(r)/(1 - \delta)) \leqslant (1-\delta)/10$, то для $Q(r, r - 20h(r)/(1-\delta))$ имеем оценку $Q(r, r - 20h(r)/(1-\delta)) \leqslant \frac{1-\delta}{10}\ln M(r + 2h(r), \varphi)$. Применим эту оценку к неравенству (2.26). Вспоминая также определение $q(r)$ (2.8) и учитывая соотношение (10), получаем

$$\ln M(r - 20h(r)/(1-\delta), \varphi) \leqslant c + \ln B_1 + 2\ln\frac{1}{\delta} +$$
$$+ (d+4)\ln(r+1) + 2\ln\ln M(r, \varphi) + \left(\delta + \frac{1-\delta}{5}\right)\ln M(r +$$
$$+ 2h(r), \varphi) \leqslant c + \ln B_1 + 2\ln\frac{1}{\delta} + (d+4)\ln(r+1) +$$
$$+ \left(\delta + \frac{1-\delta}{4}\right)\ln M(r + 2h(r), \varphi). \qquad (2.27)$$

Сейчас понадобится такой вариант леммы Неванлинны — Бореля [7, с. 17].

Лемма 6. *Пусть $f(x) \geqslant 1$ — неубывающая, непрерывная на полуоси $x \geqslant x_0 > 0$ функция с $f(+\infty) = +\infty$. Вне некоторого множества интервалов полуоси $x \geqslant x_0$ конечной логарифмической меры имеет место неравенство*

$$|f(xe^\tau) - f(x)| < 1, \qquad (2.28)$$

если только $|\tau| \leqslant (f(x))^{-2}$. Логарифмическая мера исключительного множества E удовлетворяет неравенству

$$\int\limits_E \frac{dx}{x} \leqslant 3(f(x_0))^{-2} + 2\int\limits_{f(x_0)}^{\infty} \frac{dt}{t^2}. \qquad (2.29)$$

Применим эту лемму к функции $f(x) = \{\ln M(x, \varphi)\}^{1/3}$, продолженной для $x \geqslant R$ непрерывно с сохранением свойства неубывания так, что $f(x) \to +\infty$, $x \to +\infty$. Сделаем, не нарушающие общности, предположения. В качестве $r \geqslant 1$ возьмем точку отрезка $[r_0, R/e]$, $f(r_0) = 4$, в которой имеет место неравенство (2.28). Такая точка найдется в каждом отрезке $[T, Te]$, $r_0 < T < R/e$, ибо в противном случае в силу соотношения (2.29), $x_0 = T$, приходим к противоречию $1 = \int\limits_T^{Te} \frac{dx}{x} \leqslant 3\cdot 4^{-2} + 2\int\limits_4^{\infty}\frac{dt}{t^2} < 1$. Считаем также, что в этой точке справедлива оценка (10). В качестве параметра τ возьмем величину $\pm\ln(1 - 20h(r)/((1-\delta)r)$, для которой в силу

(10) выполняется оценка $|\tau| \leqslant 40h(r)/((1-\delta)r) \leqslant \{\ln M(r, \varphi)\}^{-2/3} = (f(r))^{-2}$. В силу леммы 6 с учетом неравенства (10) имеем оценки

$$\ln M(r - 20h(r)/(1-\delta), \varphi) \geqslant \{(\ln M(r, \varphi))^{1/3} - 1\}^3 \geqslant \frac{9+\delta}{10} \ln M(r, \varphi),$$

и аналогично

$$\ln M(r + 2h(r), \varphi) \leqslant \frac{11-\delta}{10} \ln M(r, \varphi).$$

Применяя эти оценки в указанной выше точке z к неравенству (2.27), приходим в этой точке с учетом неравенства (10) к соотношению

$$\frac{1-\delta}{2} \ln M(r, \varphi) \leqslant c + \ln B_1 + 2 \ln \frac{1}{\delta} + (d+4) \ln (r+1),$$

откуда легко вытекает утверждение теоремы 6.■

§ 3. Вывод достаточности условий теоремы 1 из теоремы 5. Нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 7. *Пусть $\sigma(x)$ — неубывающая функция о. в. на оси $(-\infty, \infty)$. Обозначим через $I(a, b, t)$, $-\infty \leqslant a < b < \infty$, интеграл*

$$I(a, b, t) = \int_a^b \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2} d\sigma(x).$$

Интеграл $I(0, b, t)$ сходится абсолютно и равномерно на любом компакте t-плоскости и, следовательно, является целой функцией. Справедлива оценка для $t \in \boldsymbol{C}^1$

$$|I(0, b, t)| \leqslant 8\sigma(b)(b+1)(1+|t|^2)(1+e^{-b\,\mathrm{Im}\,t}). \qquad (3.1)$$

Аналогичная оценка верна для интеграла $I(-b, 0, t)$.

Интеграл $I(-\infty, b, t)$, $b > 0$, сходится абсолютно и равномерно на любом компакте, лежащем в полуплоскости $\mathrm{Im}\,t \leqslant 0$, следовательно, является аналитической функцией в полуплоскости $\mathrm{Im}\,t < 0$, непрерывной вплоть до границы. При этом для него при $\mathrm{Im}\,t \leqslant 0$ выполняется оценка (3.1).

Оценка (3.1) близка к оценкам в [1, с. 187—188] и получается аналогично. Поэтому доказательство леммы 7 не приводим.

Лемма 8. *Пусть $F(x)$ — б. д. ф. р., для которой в представлении (1) $\beta = 0$, со спектральной функцией Леви — Хинчина $\sigma(x)$ спектр которой $S(\sigma) \subseteq (-\infty, b]$, $1 \leqslant b < \infty$. Тогда для $x \geqslant L = 16\sigma(+\infty)(b+1)(T_1+2)\exp(bT_1)$, $T_1 \geqslant 1$, выполняется неравенство*

$$1 - F(x) \leqslant \exp\left(-\frac{1}{2} T_1 x\right). \qquad (3.2)$$

Доказательство леммы 8. Х. ф. $\varphi(t; F)$ ф. р. $F(x)$ в силу леммы 7 является аналитической в полуплоскости $\mathrm{Im}\,t < 0$ и непрерывной вплоть до границы. Аналитическое продолжение х. ф. $\varphi(t; F)$ в нижнюю полуплоскость осуществляется, как это сле-

дует из теоремы 2.2.3 [1, с. 38—39], с помощью интеграла которым эта функция задается на вещественной оси. Поэтому, для $y > 0$ имеем

$$\varphi(-iy;\ F) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{yu} dF(u). \tag{3.3}$$

Поскольку для $y > 0$ получаем неравенство

$$\int_{0}^{\infty} e^{yu} dF(u) \geqslant \int_{x}^{\infty} e^{yu} dF(u) \geqslant e^{yx}(1 - F(x)),\ \forall x > 0,$$

то из (3.3) легко следует оценка

$$1 - F(x) \leqslant e^{-yx} \varphi(-iy;\ F),\ \forall x > 0. \tag{3.4}$$

Выбирая в (3.4) $y = T_1$ с помощью леммы 7 имеем для $x \geqslant L$

$$e^{-T_1 x} \varphi(-iT_1;\ F) \leqslant \exp\{8\sigma(+\infty)(b+1) \times \\ \times (T_1^2 + 1)(e^{bT_1} + 1) - T_1 x\} \exp\left(-\frac{1}{2} T_1 x\right). \tag{3.5}$$

Неравенство (3.5) приводит к заключению леммы 8.

В этом параграфе положительные постоянные, зависящие только от ф. р. $\Lambda(x)$, $F_j(x)$, $j = 1, 2$, из (6), от параметра r из (2), независимо от их величины будем обозначать одной буквой B. Зададимся числом $R \geqslant 10$ и разобьем спектр $S(G)$ функции Леви — Хинчина $G(x)$ на три непересекающихся множества $S_j(G)$, $j = 1, 2, 3$. В $S_2(G)$ входят точки $\mu_{n1} \geqslant 1$, в которых выполняется неравенство

$$G(\mu_{n1} + 0) - G(\mu_{n1}) \leqslant \exp(-R\mu_{n1}). \tag{3.6}$$

Чтобы определить $S_1(G)$, $S_3(G)$ заметим следующее. Множество

$$(S(G) \cap [1,\ \infty)) \setminus S_2(G) = \{\nu_n\}_{n=1}^{N},$$

$\nu_n \uparrow \infty$, $N \leqslant \infty$, в силу условий теоремы 1 или конечно, или содержит бесконечное множество точек ν_q таких, что $\nu_{q+1} > \exp \times \times (4R\nu_q)$. В первом случае полагаем $S_1(G) = S(G) \setminus S_2(G)$, $S_3(G) = = \varnothing$. Во втором случае выберем одну из указанных точек ν_q и положим $S_3(G) = \{\nu_n\}_{n=q+1}^{\infty}$, $S_1(G) = S(G) \setminus (S_2(G) \cup S_3(G))$. Поскольку проверка условия а) теоремы 5 проводится в обоих случаях аналогично, то остановимся на втором, несколько более сложном. Обозначим через $\Lambda_j(x)$, $j = 1, 2, 3$ — б. д. ф. р. со спектральными функциями Леви — Хинчина $G_j(x)$, $j = 1, 2, 3$, такими, что $S(G_j) = S_j(G)$, величины скачков функций $G_j(x)$ совпадают с величинами скачков функции $G(x)$.

Легко видеть, что х. ф. $\varphi(t;\ \Lambda_2)$ аналитически продолжается в полосу $|\mathrm{Im}\, t| < R$ и выполняется оценка $\varphi\left(-\frac{1}{2} iR;\ \Lambda_2\right) \leqslant 10$. Поскольку для $\forall x > 0$ имеет место неравенство [1, с. 38]

$$e^{Rx/2}(1 - \Lambda_2(x)) \leqslant \varphi\left(-\frac{1}{2} iR;\ \Lambda_2\right) \leqslant 10,$$

то отсюда для $x \geqslant 12/R$ получаем нужную оценку

$$1 - \Lambda_2(x) \leqslant \exp\left(-\frac{1}{4} Rx\right). \tag{3.7}$$

Эта оценка, как легко видеть, сохраняется и для $0 < x \leqslant 12/R$. В силу леммы 8 ($F(x) = \Lambda_1(x)$, $b = \nu_q$) для $x \geqslant 64G(+\infty)\nu_q R \times \exp(R\nu_q)$ имеем неравенство

$$1 - \Lambda_1(x) \leqslant \exp\left(-\frac{1}{2} Rx\right). \tag{3.8}$$

Кроме того, поскольку для функции $G(x)$ выполняется условие (2) для ф. р. $\Lambda_3(x)$, нетрудно получить оценку

$$\operatorname{Var}(E - \Lambda_3) \leqslant B \exp(-r\nu_{q+1}). \tag{3.9}$$

Для $x > 0$ имеет место простое неравенство

$$1 - \Lambda(x) \leqslant \sum_{j=1}^{3} \left(1 - \Lambda_j\left(\frac{1}{4} x\right)\right),$$

из которого с помощью (3.7)—(3.9) получаем нужную оценку

$$1 - \Lambda(x) \leqslant 2\exp\left(-\frac{1}{16} Rx\right) + B\exp(-r\nu_{q+1}), \tag{3.10}$$

$x \geqslant B\exp(2R\nu_q)$. Для компонент $F_j(x)$, $j = 1, 2$, ф. р. $\Lambda(x)$ справедливы оценки [1, с. 120]: $x > 0$,

$$1 - F_j(x) \leqslant 2(1 - \Lambda(x - m_k)), \tag{3.11}$$

$$F_j(-x) \leqslant 2\Lambda(-x - m_k), \tag{3.12}$$

$k = 1, 2$, $k \neq j$, m_j — медианы ф. р. $F_j(x)$. Из (3.11) и неравенства (3.10) получаем для x, $B\exp(2R\nu_q) \leqslant x \leqslant \nu_{q+1}/(Rr)$,

$$1 - F_j(x) \leqslant B\exp(-1/16Rx). \tag{3.13}$$

Оценка (2) для функции $G(x)$ с учетом теоремы 2.2.4 [1, с. 41] позволяет утверждать, что оценка (5) имеет место с $r_1 = \frac{1}{2} r$ для ф. р. $\Lambda(x)$. Тогда из этой оценки и оценок (3.11), (3.12) следуют соотношения

$$1 - F_j(x) \leqslant B\exp\left(-\frac{1}{2} rx\right), \ x > \nu_{q+1}/(Rr), \tag{3.14}$$

$$F_j(-x) \leqslant B\exp\left(-\frac{1}{2} rx\right), \ x > 0. \tag{3.15}$$

Возьмем в качестве $T = R$, $N_T = \nu_q$, $M_T = \exp(2R\nu_q + B)$ и положим

$$F_{jT}(x) = \begin{cases} F_j(x), & x \leqslant M_T, \\ 1, & x > M_T, \end{cases}$$

$$\Lambda_T(x) = \Lambda_1(x), \ Q_T(x) = \Lambda_2(x).$$

Б. д. ф. р. $\Lambda_T(x)$, очевидно, удовлетворяют условиям а) теоремы 5, функции $Q_T(x)$ удовлетворяют неравенству (7) в силу оценок (3.7) и для них, очевидно, выполняется соотношение (8). Из оценок (3.13), (3.14) следует, что ф. р. $F_{jT}(x)$ удовлетворяют соотношению (8). Из тех же оценок и оценки (3.9) следует для построенных функций $\Lambda_T(x)$, $F_{jT}(x)$, $j=1,2$, $Q_T(x)$ соотношение (9). Из построения функций $\Lambda_T(x)$, $F_{jT}(x)$, $j=1, 2$, $Q_T(x)$ видим, что для них выполняется оценка (5) с постоянной $r_1=\frac{1}{2}r$ и одной постоянной B. Таким образом, из условий теоремы 1 следует выполнение условия а) теоремы 5.

Аналогично показывается, что условия теоремы 1 влекут выполнение условия б) теоремы 5. ■

На этом заканчивается изложение первой части работы. Вторая ее часть будет посвящена доказательству теоремы 5.

Список литературы: 1. *Линник Ю. В., Островский И. В.* Разложения случайных величин и векторов. — М.: Наука, 1972.—480 с. 2. *Линник Ю. В.* Некоторые вопросы теории целых функций, возникающие из теории вероятностей. — В кн.: Исследования по совр. пробл. теории функций комплексного переменного.— М.: Физматгиз, 1961, с. 49—57. 3. *Фрынтов А. Е., Чистяков Г. П.* О безгранично делимых распределениях класса I_0. — Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1979, вып. 32, с. 91—97. 4. *Чистяков Г. П.* О факторизации распределений класса **L**. — В кн.: III Междунар. Вильнюс. конф. по теории вероятности и мат. статистике: Тез. докл., Вильнюс, 1981, **2**, с. 244—245. 5. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. — М.: Наука, 1968.—648 с. 6. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. — М.: Наука, 1965.—424 с. 7. *Стрелиц Ш. И.* Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений. — Вильнюс: Минтис, 1972.—468 с.

Поступила в редколлегию 18.02.85.

УДК 517.94

И. Е. ЕГОРОВА

О ПОЛНОМ НАБОРЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ОПЕРАТОРА ДИРАКА С ПРЕДЕЛЬНО-ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Цель данной работы — нахождение полного набора независимых спектральных данных для одномерного оператора Дирака, задаваемого в $\vec{L}^2(\boldsymbol{R})$ дифференциальной операцией вида

$$D_q \equiv B\frac{d}{dx} + \Omega(x), \tag{1}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad \Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & r(x) \\ r(x) & -p(x) \end{pmatrix},$$

p, r — вещественные функции. Функция $q(x) = -r(x) + ip(x)$, называемая потенциалом, является предельно-периодической в метрике Степанова [1] функцией, сверхэкспоненциально быстро аппроксимирующейся периодическими. Задача решается путем «замыкания» соответствующих результатов спектральной теории периодического оператора Дирака [2], и использует технику, разработанную в работе [3] для оператора Штурма — Лиувилля.

Приведем в удобной форме необходимые результаты работы [2].

Предположим, что функция q принадлежит пространству $\widetilde{W}_2^k(a)$ a-периодических функций, имеющих k суммируемых с квадратом производных на интервале $[0, a]$. Пусть $\vec{c}(\lambda, x) = (c_1(\lambda, x), c_2(\lambda, x))$, $\vec{s}(\lambda, x) = (s_1(\lambda, x), s_2(\lambda, x))$ — фундаментальная система решений уравнения

$$D_q[\vec{y}] = \lambda\vec{y}, \tag{2}$$

определенная начальными условиями

$$s_1(\lambda, 0) = c_2(\lambda, 0) = 0, \; c_1(\lambda, 0) = s_2(\lambda, 0) = 1.$$

Введем обозначения:

$$u_+(\lambda) = \frac{1}{2}(c_1(\lambda, a) + s_2(\lambda, a)) - \tag{3}$$

функция Ляпунова; γ_m — корни функции $\dot{u}_+(z)$; $\Theta(z)$ — квазиимпульс, определяемый соотношением

$$u_+(z) = \cos\frac{a}{\pi}\Theta(z); \tag{4}$$

$u_-(\lambda)$ — функция, описываемая равенством

$$u_-(\lambda) = 1/2\,(c_1(\lambda, a) - s_2(\lambda, a)). \tag{5}$$

Пусть, далее $\ldots < \lambda_{-1} < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$ — собственные значения первой, $\ldots \leqslant \mu_{-2}^+ < \mu_0^- \leqslant \mu_0^+ < \ldots$ — периодической, $\ldots < \mu_{-1}^- \leqslant \leqslant \mu_{-1}^+ < \mu_1^- \leqslant \ldots$ — антипериодической краевых задач.

Введем последовательность комплексных чисел $\{\theta_m\}_{m \in \mathbf{Z}}$, являющихся независимыми спектральными данными оператора D_q, по формулам

$$\begin{cases} |\theta_m| = \operatorname{Im}\Theta(\gamma_m)|, \\ |\operatorname{Im}\theta_m| = |\operatorname{Im}\Theta(\lambda_m)|, \\ \operatorname{sign}\operatorname{Im}\theta_m = \operatorname{sign} u_-(\lambda_m), \\ \operatorname{sign}\operatorname{Re}\theta_m = \operatorname{sign}(\gamma_m - \lambda_m). \end{cases} \tag{6}$$

Этими равенствами определяется оператор $T : T[q] = \theta$, взаимно-однозначно отображающий пространство $\widetilde{W}_2^k(a)$ на пространство $w_2^k(a)$ последовательностей $\theta = \{\theta_m\}$ с нормой

$$\|\theta\|_{w_2^k(a)} = \left(|\theta_0|^2 + \sum_m \left|\left(\frac{\pi m}{a}\right)^k \theta_m\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим теперь пространство S^2 почти периодических функций Степанова с нормой

$$\|f\|_{S^2} = \sup_x \left(\int_x^{x+1} \{ |f(x)|^2 + |f^{(k)}(x)|^2 \} dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Обозначим через $A = \{a_n\}_1^\infty$ возрастающую последовательность положительных чисел такую, что $a_{n+1}/a_n \in \boldsymbol{N} \diagdown \{1\}$, и через R_n множество чисел вида $r = \frac{\pi m}{a_n}$, $m \in \boldsymbol{Z}$. Положим $R(A) = \bigcup R_n$.

Будем говорить, что функция $q \in S^2$ принадлежит классу $S_\infty^k(A)$, если найдется такая последовательность функций $q_n \in \widetilde{W}_2^k \times (a_n)$, что выполняется условие

$$\forall b > 0 \quad \lim_{n \to \infty} e^{ba_{n+1}} \| q - q_n \|_{S^2} = 0. \tag{8}$$

Нетрудно проверить, что при этом условии метрика Степанова (7) эквивалентна метрике Безиковича [1]

$$\|f\|_{B^2} = \lim_{a \to \infty} \left(\frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} \{ |f(x)|^2 + |f^{(k)}(x)|^2 \} dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

которой нам будет удобнее пользоваться в дальнейшем.

Введем пространство $K^k(A)$ комплексозначных последовательностей $\varkappa = \{\varkappa_r\}_{r \in R(A)}$ с нормой

$$\| \varkappa \| = \left(\sum_{r \in R(A)} r^{2k} |\varkappa_r|^2 + |\varkappa_0|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Выделим в нем множество $K_\infty^k(A)$ последовательностей, для которых выполняется соотношение

$$\forall b > 0 \lim_{n \to \infty} e^{ba_{n+1}} \sum_{r \in R(A) \diagdown R_n} |\varkappa_r|^2 r^{2k} = 0. \tag{9}$$

Пусть теперь $\{\theta_m^{(n)}\}_{-\infty}^{+\infty}$ — полный набор спектральных данных оператора D_{q_n}, вводимый по формулам (6), где $q_n(x)$ — член последовательности, аппроксимирующей потенциал $q \in S_\infty^k(A)$.

Положим

$$\varkappa_r^{(n)} = \begin{cases} \theta_m^{(n)}, & r = \dfrac{\pi m}{a_n} \in R_n, \\ 0, & r \notin R_n. \end{cases} \tag{10}$$

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Последовательность $\varkappa^{(n)} = \{\varkappa_r^{(n)}\}_{r \in R(A)}$ сходится в метрике пространства $K^k(A)$ к пределу $\varkappa$. Этот предел принадлежит $K_\infty^k(A)$ и не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности q_n, а оператор T_∞, сопоставляющий потенциалу q предел $\varkappa$, взаимно-однозначно отображает $S_\infty^k(A)$ на $K_\infty^k(A)$.*

Для простоты доказательство этой теоремы проводится в случае $k = 1$ и опирается на следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $q_1, q_2 \in \widetilde{W}_2^1(\pi)$, $\theta(1)$, $\theta(2)$ — *соответствующие им наборы спектральных данных. Тогда*

$$\|\theta(1) - \theta(2)\|_{w_2^1(\pi)} \leqslant P(\bar{Q})\, e^{CQ} \|q_1 - q_2\|_1^{\frac{1}{2}}, \tag{11}$$

$$\|q_1 - q_2\|_1 \leqslant P(\bar{\tau})\, e^{C(\widetilde{H}+\tau)} \|\theta(1) - \theta(2)\|_{w_2^1(\pi)}^{\frac{1}{2}}, \tag{12}$$

где введены обозначения $\|f\| = \|f\|_{L^2[0,\pi]}$,

$$\|f\|_1 = \|f\|_{\widetilde{W}_2^1[0,\pi]}, \quad \tau = \max_{i=1,2} \|\theta(i)\|_{l^2},$$

$$\bar{\tau} = \max_i \|\theta(i)\|_{w_2^1(\pi)}, \quad Q = \max_i \|q_i\|,$$

$$\bar{Q} = \max_i \|q_i\|_1, \quad \widetilde{H} = \max_{m,i} |\theta_m(i)|,$$

а постоянная C, коэффициенты и степень полинома $P(z)$ не зависят от потенциалов.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\vec{e}(\lambda, x)$ — решение системы (2) с начальными условиями $\vec{e}(\lambda, 0) = \vec{e} = (1, i)$. Как известно [2], существует интегральный оператор преобразования H с вещественным матричным ядром $H(x, t)$ такой, что

$$\vec{e}(z, x) = e^{-izx}\vec{e} + \int_{-x}^{x} H(x, t)\vec{e}e^{-izt}dt. \tag{13}$$

Все элементы матрицы H определяются функциями

$$\varphi(x, t) = (H(x, t)\vec{e}, \vec{e}), \quad \psi(x, t) = (H(x, t)\vec{e}, \bar{\vec{e}}).$$

Можно показать, что эти функции удовлетворяют системе уравнений

$$\varphi(x, y) = -\int_{\frac{x-y}{2}}^{x} \overline{q(t)}\, \psi(t, y - x + t)\, dt, \tag{14}$$

$$\psi(x, y) = -q\left(\frac{x+y}{2}\right) - \int_{\frac{x+y}{2}}^{x} q(t)\, \varphi(t; x - t + y)\, dt. \tag{15}$$

Продифференцируем эту систему по второй переменной и применим метод итераций. Тогда для функций $\psi(y) = \psi(\pi, y)$, $\varphi(y) = \varphi(\pi, y)$ получаем оценки

$$\|\varphi\|, \|\psi\| \leqslant Ce^{CQ}, \quad \|\varphi'\|, \|\psi'\| \leqslant P(\bar{Q})\, e^{CQ}. \tag{16}$$

Здесь и всюду в дальнейшем под обозначениями C и $P(z)$ понимаются постоянная и полином, не зависящие от потенциала.

Для двух потенциалов $q_1,\ q_2 \in \widetilde{W}_2^1(\pi)$ имеют место оценки

$$\|\varphi_1-\varphi_2\|,\ \|\psi_1-\psi_2\| \leqslant Ce^{CQ}\|q_1-q_2\|,$$
$$\|\varphi_1'-\varphi_2'\|,\quad \|\psi_1'-\psi_2'\| \leqslant P(\overline{Q})\,e^{CQ}\|q_1-q_2\|_1, \tag{17}$$

которые выводятся аналогично из соотношений, представляющих собой разность соответствующих уравнений системы (14)—(15), записанных для q_1 и q_2.

В следующих ниже леммах удобно использовать тот факт, что для λ_m и γ_m применима лемма 3 работы [4], и так как

$$|\lambda_{m+1}-\lambda_m|,\ |\gamma_{m+1}-\gamma_m| \geqslant C^{-1}e^{-CQ},$$

то $\forall f \in L^2(-\pi,\ \pi)$,

$$\sum_m \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-i\lambda_m t}dt\right|^2 \leqslant \|f\|^2Ce^{CQ}. \tag{18}$$

Лемма 1. *Пусть* $q \in \widetilde{W}_2^1(\pi)$. *Тогда при* $m \neq 0$ *справедливы формулы*

$$\lambda_m = m + \frac{\|q\|^2}{2\pi m} + \frac{\omega_m'}{m}, \tag{19}$$

$$\gamma_m = m + \frac{\|q\|^2}{2\pi m} + \frac{\omega_m''}{m}, \tag{20}$$

где ω_m', ω_m'' *удовлетворяют оценке*

$$\left(\sum \omega_m^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant P(\overline{Q})\,e^{CQ}. \tag{21}$$

Доказательство. Из представлений (13)—(15) получаем, что λ_m удовлетворяют уравнению

$$0 = s_1(\lambda_m,\ \pi) \equiv -\sin\lambda_m\pi + \frac{\|q\|^2}{2\lambda_m}\cos\lambda_m\pi -$$
$$-\frac{\operatorname{Im} q(0)}{\lambda_m}\sin\lambda_m\pi - \operatorname{Re}\frac{1}{\lambda_m}\int_{-\pi}^{\pi} N(t)\,e^{-i\lambda_m t}dt, \tag{22}$$

где $N(t) = \dfrac{\varphi'(t)+\psi'(t)}{2}$.

Стандартными рассуждениями с использованием теоремы Руше и неравенств (16) можно получить сначала грубую оценку

$$|\lambda_m - m| \leqslant \frac{P(\overline{Q})\,e^{CQ}}{m}. \tag{23}$$

Пусть $l = [10P(\overline{Q})\,e^{CQ}]$, где P и C берутся из оценки (23). При $|m| \leqslant l$ формула (19) очевидна. При $|m| > l$ $|\lambda_m - m| < \frac{1}{10}$, и из (16), (18), (22), (23) вытекают следующие неравенства:

$$\left|\lambda_m - m - \frac{\|q\|^2}{2\pi m} + \frac{1}{\pi} s_1(\lambda_m, \pi)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\lambda_m - m - \frac{1}{\pi}\sin\pi(\lambda_m - m)\right| +$$
$$+\left|\frac{\|q\|^2}{2\pi m} - \frac{\|q\|^2}{2\pi\lambda_m}\cos\lambda_m\pi\right| + \frac{\omega_m}{\lambda_m} \leqslant \frac{\omega_m'}{m},$$

где ω_m, ω_m' удовлетворяют (21), что и доказывает (19).

Для получения оценки (20) продифференцируем формулу

$$u_+(z) = \cos\pi z + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,e^{-izt}dt, \tag{24}$$

вытекающую из (3) и (13). Получим уравнение для γ_m:

$$\frac{1}{\pi}\dot{u}_+(\gamma_m) \equiv -\sin\gamma_m\pi + \frac{\|q\|^2}{2\gamma_m}\cos\gamma_m\pi -$$
$$-\frac{\|q\|^2}{2\gamma_m^2\pi}\sin\pi\gamma_m + \frac{1}{2\gamma_m^2\pi}\operatorname{Im}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi' e^{-i\gamma_m t}dt -$$
$$-\frac{1}{2\gamma_m\pi}\operatorname{Re}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi'(t)\cdot t e^{-i\gamma_m t}dt = 0. \tag{25}$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны.

Лемма 2. *Справедливы оценки*

$$\lambda_m(2) - \lambda_m(1) = \frac{\|q_2\|^2 - \|q_1\|^2}{2\pi m} + \frac{\Omega_m'}{m}, \tag{26}$$

$$\gamma_m(2) - \gamma_m(1) = \frac{\|q_2\|^2 - \|q_1\|^2}{2\pi m} + \frac{\Omega_m''}{m}, \tag{27}$$

где величины Ω_m', Ω_m'' удовлетворяют неравенству

$$\left(\sum\Omega_m^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant P(\overline{Q})\,e^{CQ}\|q_1 - q_2\|_1. \tag{28}$$

Доказательство. Из вариационного принципа и гладкости потенциалов q_1 и q_2 вытекает равномерная оценка

$$|\lambda_m(1) - \lambda_m(2)| \leqslant C\|q_1 - q_2\|, \tag{29}$$

из которой следует справедливость формулы (26) при $|m| \leqslant l$. Число l введено в лемме 1. При $|m| > l$ воспользуемся неравенствами (23), (29), (16), (17), (18) и уравнением (22), записанным для q_1 и q_2. Тогда

$$\left|\lambda_m(1) - \lambda_m(2) - \frac{\|q_1\|^2 - \|q_2\|^2}{2\pi m} + \frac{1}{\pi}s_1^{(1)}(\lambda_m(1), \pi) -\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\pi}S_1^{(2)}(\lambda_m(2), \pi)\right| \leqslant \left|\lambda_m(1) - \lambda_m(2) - \frac{2}{\pi}\sin\frac{\lambda_m(1) - \lambda_m(2)}{2}\pi\,\times\right.$$

$$\times \cos\pi \left|\frac{\lambda_m(1)+\lambda_m(2)}{2}\right| + \left|\frac{\|q_1\|^2-\|q_2\|^2}{2\pi m} - \right.$$

$$\left. - \frac{\|q_1\|^2-\|q_2\|^2}{2\pi\lambda_m(1)}\cos\lambda_m(1)\pi\right| + \|q_2\|^2\left|\frac{\cos\lambda_m(1)\pi}{2\pi\lambda_m(1)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos\lambda_m(2)\pi}{2\pi\lambda_m(2)}\right| + \frac{\sin\lambda_m(1)\pi}{\pi\lambda_m(1)}\,|\operatorname{Im} q_1(0) - \operatorname{Im} q_2(0)| +$$

$$+ |\operatorname{Im} q_2(0)|\left|\frac{\sin\lambda_m(1)\pi}{\pi\lambda_m(1)} - \frac{\sin\lambda_m(2)\pi}{\pi\lambda_m(2)}\right| +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\left|\frac{1}{\lambda_m(1)} - \frac{1}{\lambda_m(2)}\right|\left|\operatorname{Re}\int_{-\pi}^{\pi} N_1 e^{-i\lambda_m(1)t}dt\right| +$$

$$+ \frac{1}{|2\pi\lambda_m(2)|}\left|\operatorname{Re}\int_{-\pi}^{\pi} N_2 e^{-i\lambda_m(1)t}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-it)^n}{n!}(\lambda_m(2)-\lambda_m(1))^n\,dt\right| +$$

$$+ \frac{1}{|2\pi\lambda_m(2)|}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(N_1-N_2)\,e^{-i\lambda_m(1)t}dt\right| \leqslant \frac{\Omega_m}{m},$$

где величины Ω_m удовлетворяют оценке (28). Представление (27) для γ_m может быть получено с использованием следующего неравенства:

$$|\gamma_m(1) - \gamma_m(2)| \leqslant P(\overline{Q})\,e^{CQ}\,\|q_1 - q_2\|,$$

доказательство которого можно провести тем же методом, что и в работе [3].

Лемма 3. *Имеет место формула*

$$u_+(z) = \cos\pi z + \frac{\|q\|^2}{2\pi z}\sin\pi z - \frac{d}{4z^2}\left(\sin\pi z - \frac{\|q\|^2}{2z}\cos\pi z\right) -$$

$$- \frac{\|q\|^4}{8z^2}\cos\pi z + \frac{A}{8z^3}\sin\pi z + \frac{1}{8z^3}\operatorname{Im}\int_{-\pi}^{\pi} G'\left(\frac{\pi-t}{2}\right)e^{-izt}dt -$$

$$- \frac{1}{2z^2}\left|\int_0^{\pi} q'(t)\,e^{-2izt}dt\right|^2\cos\pi z + \frac{\sin\pi z}{4z^2}\times$$

$$\times \operatorname{Im}\int_0^{\pi} dv e^{2izv}\int_v^{\pi} dt\overline{q'(t)}\,q'(t-v), \qquad (29)$$

где

$$A = |q(0)|^2\|q\|^2 - \frac{\|q\|^6}{6} +$$

$$+ \operatorname{Re}\int_0^{\pi} dt\ |q(t)|^2\int_0^{t} q'(\tau)\,\overline{q(\tau)}\,d\tau;$$

$$d = -i\int_0^{\pi}\overline{q'(t)}q(t)\,dt,$$

$$G(y) = -\overline{q(\pi)}\, q(\pi - y) \int\limits_0^{\pi - y} |q(t)|^2\, dt + \int\limits_y^{\pi} \overline{q'(t)} \times$$

$$\times q(t - y) \int\limits_0^{t-y} |q(\tau)|^2\, d\tau dt + 2\overline{q(y)} \int\limits_0^y q(t) \times$$

$$\times \varphi'(t, -t)\, dt - 2 \int\limits_0^{\pi - y} \overline{q(t-y)}\, q(t)\, \varphi'(t, t)\, dt.$$

Для доказательства этой леммы нужно дважды проинтегрировать по частям второе слагаемое в формуле (24), подставить в полученное выражение результат двукратного дифференцирования тождества

$$\varphi(x, y) = \int\limits_{\frac{x-y}{2}}^{x} q\left(t - \frac{x-y}{2}\right) \overline{q(t)}\, dt +$$

$$+ \int\limits_{\frac{x-y}{2}}^{x} dt\, \overline{q(t)} \int\limits_{t - \frac{x-y}{2}}^{t} q(\tau)\, \varphi(\tau, 2t - y + x - \tau)\, d\tau,$$

вытекающего из системы (14)—(15), и взять вещественную часть от получившихся внеинтегральных членов.

Заметим, что функция $G(y)$ гладкая и допускает оценку вида (16), а для двух потенциалов вида (17).

Лемма 4. *Имеют место оценки*

$$\left| u_+^{(1)}(\gamma_m(1)) - u_+^{(2)}(\gamma_m(2)) \right| \leqslant \frac{\tilde{\Omega}_m \tilde{\omega}_m}{m^2}. \tag{30}$$

Доказательство. Из представлений (29), (25), а также результатов лемм 1, 2 следует, что

$$u_+(\gamma_m) = \cos \pi\gamma_m + \frac{\|q\|^2}{2\gamma_m} \sin \pi\gamma_m - \frac{\|q\|^4}{8\gamma_m^2} \cos \pi\gamma_m + \frac{\omega_m}{m},$$

$$\left| u_+^{(1)}(\gamma_m(1)) - u_+^{(2)}(\gamma_m(2)) \right| \leqslant \frac{\Omega_m}{m},$$

$$u_+^{(1)}(\gamma_m(1)) - u_+^{(2)}(\gamma_m(2)) = \cos \pi\gamma_m(1) -$$

$$- \cos \pi\gamma_m(2) + \frac{\|q_1\|^2}{2\gamma_m(1)} \sin \pi\gamma_m(1) - \frac{\|q_2\|^2}{2\gamma_m(2)} \sin \pi\gamma_m(2) -$$

$$- \frac{\|q_1\|^4}{8\gamma_m^2(1)} \cos \pi\gamma_m(1) + \frac{\|q_2\|^4}{8\gamma_m^2(2)} \cos \pi\gamma_m(2) + \frac{\Omega_m''' \omega_m'''}{m^2},$$

где ω_m, ω_m''' удовлетворяют (21), а Ω_m, Ω_m''', соответственно (28). Отсюда, учитывая неравенство $|u_+(\gamma_m)| \geqslant 1$, получаем следующие оценки:

$$\left| u_+^{(1)}(\gamma_m(1)) - u_+^{(2)}(\gamma_m(2)) \right| \leqslant \left| \left(u_+^{(1)}(\gamma_m(1)) - u_+^{(2)}(\gamma_m(2)\right) \times\right.$$

$$\times \left(u_+^{(1)}(\gamma_m(1)) + u_+^{(2)}(\gamma_m(2))\right)| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \left(\sin \pi\gamma_m(1) - \frac{\| q_1 \|^2}{2\gamma_m(1)} \cos \pi\gamma_m(1)\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \left(\sin \pi\gamma_m(2) - \frac{\| q_2 \|^2}{2\gamma_m^2} \cos \pi\gamma_m(2)\right)^2 \right| +$$

$$+ \frac{\omega_m \Omega_m}{m^2} + Ce^{CQ} \frac{\omega_m''' \Omega_m'''}{m^2} \leqslant \frac{\widetilde{\Omega}_m \widetilde{\omega}_m}{m^2}.$$

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству неравенства (11). Из формул (6) и равенства $u_+^2(\lambda_m) - u_-^2(\lambda_m) = 1$ следует, что $\operatorname{sh} \operatorname{Im} \theta_m = u_-(\lambda_m)$.

Из формул (5), (13)—(15) можно получить представление

$$u_-(\lambda) = -2 \operatorname{Re} q(0) \frac{\sin \lambda\pi}{\lambda} - \operatorname{Im} \frac{1}{\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} \psi'(t) e^{-i\lambda t} dt,$$

из которого видно, что

$$| u_-^{(1)}(\lambda_m(1)) - u_-^{(2)}(\lambda_m(2)) | \leqslant \frac{\Omega_m}{m},$$

$$| u_-(\lambda_m) | \leqslant \frac{\omega_m}{m},$$

где ω_m, Ω_m удовлетворяют условиям (21) и (28). Поэтому

$$| \operatorname{Im} \theta_m(1) - \operatorname{Im} \theta_m(2) | \leqslant | \operatorname{sh} \operatorname{Im} \theta_m(1) - \operatorname{sh} \operatorname{Im} \theta_m(2) | \leqslant \frac{\Omega_m}{m}, \quad (31)$$

$$| \operatorname{Im} \theta_m | \leqslant \frac{\omega_m}{m}. \quad (32)$$

Далее, так как $\dot{u}_+(\gamma_m) = 0$, то в силу (4) и (6)

$$\operatorname{Re}^2 \theta_m \leqslant \operatorname{ch} | \theta_m | - \operatorname{ch} | \operatorname{Im} \theta_m | \leqslant Ce^{CQ} (\gamma_m - \lambda_m)^2. \quad (33)$$

Из леммы 2 вытекает

$$| \gamma_m(1) - \lambda_m(1) - \gamma_m(2) + \lambda_m(2) | \leqslant \frac{\Omega_m' + \Omega_m''}{m} = \frac{\Delta_m}{m}.$$

Если для данного номера m $| \gamma_m(1) - \lambda_m(1) | \leqslant 2 \frac{\Delta_m}{m}$, то $| \gamma_m(2) - \lambda_m(2) | \leqslant \frac{3\Delta_m}{m}$, и тогда из неравенства (33)

$$(\operatorname{Re} \theta_m(1) - \operatorname{Re} \theta_m(2))^2 \leqslant Ce^{CQ} \frac{\Delta_m^2}{m^2}. \quad (34)$$

Если же $| \gamma_m(1) - \lambda_m(1) | > \frac{2\Delta_m}{m}$, то в силу формул (6) $\operatorname{sign} \operatorname{Re} \theta_m(1) = \operatorname{sign} \operatorname{Re} \theta_m(2)$, а значит, из леммы 4, а также из неравенств (31) и (32) вытекает следующая оценка:

$$(\operatorname{Re}\theta_m(1)-\operatorname{Re}\theta_m(2))^2 \leqslant |\operatorname{ch}|\theta_m(1)|-\operatorname{ch}|\theta_m(2)\|+$$
$$+|\operatorname{Im}\theta_m(1)-\operatorname{Im}\theta_m(2)|\{|\operatorname{Im}\theta_m(1)|+|\operatorname{Im}\theta_m(2)|\}\leqslant$$
$$\leqslant |u_+^{(1)}(\gamma_m(1))-u_+^{(2)}(\gamma_m(2))|+\frac{\Omega_m\omega_m}{m^2}\leqslant$$
$$\leqslant (\tilde{\Omega}_m\tilde{\omega}_m+\Omega_m\omega_m)\,m^{-2}. \qquad (35)$$

Объединяя неравенства (31), (34), (35), (28), (21), а также легко получаемую из приведенных выше рассуждений оценку

$$|\theta_0(1)-\theta_0(2)|\leqslant P(\overline{Q})\,e^{CQ}\,\|q_1-q_2\|_1,$$

окончательно получаем неравенство (11). Обратное неравенство (12) устанавливается методом работ [5, 2]. Этим завершается доказательство теоремы 2.

Следствие. *Пусть* $q_1,\ q_2\in\tilde{W}_2^1(a)$. *Тогда имеют место оценки*

$$\|\theta(1)-\theta(2)\|_{w_2^1(a)}\leqslant Ce^{Ca\beta}\,\|q_1-q_2\|_{B^2}^{\frac{1}{2}}, \qquad (36)$$

$$\|q_1-q_2\|_{B^2}\leqslant Ce^{Ca\alpha}\,\|\theta(1)-\theta(2)\|_{w_2^1(a)}^{\frac{1}{2}}, \qquad (37)$$

где

$$\beta=\overline{Q}+\sqrt{\overline{Q}}+1,\quad \alpha=\overline{\tau}+\sqrt{\overline{\tau}}+1+H,$$
$$\overline{Q}=\max_i\|q_i\|_{B^2},\quad \overline{\tau}=\max_i\|\theta(i)\|_{w_2^1(a)},\quad H=\max_{i,m}|\theta_m(i)|.$$

Это следствие несложно получить, используя результаты § 11 работы [2].

Доказательство теоремы 1.

Прежде всего отметим, что если рассматривать потенциал $q_n(x)$ как функцию периода a_{n+1}, то ее спектральные данные будут иметь вид

$$\tilde{\theta}_k^{(n)}=\begin{cases}\theta_m^{(n)}, & k=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}m,\\[2ex] 0, & k\neq\dfrac{a_{n+1}}{a_n}m,\quad m\in\mathbf{Z},\end{cases}$$

т. е. последовательностям $\{\tilde{\theta}_m^{(n)}\}$ и $\{\tilde{\theta}_m^{(n)}\}$ отвечает по формулам (10) одна и та же функция $\varkappa^{(n)}\in K^1(A)$. Так как $\sup\limits_n\|q_n\|_{B^2}<\infty$, то из (36) и (8) вытекают следующие неравенства:

$$\|\varkappa^{(n+1)}-\varkappa^{(n)}\|_{K^1(A)}=\|\theta^{(n+1)}-\tilde{\theta}^{(n)}\|_{w_2^1(a_{n+1})}\leqslant$$

$$\leqslant Ce^{Ca_{n+1}\beta} \| q_{n+1} - q_n \|_{B^2}^{\frac{1}{2}} \leqslant Ce^{-a_{n+1}b/2}$$

при $b > 4C\beta$.

Аналогично при $k > n$

$$\| \varkappa^{(k)} - \varkappa^{(n)} \| \leqslant Ce^{-a_{n+1}b/4}, \tag{38}$$

т. е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \varkappa^{(n)} = \varkappa \in K^1(A)$. Этот предел принадлежит $K^1_\infty(A)$. Действительно, так как $\varkappa_r^{(n)} = 0$ при $r \notin R_n$, то из (38)

$$\sum_{r\in R(A)\setminus R_n} r^2 |\varkappa_r|^2 \leqslant \| \varkappa - \varkappa^{(n)} \|^2_{K^1(A)} \leqslant Ce^{-ba_{n+1}/4}.$$

Пусть теперь $\varkappa$ — произвольный элемент пространства $K^1_\infty(A)$. Для любого фиксированного $n \geqslant 1$ положим $\theta_m^{(n)} = \varkappa_r^{(n)}$ при $m = a_n r/\pi$, $r \in R_n$. Пусть $q_n(x)$ — отвечающий этому спектральному набору a_n-периодический потенциал. Рассмотрим его как потенциал периода a_{n+1}. Тогда из (37) и (9) вытекают следующие неравенства:

$$\| q_{n+1} - q_n \|_{B^2} \leqslant Ce^{Ca_{n+1}\alpha} \| \theta^{(n+1)} - \tilde{\theta}^{(n)} \|^{\frac{1}{2}}_{w_2^1(a_{n+1})} \leqslant$$

$$\leqslant Ce^{Ca_{n+1}\alpha} \Big(\sum_{r\in R(A)\setminus R_n} r^2 |\varkappa_r|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant Ce^{-ba_{n+1}/4} \text{ при } b > 4C\alpha.$$

Теорема 1 доказана.

Автор выражает глубокую признательность Л. А. Пастуру за постановку задачи и внимание к работе, а также В. А. Ткаченко за ценные советы.

Список литературы: 1. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. — М.: Гос. изд-во тех.-теорет. лит., 1953.—396 с. 2. *Мисюра Т. В.* Обратная задача для одномерного оператора Дирака с периодическими коэффициентами. — Дис.... канд. физ.-мат. наук, Х., 1980.—106 с. 3. *Пастур Л. А., Ткаченко В. А.* К спектральной теории одномерного оператора Шредингера с предельно-периодическим потенциалом. — Докл. АН СССР, 1984, 279, № 5, с. 1050—1053. 4. *Левин Б. Я.* Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа. — Тр. ФТИНТ АН УССР. Мат. физика и функцион. анализ, вып. 1, 1969, с. 136—146. 5. *Марченко В. А., Островский И. В.* Аппроксимация периодических потенциалов конечнозонными. — Вестн. Харьк. ун-та, № 205. Прикл. математика и механика. Вып. 45. — Х.: Вища шк., 1980, с. 4—40.

Поступила в редколлегию 26.04.85.