В заключение сформулируем несколько более общее утверждение, чем содержащееся в теореме 3.

Теорема 4. *Пусть* $F \in S_2$, $g_j \in S$, $P_j \in S_1$ $(j = 1, 2)$. *Тогда тождество* $P_1(z)\, e^{g_1(z)} + P_2(z)\, e^{g_2(z)} = F(z)$ *невозможно, если только* $g_1(z) \not\equiv g_1(0)$, $P_1(z) \not\equiv 0$.

Доказательство теоремы 4 совершенно аналогично доказательству теоремы 3.

Список литературы: 1. *Виттих Г.* Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям.— М.: Физматгиз, 1960.— 319 с. 2. *Hayman W. K.* Angular value distribution of power series with gaps.— Proc. London Math. Soc. (3), 1972, **24**, № 4, p. 590—624. 3. *Стрелиц Ш. И.* Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений.— Вильнюс: Минтис, 1972.— 467 с.

Поступила в редколлегию 24.11.84.

УДК 517.925.71

В. Р. СМИЛЯНСКИЙ

СВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РАНГА К СИСТЕМЕ ПЕРВОГО РАНГА. 1.

В работе рассматривается система $(r+1)$-го ранга

$$\frac{dW}{dz} = z^r B(z)\, w,\; w = \{w_1, w_2, \ \ldots\ , w_n\}, \tag{1}$$

где r — неотрицательное целое число, матрица $B(z)$ голоморфна в окрестности $z = \infty$, $B(\infty) \neq 0$ и все ее характеристические корни $\lambda_1, \ \ldots\ , \lambda_n$ различны. Система (1) имеет формальную матрицу — решение вида

$$\hat{\Phi}(z) = P(z)\, z^R \exp[Q];$$

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu z^{-\nu};\ \det P_0 \neq 0;\ R = \mathrm{diaq}\{r_1, \ \ldots\ , r_n\}, \tag{2}$$

$$Q(z) = \mathrm{diaq}\{q_1(z), \ \ldots\ , q_n(z)\};$$

$$q_j(z) = \sum_{\nu=1}^{r+1} \lambda_j^{(\nu)} z^\nu/\nu;\ \lambda_j^{(r+1)} \equiv \lambda_j,$$

где $P(z)$ — формальный ряд; R — постоянная матрица; $\lambda_j^{(\nu)}$ — константы. В теории асимптотических решений системы (1) существенную роль играют линии в комплексной z-плоскости, определяемые условием

$$\mathrm{Re}\, q_{j_1} = \mathrm{Re}\, q_{j_2} = \cdots = \mathrm{Re}\, q_{j_k};\ (2 \leqslant k \leqslant n), \tag{3}$$

которое при больших $|z|$ практически сводится к

$$\mathrm{Re}\, \lambda_{j_1} z^{r+1} = \mathrm{Re}\, \lambda_{j_2} z^{r+1} = \cdots = \mathrm{Re}\, \lambda_{j_k} z^{r+1};\ (2 \leqslant k \leqslant n). \tag{4}$$

Возьмем какую-либо линию (4) в качестве исходной — l_1 и последовательно обозначим остальные через l_2, l_3, ... Обозначим через L число линий l_ν в секторе $l_1 \leqslant \arg z < l_1 + \pi/r + 1$ (очевидно, что $1 \leqslant L \leqslant n(n-1)/2$). В этом секторе любая пара выражений $\operatorname{Re} \lambda_\alpha z^{r+1}$, $\operatorname{Re} \lambda_\beta z^{r+1}$ $(\alpha \neq \beta)$ становится равной только на одной линии l_ν. В дальнейшем любой сектор z-плоскости (полуоткрытый или открытый), который обладает указанным свойством, будем называть стандартным сектором (С. С.) [1, с. 98]. Если матрица P_0 и нумерация характеристических корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ зафиксированы, то в любом С. С. существует единственная фундаментальная матрица (ф. м.), для которой формальное решение (2) является асимптотическим представлением при больших $|z|$. Другими словами: в любом С. С. асимптотическое представление $\Phi(z)$ однозначно определяет ф. м., имеющую это представление ([1], теорема единственности — теорема 1.1). Ф. м., имеющую асимптотическое представление (2) в каком-либо секторе, будем называть асимптотически базисной в этом секторе. Далее будем считать, что нумерация $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (а значит, и столбцов $\hat{\Phi}(z)$ — см. (2)) выбрана так, что $\operatorname{Re} \lambda_\alpha z^{r+1} < \operatorname{Re} \lambda_{\alpha+1} z^{r+1}$ в секторе $l_1 < \arg z < l_2$. Обозначим $\alpha_0 = 2\pi/r+1$, $i = \sqrt{-1}$, $\varepsilon = \exp[i\alpha_0]$. Пусть $W_k(z\varepsilon^\nu)$ — ф. м. (ее независимая переменная взята в виде $z\varepsilon^\nu$, где ν может принимать значения $0, 1, 2, \ldots$), причем ф. м. такая, что $W_k z\varepsilon^{k-1}$ (т. е. $W_k(z\varepsilon^\nu$ при $\nu = k-1$) асимптотически базисна в С. С.

$$l_2 - \frac{\pi}{r+1} + (k-1)\frac{2\pi}{r+1} \leqslant \arg(z\varepsilon^{k-1}) < l_2 + (k-1)\frac{2\pi}{r+1}$$
$$(k = \overline{1, r+1}) \tag{5}$$

(в (5) предполагается, что $l_2 - \dfrac{\pi}{r+1} \leqslant \arg z < l_2\Big)$ и пусть $W_1 \times$ $\times (z \exp[i2\pi]) = W_1(z)\,Y$, где Y — постоянная неособая («циклическая») матрица. Тогда согласно теоремам 1.7, 1.2 [1]

$$W_{k-1}(z) = W_k(z)\, F_{2(k-1)} F_{2(k-1)-1}, \quad k = \overline{2, r+1}; \tag{6}$$

$$Y = \exp[i2\pi R]\, F_{2(r+1)} F_{2(r+1)-1} \ldots F_2 F_1, \tag{7}$$

где постоянные матрицы $F_{(\chi+1)}$ $(\chi = 0, 1, 2, \ldots)$ — верхние треугольные с единичными элементами на главной диагонали для четных χ и нижние треугольные с единичными элементами на главной диагонали для нечетных χ. Нетривиальные элементы матриц $F_{\chi+1}$ выражаются через множители Стокса (детали см. в [1, 2]). Если в (1)

$$B(z) = \sum_{\nu=0}^{r+1} B_\nu z^{-\nu}, \tag{8}$$

то точка $z = 0$ является регулярной особой точкой и ф. м. может быть представлена в виде $S(z)\, z^\Delta$, где матрица $S(z)$ голоморфна при $z = 0$ и никакие два характеристических корня постоянной

матрицы Δ не отличаются на положительное целое. Существует ф. м. $\Psi(z) = S_0(z) z^J$, где матрица $S_0(z)$ голоморфна при $z = 0$, а J — есть жорданова форма матрицы Δ. Между ф. м. $\Psi(z\varepsilon^{k-1})$ и $W_k(z\varepsilon^{k-1})$ существует соотношение

$$\Psi(z\varepsilon^{k-1}) = W_k(z\varepsilon^{k-1}) T_k, \; k = \overline{1, r+1}, \tag{9}$$

где постоянную неособую матрицу T_k будем называть матрицей связи, а ее элементы $[T_k]_{\eta\nu}$ — коэффициентами связи.

Наряду с системой (1) можно рассматривать уравнение

$$\sum_{m=0}^{n} z^{(n-m)r} b_m(z) \frac{d^m y}{dz^m} = 0 \;\; b_n(z) \equiv 1 \tag{10}$$

$(r+1)$-го ранга ($b_m(z)$ голоморфны в окрестности $z = \infty$), которое с помощью формул $w_m = z^{-(m-1)r} d^{(m-1)}y/dt^{(m-1)}$ $(m = \overline{1, n})$ может быть сведено к системе типа (1).

Пуанкаре [3] (см. также [4]) предложил для уравнения (10) метод построения вспомогательного уравнения первого ранга и порядка n^{r+1}. Решения уравнения (10) могут быть выражены через решения вспомогательного уравнения с помощью квадратур. В работе [5] метод Пуанкаре применен к исследованию уравнения второго порядка (с рациональными коэффициентами). Непосредственно к системе (1) метод Пуанкаре не применим.

В настоящей работе для системы (1) предложен метод построения вспомогательной системы первого ранга из n^{r+1} уравнений. При этом: а) показано, что решения системы (1) могут быть выражены через решения вспомогательной системы с помощью квадратур; б) нетривиальные элементы матриц $F_{\chi+1}$ могут быть найдены по элементам циклической матрицы $Y^{\chi+1}$ некоторой ф. м. вспомогательной системы; в) найдены и проанализированы соотношения между коэффициентами связи $[T_k]_{\eta\nu}$ и коэффициентами связи $[\overline{T}_k]_{\eta\nu}$ вспомогательной системы. Пункты б) и в) дают ответ на аналогичные вопросы при исследовании уравнения (10) методом Пуанкаре. (В работе Пуанкаре они не рассматривались. Там исследовалось асимптотическое разложение только вдоль положительной полуоси z). Таким образом, исследование системы ранга $(r+1)$ сведено к исследованию системы первого ранга.

Предлагаемый метод является обобщением метода Пуанкаре с помощью полилинейного преобразования и результатов работы [1].

1. Система первого ранга и система (1). Элемент ф. м. $LL(z)$ первой вспомогательной системы зададим через элементы $[W_k \times (z\varepsilon^{k-1})]_{i_{k-1}\nu_{k-1}}$ ф. м. $W_k(z\varepsilon^{k-1})$ в виде

$$\begin{gathered}[U(z)]_{[i_0+n(i_1-1)+\dots+n^r(i-1)],\,[\nu_0+n(\nu_1-1)+\dots+n^r(\nu_r-1)]} = \\ = [W_1(z)]_{i_0\nu_0} [W_2(z\varepsilon)]_{i_1\nu_1} \; \dots \; [W_{r+1}(z\varepsilon^r)]_{i_r\nu_r}, \\ i_{k-1} = \overline{1, n}; \; \nu_{k-1} = \overline{1, n}; \; k = \overline{1, r+1}. \end{gathered} \tag{11}$$

Далее индексы вида $[i_0 + n(i_1 - 1) + \cdots + n^r(i_r - 1)]$ будем обозначать через $[i]$, а индексы, например, вида $i_r + n(i_0 - 1) + \cdots + n^{r-1}(i_{r-2} - 1) + n^r(i_{r-1} - 1)]$ — через $[i_r, i_0, i_1, \ldots, i_{r-1}]$ и т. д. Отсюда $[i_0, i_1, \ldots, i_r] \equiv [i]$. Ф. м. $W_k(z\varepsilon^{k-1})$ есть ф. м. системы

$$\frac{dw(z, \varepsilon^{k-1})}{dz} = z^r B(z\varepsilon^{k-1})\, w(z\varepsilon^{k-1}) \tag{12}$$

$$k = \overline{1, r+1};\ w(z\varepsilon^{k-1}) = \{w_1(z\varepsilon^{k-1}), \ldots, w_n(z\varepsilon^{k-1})\}.$$

Систему из n^{r+1} уравнений, чьей ф. м. является $U(z)$, запишем так:

$$\frac{du(z)}{dz} = A(z)\, u(z);\ u(z) = \{u_1(z), \ldots, u_{n^{r+1}}(z)\}. \tag{13}$$

Теорема 1.1. А. *Отличные от нуля элементы матрицы $A(z)$ имеют вид либо*

$$[A(z)]_{[\nu],[\nu]} = z^r(B(z)_{\nu_0\nu_0} + [B(z\varepsilon)]_{\nu_1\nu_1} + \cdots + [B(z\varepsilon^r)]_{\nu_r\nu_r}),$$
$$\nu_j = \overline{1, n},\ j = \overline{0, r}, \tag{14}$$

либо

$$[A(z)]_{[\nu],[\nu_0, \ldots, \nu_{j-1}, \omega_j, \nu_{j+1}, \ldots, \nu_r]} = z^r[B(z\varepsilon^j)]_{\nu_j\omega_j},$$
$$\nu_j = \overline{1, n};\ \omega_j = \overline{1, n};\ j = \overline{0, r};\ \nu_j \neq \omega_j. \tag{15}$$

Матрица $A(z) = z^r A_1(z)$, где матрица $A_1(z)$ — голоморфна в окрестности $z = \infty$. Матрица $A_1(\infty)$, вообще говоря, имеет кратные характеристические корни (например, в случае $n = 2$; $r = 1$; $B(z) = B_0 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2}$).

Б. 1. *Ф. м. $U(z)$ имеет в С. С. $l_2 - \frac{\pi}{r+1} \leqslant \arg z < l_2$ асимптотическое представление вида*

$$\hat{U}(z) = P(z)\, z^{\bar{R}} \exp[\bar{Q}(z)];\ \bar{P}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{P}_\nu z^{-\nu};$$
$$\bar{Q}(z) = \operatorname{diag}\{\bar{q}_1(z), \ldots, \bar{q}_{n^{r+1}}(z)\}; \tag{15a}$$
$$\bar{q}_\nu(z) = \sum_{k=0}^{r} q_{\nu_k}(z\varepsilon^k);$$
$$\bar{R} = \operatorname{diag}\{\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_{n^{r+1}}\};\ \bar{r}_{[\nu]} = \sum_{k=0}^{r} r_{\nu_k}.$$

Каждый элемент $[\hat{U}(z)]_{[i],[\nu]}$ матрицы $\hat{U}(z)$ получается подстановкой в (11) *асимптотических представлений сомножителей $[W_k(z\varepsilon^{k-1})]_{i_{k-1}\nu_{k-1}}$ в соответствующих С. С.* (5). *Таким образом, ф. м. $U(z)$ асимптотически базисна в С. С. $l_2 - \frac{\pi}{r+1} \leqslant \arg z < l_2$.*

2. *В любом С. С. существует ф. м. $\Omega(z)$ системы* (13), *асимптотически базисная в этом секторе. Ее асимптотическое представление $\hat{\Omega}(z)$ в этом С. С. имеет ту же структуру (но не обязательно такие же $\bar{P}_\nu$), что и* (15а).

3. *Пусть матрица $\bar{P}_0$ и нумерация столбцов $\hat{\Omega}(z)$ зафиксированы. Тогда в любом С. С. существует единственная ф. м. системы* (13), *асимптотически базисная в этом секторе. Другими словами: в любом С. С. асимптотическое представление $\hat{\Omega}(z)$ однозначно определяет ф. м. $\Omega(z)$, имеющую это представление.*

В. *Ф. м. $U(z)$ может быть представлена в виде*

$$U(z) = z^Q V(z);\ Q = \frac{1}{i\alpha_0} \operatorname{Ln} G,\ (i = \sqrt{-1}). \tag{16}$$

Здесь матрица G получена из единичной матрицы E порядка n^{r+1} следующим перемещением строк:

$$[i_0, i_1, \ldots, i_r]\text{-я строка переходит в } [i_r, i_0, \ldots, i_{r-1}]. \tag{17}$$

При этом

$$V(z\varepsilon) = V(z)\,\bar{Y}, \tag{18}$$

где $\bar{Y}$ — постоянная неособая матрица.

Г. *Замена (16) приводит ко второй вспомогательной системе*

$$\frac{dv(z)}{dz} = M(z)\,v(z);\ v(z) = \{v_1(z), \ldots, v_{n^{r+1}}(z)\}, \tag{19}$$

($M(z) = z^r M_1(z)$; *матрица $M_1(z)$ голоморфна в окрестности $z = \infty$, которая инвариантна относительно замены $z \to z(\varepsilon)$ и заменой $z^{r+1} = \tau$ сводится к системе первого ранга $\frac{dv(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{(r+1)} M_1(\tau)\,v(\tau)$.*

Для обеих систем матрица $M_1(\infty)$ имеет, вообще говоря, кратные характеристические корни (например, в случае n_2; $r = 1$; $B(z) = B_0 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2}$). Из пунктов Б *и* В *следует: 1) Пусть $\Omega(z)$ — формальное решение системы* (13). *Тогда формальное решение системы* (19) $\hat{U}(z) = (z^Q)^{-1}\hat{\Omega}(z)$, *а формальное решение системы первого ранга получается из $\hat{U}(z)$ заменой $z^{r+1} = \tau$. 2) Для обеих систем* (19) *и первого ранга справедлива теорема единственности, сформулированная для системы* (13) *в* Б, (*подпункт 3*).

Д.

$$[\bar{Y}]_{[\omega],[\nu]} = [\exp[i2\pi R]\, F_{2(r+1)}F_{2(r+1)-1}]_{\omega_0\nu_r} \times$$
$$\times [F_2F_1]_{\omega_1\nu_0}[F_4F_3]_{\omega_2\nu_1} \ldots [F_{2r}F_{2r-1}]_{\omega_r\nu_{r-1}}. \tag{20}$$

Из уравнения (20) *по известной $\bar{Y}$ могут быть однозначно найдены элементы всех матриц F_2F_1, F_4F_3, $F_{2(r+1)}F_{2(r+1)-1}$, а значит*

(по теореме о разложении матрицы в произведение треугольных матриц) могут быть однозначно найдены и все матрицы F_1, $F_2, \ldots, F_{2(r+1)}$.

Е. *Элементы ф. м.* $W_1(z)$ *находятся по формулам*

$$[W_1(z)]_{i_0\nu_0} = c_{i_0\nu_0} \exp\left\{\int z^r \left(\sum_{\xi=1}^{n} [B(z)]_{i_0\xi} \frac{[U(z)]_{[\xi,\, i_1,\, \ldots,\, i_r],\, [\nu]}}{[U(z)]_{[i],\, [\nu]}}\right) dz\right\}, \quad (21)$$

где значения индексов $i_1, i_2, \ldots, i_r$ *и* $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ *могут быть любыми из* $\overline{1, n}$. *Если, в частности, положить* $i_1 = i_2 = \cdots = i_r = \nu_1 = \nu_2 = \cdots = \nu_r = 1$, *то*

$$[W_1(z)_{i_0\nu_0} = c_{i_0\nu_0} \exp\left\{\int z^r \left(\sum_{\xi=1}^{n} [B(z)]_{i_0\xi} \frac{[U(z)[_{\xi\nu_0}}{[U(z)]_{i_0\nu_0}}\right) dz\right\}. \quad (22)$$

Из уравнения (21) *и особенно наглядно из* (22) *видно, что для нахождения ф. м.* $W_1(z)$ *нужно знать только* n^2 *элементов ф. м.* $U(z)$ *из общего их числа* $n^{2(r+1)}$. *Произвольные константы интегрирования* $c_{i_0\nu_0}$ *могут быть определены по заданной матрице* P_0 в (2).

Замечание. Из доказательства пункта Е (см. ниже) видно, что подобным образом могут быть найдены элементы любой ф. м. $W_k(z\varepsilon^{k-1})$.

Пусть в уравнении (1) матрица $B(z)$ типа (8). Тогда согласно (14), (15) точка $z = 0$ является, вообще говоря, регулярной особой точкой и для системы (13). Ф. м. $\overline{\Psi}(z)$ системы (13) в окрестности $z = 0$ может быть взята в виде

$$[\overline{\Psi}(z)]_{[i],\,[\nu]} = [\Psi(z)]_{i_0\nu_0} [\Psi(z\varepsilon)]_{i_0\nu_1} \ldots [\Psi(z)\varepsilon^r)]_{i_r\nu_r}. \quad (23)$$

Кроме того, $\overline{\Psi}(z) = U(z)\,T$, где T — матрица связи.

Теорема 1.2. А. *Пусть матрица* $B(z)$ *типа* (8). *Тогда матрица* $M(z)$ *для* (19) *имеет вид* $M(z) = z^r(M_0 + M_{(r+1)}z^{-(r+1)})$ *и, следовательно, заменой* $z^{r+1} = \tau$ *система* (19) *приводится к системе*

$$\frac{dv(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{(r+1)}\left(M_0 + \frac{1}{\tau} M_{(r+1)}\right) v(\tau).$$

Б. *Между элементами матрицы* $\overline{T}$ *и элементами матриц* T_k *существуют соотношения*

$$[\overline{T}]_{[\omega],\,[\nu]} = [T_1]_{\omega_0\nu_0} [T_2]_{\omega_1\nu_1} \ldots [T_{(r+1)}]_{\omega_r\nu_r}, \quad (24)$$

$$\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_r = \overline{1, n};\; \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_r = \overline{1, n}.$$

Если матрица $\overline{T}$ *известна, то из уравнений (24) можно линейно выразить любые* $(n^{r+1} - r)$ *элементов матриц* $T_1, T_2, \ldots, T_{(r+1)}$ *через произведение оставшихся* r *элементов.*

Доказательство теоремы 1.1. А. Если каждая компонента u_i вектора u представлена в виде полилинейной формы

$$u_i(z) = \sum_{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_r} p_{i\omega_0\omega_1\ldots\omega_r} w_{\omega_0}(z) w_{\omega_1}(z\varepsilon) \ldots w_{\omega_r}(z\varepsilon^r), \quad (25)$$

$$\omega_j = \overline{1, n}, \ i = \overline{1, n^{r+1}},$$

то в случае постоянных $p_{i\omega_0\omega_1\ldots\omega_r}$ элементы матрицы $A(z)$ могут быть найдены из системы (см. § 4)

$$\sum_{k_0, k_1, \ldots, k_r} [A(z)]_{[\nu],[k]} p_{[k], \omega_0\omega_1 \ldots \omega_r} =$$
$$= z^r \sum_{\xi} (p_{[\nu], \xi\omega_1\ldots\omega_r} [B(z)]_{\xi\omega_0} + p_{[\nu], \omega_0\xi\omega_2\ldots\omega_r} [B(z\varepsilon)]_{\xi\omega_1} +$$
$$+ \cdots + p_{[\nu], \omega_0\ldots\omega_{r-1}\xi} [B(z\varepsilon^r)]_{\xi\omega_r}), \ \xi, \nu_j, k_j = \overline{1, n}; \ j = \overline{0, r}. \quad (26)$$

Из определения (11) следует, что в рассматриваемом случае отличны от нуля (и равны единице) только коэффициенты

$$p_{[i_0+n(i_1-1)+\cdots+n^r(i_r-1)], i_0i_1\ldots i_r} = 1. \quad (27)$$

Условие (27) однозначно определяет единственное ненулевое слагаемое в сумме по $[k]$ (слева) в (26) с индексом $[k] = [\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_r] \equiv [\omega]$. Очевидно, что в силу (27) в суммах по ξ справа в (26), если и останутся ненулевые слагаемые, то только среди тех, у которых $\xi = \nu_0$ (первая сумма), $\xi = \nu_1$ (вторая сумма), $\ldots, \xi = \nu_r$ ($(r+1)$-я сумма). Таким образом, (26) можно переписать в виде

$$[A(z)]_{[\nu],[\omega]} = z^r (P_{[\nu], \nu_0\omega_1\ldots\omega_r} [B(z)]_{\nu_0\omega_0} + p_{[\nu], \omega_0\nu_1\omega_2\ldots\omega_r} \times$$
$$\times [B(z\varepsilon)]_{\nu_1\omega_1} + \cdots + p_{[\nu], \omega_0\ldots\omega_{r-1}\nu_r} [B(z\varepsilon^r)]_{\nu_r\omega_r}. \quad (28)$$

1) Пусть в (28) $\omega_0 = \nu_0$; $\omega_1 = \nu_1$; $\ldots$; $\omega_r = \nu_r$, т. е. $[\omega] = [\nu]$). Тогда из (28) в силу (27) следует (14).

2) Вторая возможность состоит в том, чтобы совокупность индексов при $p_{[\nu], \omega_0\ldots\omega_{j-1}\nu_j\omega_{j+1}\ldots\omega_r}$ у одного из слагаемых в (28) удовлетворяла (27). Это получается, если r индексов из $(r+1)$ в совокупности ω_j $(j = \overline{0, r})$ приравнять к соответствующим индексам из совокупности ν_j $(j = \overline{0, r})$. Это дает (15).

Б. Достаточно доказать подпункты *2*, *3*. *2*. При получении явного вида матрицы $A(z)$ на основе (11) использовалось лишь то обстоятельство, что $W_k(z\varepsilon^{k-1})$ — ф. м. систем (12) $(k = \overline{1, r+1})$. Поэтому элементы любой ф. м. $\Omega(z)$ системы (13) выражаются через элементы каких-либо соответствующих ф. м. $\theta_k(z\varepsilon^{k-1})$ систем (12):

$$[\Omega(z)]_{[i],[\nu]} = [\theta_1(z)]_{i_0\nu_0} [\theta_2(z\varepsilon)]_{i_1\nu_1} \ldots [\theta_{r+1}(z\varepsilon^r)]_{i_r\nu_r}. \quad (28a)$$

Пусть ф.м. $\theta_k(z\varepsilon^{k-1})$ асимптотически базисна в С.С.

$$\chi - \frac{\pi}{r+1} + (k-1)\frac{2\pi}{r+1} \leqslant \arg(z\varepsilon^{k-1}) < \chi + (k-1)\frac{2\pi}{r+1} \quad (k = \overline{1, r+1}), \tag{28б}$$

где χ — произвольный луч. Вообще говоря, матрица P_0 в асимптотическом представлении ф.м. $\theta_k(z\varepsilon^{k-1})$ различна для разных k. Поэтому обозначаем ее через P_{0k}. Пусть нумерация столбцов P_{0k} зафиксирована. Тогда ф. м. $\Omega(z)$ асимптотически базисна в произвольном С.С. $\chi - \frac{\pi}{r+1} \leqslant \arg z < \chi$ и ее асимптотическое представление имеет структуру (15а), так как в данном случае асимптотическое представление произведения равно произведению асимптотических представлений сомножителей (каждый сомножитель асимптотически базисен в своем С.С. (28б)).

3. Обратно. В силу определения (28а) ф. м. $\Omega(z)$ асимптотически базисна в С. С, $\chi - \frac{\pi}{r+1} \leqslant \arg z < \chi$ в том и только в том случае, когда каждая из ф. м. — «сомножителей» $\theta_k(z\varepsilon^{k-1})$ асимптотически базисна в С. С. (28б). Умножим каждую ф. м. $\theta_k(z \times \times \varepsilon^{k-1})$ $(k = \overline{1, r+1})$ на константу c_k такую, что произведение $c_1 c_2 \ldots c_{r+1} = 1$. Как видно из (28а), при этом ф. м. $\Omega(z)$ и ее асимптотическое представление в С. С. $\chi - \frac{\pi}{r+1} \leqslant \arg z < \chi$ не изменяются. Асимптотическое же представление ф. м. $\theta_k(z\varepsilon^{k-1})$ в (28б) (а значит, и матрица P_{0k}) умножается на c_k.

Пусть теперь некоторая ф. м. $\Omega(z)$ системы (13) асимптотически базисна в С. С. $\chi - \frac{\pi}{r+1} \leqslant \arg z < \chi$ и известно ее асимптотическое представление. Для доказательства подпункта *3* нужно показать, что это асимптотическое представление определяет с точностью до скалярного множителя c_k ф. м. $\theta_k(z\varepsilon^{k-1})$ $(k = 1, r + + 1;\ c_1 c_2 \ldots c_{r+1} = 1)$, асимптотически базисные в С. С. (28б), а затем воспользоваться теоремой единственности для систем (12). Будем считать, что нумерация λ_j (т. е. нумерация столбцов) выбрана одинаковой для всех $\theta_k(z\varepsilon^{k-1})$ (что не нарушает общности). Параметры $\lambda_j^{(\nu)}$, r_j $(j = \overline{1, n};\ \nu = \overline{1, r+1})$ — см. (2) — однозначно находятся из простой системы линейных алгебраических уравнений. Так как нумерация λ_j зафиксирована, то в силу теоремы единственности для систем (12) для определения ф. м. $\theta_k(z\varepsilon^{k-1})$ остается найти матрицы P_{0k} по известной матрице $\overline{P}_0$. Они связаны следующим образом:

$$[\overline{P}_0]_{[i,][\nu]} = \exp\left[i \sum_{k=0}^{r} k \frac{2\pi}{r+1} r_{\nu_k}\right] [P_{01}]_{i_0 \nu_0} [P_{02}] \ldots [P_{0,r+1}]_{i_r \nu_r}. \tag{28в}$$

Фиксируя в (28в), например индексы $(i_1, \nu_1), (i_2 \nu_2), \ldots, (i_r, \nu_r)$, можно для элементов матрицы P_{01} найти $(n^2 - 1)$ отношений

$[P_{01}]_{i_0\nu_0}/[P_{01}]_{11}$, где i_0, $\nu_0 \neq (1,1)$, т. е. линейно выразить (n^2-1) элементов $[P_{01}]_{i_0\nu_0}$ через (например) $[P_{0,1}]_{11}$. Эти рассуждения можно повторить для элементов каждой матрицы P_{0k} $(k=\overline{1, r+1})$ и, следовательно, для каждой матрицы P_{0k} можно линейно выразить (n^2-1) ее элементов через (например) $[P_{0k}]_{11}$. Подставляя все это в уравнения (28*в*), получим одно независимое уравнение вида

$$[P_{01}]_{11}[P_{02}]_{11} \ldots [P_{0,r+1}]_{11} = c \tag{28г}$$

(c — известная константа). Зададимся какими-то конкретными значениями $[P_{0k}]_{11}$ $(k=\overline{1, r+1})$, удовлетворяющими (28*г*). Тогда (как следует из изложенного выше) матрицы P_{0k} могут быть однозначно найдены. Любые другие значения $[P_{0k}]_{11}^* = c_k[P_{0k}]_{11}$, где c_k — константа и $c_1c_2 \ldots c_{r+1}=1$, также удовлетворяют (28*г*). Следовательно, из уравнений (28*в*) матрицы P_{0k} (а значит, в принципе, и ф. м. $\theta_k(z\varepsilon^{k-1})$ могут быть определены с точностью до скалярных множителей c_k $(c_1c_2 \ldots c_{r+1}=1)$. Но умножение ф. м. $\theta_k(z\varepsilon^{k-1})$ на c_k не изменяет ф. м. $\Omega(z)$. Пусть теперь существует какая-либо другая ф. м. $\Omega'(z)$ системы (13), имеющая в С. С. $\chi - \frac{\pi}{r+1} \leqslant \arg < \chi$ такое же асимптотическое представление, как и ф. м. $\Omega(z)$. Так как семейство ф.м. $c_k\theta_k(z\varepsilon^{k-1})$ $(k=\overline{1, r+1};\ c_1c_2 \ldots \ldots c_{r+1}=1)$ однозначно определяет ф. м. $\Omega(z)$, то должна существовать хотя бы одна ф. м. $\theta_k'(z\varepsilon^{k-1})$ системы (12), не совпадающая с ф. м. $c_k\theta_k(z\varepsilon^{k-1})$, но имеющая в С. С. (28*б*) такое же асимптотическое представление. Это противоречит теореме единственности для систем (12). Подпункт 3 доказан.

Примечание. Если (например) все $[P_{0k}]_{11}$ одинаковы $([P_{0k}]_{11} = p;\ k=\overline{1, r+1})$, то из (28*г*) следует, что все c_k равны одному и тому же $\sqrt[r+1]{-1}$ (т. е. ε^ρ, $\rho=\overline{1, r}$). Это же будет, если все матрицы P_{0k} одинаковы, т. е. в случае ф. м. $U(z)$. В этом последнем случае элементы матрицы P_0 удобно находить непосредственно из (28*а*), положив $i_0=i_1=\ldots=i_r$; $\nu_0=\nu_1=\ldots=\nu_r$. О наличии одинаковых для всех P_{0k} элементов можно судить по симметрии $[\tilde{P}_0]_{[i],[\nu]}$

В) Полагая в (II) $z \to z\varepsilon$, получаем

$$[U(z\varepsilon)]_{[i][\nu]} = [W_1(z\varepsilon)]_{i_0\nu_0}[W_2(z\varepsilon^2)]_{i_1\nu_1} \ldots [W_{r+1}(z\varepsilon^{r+1})]_{i_r\nu_r}. \tag{29}$$

С другой стороны, с помощью (6), (7) имеем

$$W_{r+1}(z\varepsilon^{r+1}) \equiv W_{r+1}(z\exp[i2\pi]) = W_1(z\exp[i2\pi])(F_{2r}F_{2r-1} \ldots F_1)^{-1} = \\ = W_1(z)\,Y\,(F_{2r}F_{2l-1} \ldots F_1)^{-1} = W_1(z)\exp[i2\pi R]\,F_{2(r+1)}F_{2(r+1)-1}. \tag{30}$$

Подставляя (6) (для $k=\overline{2,\ r)}$ и (30) в (29), получаем

$$[U(z\varepsilon)]_{[i],[\nu]} = \sum_{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_r} [W_1(z)]_{i_r\omega_0} [W_2(z\varepsilon)]_{i_0\omega_1} [W_3(z\varepsilon)^2]_{i_1\omega_2} \ldots$$
$$\ldots [W_{r+1}(z\varepsilon^r)]_{i_{r-1}\omega_r} [\exp[i2\pi R]\, F_{2(r+1)}F_{2(r+1)-1}]_{\omega_0\nu_r} [F_2F_1]_{\omega_1\nu_0} \times$$
$$\times [F_4F_3]_{\omega_2\nu_1} \ldots [F_{2r}F_{2r-1}]_{\omega_2\nu_{r-1}}.$$

Или окончательно

$$[U(z\varepsilon)]_{[i],[\nu]} = \sum_{\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_r} [U(z)]_{[i_r, i_0, \ldots, i_{r-1}], [\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_r} \times$$
$$\times [\exp[i\pi R]]\, F_{2(r+1)}F_{2(r+1)+1}]_{\omega_0\nu_r} [F_2F_1]_{\omega_1\nu_0} [F_4F_3]_{\omega_2\nu_1} \ldots$$
$$\ldots [F_{2r}F_{2r-1}]_{\omega_r\nu_{r-1}}. \tag{31}$$

В (31), слева, первый индекс элемента ф. м. $U(z\varepsilon)$ есть $[i]$, а первый индекс элементов ф. м. $U(z)$ (справа) есть $[i_r, i_0, \ldots, i_{r-1}]$. Следовательно, систему равенств (31) можно представить в матричной форме $U(z\varepsilon) = GU(z)\,\overline{Y}$, где для элементов матрицы $\overline{Y}$ выполняется (20). Каждый столбец и каждая строка матрицы G имеют только один элемент, не равный нулю (он равен единице). Значит (как следует из самого определения определителя), $\det G \neq 0$ и, значит, $\operatorname{Ln} G$ существует. (Детальный анализ G см. в § 2). Но это означает, что ф. м. $U(z)$ можно записать в виде $z^Q V(z)$, где $(z\varepsilon)^Q = Gz^Q$, а $V(z\varepsilon) = V(z)\,\overline{Y}$.

Г. Инвариантность (19) относительно замены $z \to z\varepsilon$ следует из соотношения $V(z\varepsilon) = V(z)\,\overline{Y}$. Для $M(z)$ имеем

$$M(z) = (z^Q)^{-1} A(z)(z)^Q - (z^Q)^{-1} \frac{dz^Q}{dz}. \tag{32}$$

Матрица $A(z)$ (см. (14), (15) и матрица z^Q (см. § 2) соответственно имеет вид

$$\text{а)}\ A(z) = z^r \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu z^{-\nu}; \quad \text{б)}\ z^Q = HDH^{-1}, \tag{33}$$

где A_ν — постоянные матрицы; H — некоторая постоянная неособая матрица; D — диагональная матрица, диагональные элементы которой принимают только значения $1, z, z^2, \ldots, z^r$. Подстановка (33) в (32) дает

$$M(z) = z^r HD^{-1} H^{-1}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu z^{-\nu}\right) HDH^{-1} - HD^{-1}\frac{dD}{dz} H^{-1}. \tag{34}$$

Так как диагональные элементы матрицы D принимают только значения $1, z, z^2, \ldots, z^r$, то второе слагаемое в правой части (34) может быть представлено в виде C/z, а первое слагаемое,

вообще говоря, (при произвольной неособой постоянной H), в виде $z^{2r}\sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu z^{-\nu}$, где C, C_ν — постоянные матрицы. Следовательно,

$$M(z) = z^{2r}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu z^{-\nu} + Cz^{-(2r+1)}\right). \tag{35}$$

Но так как система (19) инвариантна относительно замены $z \to z\varepsilon$, то матрица $M(z)$ должна иметь определенную структуру (см. [2, § 2]). Если замена $z^{r+1} = \tau$ сводит (19) к системе первого ранга, то $M(z)$ должна иметь вид (36*а*) (см. ниже), если к системе второго ранга, то $M(z)$ должна иметь вид (36*б*):

$$\text{а)}\ M(z) = z^r \sum_{\nu=0}^{\infty} M_\nu z^{-\nu(r+1)};\quad \text{б)}\ M(z) = z^{2r+1}\sum_{\nu=0}^{\infty} M_\nu z^{-\nu(r+1)}, \tag{36}$$

где M_ν — постоянные матрицы.

Сравнение (35) с (36) показывает, что (35) ни при каких значениях C, C_ν не может совпадать с (36*б*), но всегда существуют такие C_ν, при которых (35) совпадает с (36*а*). Следовательно, замена $z^{r+1} = \tau$ сводит (19) к системе первого ранга.

Д. Поскольку в выражении (20) все индексы в правой части могут принимать любое из значений $\overline{1, n}$, то положим, что в r (из $(r+1)$) сомножителя $[\ ]_{ik}$ (в (20)) выбрано $i = 1$, $k = 1$. Пусть, например, свободные индексы оставлены у $[F_4F_3]_{\omega_2\nu_1}$. Так как $[F_{2k}F_{2k-1}]_{11} = 1$ $(k = \overline{1, r+1})$, то это означает, что по известной матрице Y могут быть однозначно найдены все элементы $[F_4F_3]_{\omega_2\nu_1}$. Очевидно, что таким же способом может быть найдена любая матрица $F_{2k}F_{2k-1}$ $(k = \overline{1, r+1})$.

Е. Согласно (1)

$$\frac{dW_1(z)_{i_0\nu_0}}{dz} = z^r \sum_{\xi=1}^{n} [B(z)]_{i_0\xi}\,[W_1(z)]_{\xi\nu_0}\quad (i_0,\ \nu_0 = \overline{1, n}). \tag{37}$$

Поделим обе части (37) на $[W_1(z)]_{i_0\nu_0}$. Это дает

$$\frac{1}{[W_1(z)]_{i_0\nu_0}}\,\frac{d[W_1(z)]_{i_0\nu_0}}{dz} = z^r \sum_{\xi=1}^{n} [B(z)]_{i_0\xi}\,\frac{[W_1(z)]_{\xi\nu_0}}{[W_1(z)]_{i_0\nu_0}}. \tag{38}$$

Но согласно (11)

$$\frac{[W_1(z)]_{i_0\nu_0}}{[W_1(z)]_{i_0\nu_0}} = \frac{[U(z)]_{[\xi,\, i_1,\, \ldots,\, i_r]\,[\nu]}}{[U(z)]_{[i],\,[\nu]}}. \tag{39}$$

Подставляя (39) в правую часть (38) и интегрируя, получаем (11).

Доказательство теоремы 1.2. А. Матрица $A(z)$ в рассматриваемом случае имеет вид: $A(z) = z^r \sum_{\nu=0}^{r+1} A_\nu z^{-\nu}$ (см. 14), (15)).

Подставляя это выражение для $A(z)$, а также z^Q в виде (33б), в (32), находим, что вообще говоря (при произвольной неособой постоянной H), наименьшая степень z в $z^{-r}(z^Q)^{-1}A(z)z^Q$ не может быть меньше $z^{-(2r+1)}$. Кроме того, $[-(z^Q)^{-1}dz^Q/dz]=C/z$ (см. доказательство пункта Г теоремы (1.1). С другой стороны, по пункту Г теоремы 1.1 в общем случае матрица $M(z)$ имеет вид (36а). Следовательно, в рассматриваемом случае в (36а) могут быть не равны нулю только M_0 и M_{r+1}.

Б. Подставляя (9) в (23) и используя (11), последовательно получаем

$$[\bar{\Psi}(z)]_{[i],[\nu]}=\sum_{\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_r}([W_1(z)]_{i_0\omega_0}[W_2(z\varepsilon)]_{i_1\omega_1}\cdots[W_{r+1}(z\varepsilon^r)]_{i_r\omega_r}\times$$

$$\times[T_1]_{\omega_0\nu_0}[T_2]_{\omega_1\nu_1}\cdots[T_{r+1}]_{\omega_r\nu_r})=\sum_{\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_r}([U(z)]_{[i],[\omega]}\times$$

$$\times[T_1]_{\omega_0\nu_0}[T_2]_{\omega_1\nu_1}\cdots[T_{r+1}]_{\omega_r\nu_r})=\sum_{\omega_0,\omega_1,\ldots\omega_r}[U(z)]_{[i],[\omega]}[T]_{[\omega],[\nu]}.$$

Отсюда следует (24). Пусть матрица T известна. Фиксируя, например, в (24) индексы (ω_1, ν_1), (ω_2, ν_2), $\ldots$, $\omega_r, \nu_r)$, можно для элементов матрицы T_1 найти (n^2-1) отношений $[T_1]_{\omega_0\nu_0}/[T_1]_{11}$, где $(\omega_0, \nu_0)\neq(1, 1)$, т. е. линейно выразить (n^2-1) элементов $[T_1]_{\omega_0\nu_0}$ через (например) $[T_1]_{11}$. Всего возможно n^{2r} фиксированных значений (ω_1, ν_1), (ω_2, ν_2), $\ldots$, (ω_r, ν_r). Значит, соответственно этому случаю между элементами $\bar{\bar{T}}$ существует $(n^2-1)n^{2r}$ соотношений. Рассуждения можно повторить для элементов каждой матрицы T_k $(k=\overline{1, r+1})$ и, следовательно, для каждой матрицы T_k можно линейно выразить (n^2-1) ее элементов через (например) $[T_k]_{11}$. Подставляя все это в (24), получаем одно независимое уравнение вида

$$[T_1]_{11}[T_2]_{11}\ldots[T_{r+1}]=c$$

(c — известная константа, из которого еще один элемент можно выразить через остальные r).

Список литературы: 1. *Смилянский В. Р.* Некоторые свойства множителей Стокса. 1. — В кн.: Исследования по теории операторов и их приложениям. Сб. науч. тр. К., 1979, с. 97—107. 2. *Смилянский В. Р.* О множителях Стокса для различных систем линейных дифференциальных уравнений. 1.— Дифференц. уравнения, 1970, **6**, № 3, с. 483—496. 3. *Poincaré H.* Sur les intégrales irréqulierès des équations lineaires.— Acta math., 1886, **8**, p. 295—344. 4. *Айнс Э. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.—X: Науч.-техн. изд-во Украины, 1939. —719 с. 5. *Harn I.* Über die irreqularen Integrale der Linegren Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten. — Acta math., 1900, **23**, S. 171—201.

Поступила в редколлегию 01.12.84.

УДК 517. 51

К. М. СЛЕПЕНЧУК

ОБ УСЛОВИЯХ АБСОЛЮТНОЙ СУММИРУЕМОСТИ В СТЕПЕНИ p ДВОЙНЫХ РЯДОВ

Преобразуем двойной ряд

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} u_{kl}, \tag{1}$$

частичные суммы которого $S_{m,n}$, с помощью матриц $\Gamma = \| \gamma_{kl}(x, y) \|$ ($\Gamma = \| \gamma_{kl}^{(mn)} \|$ и $A = \| a_{kl}(x, y) \|$ ($A = \| a_{kl}^{(mn)} \|$):

$$\Gamma(x, y) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \gamma_{kl}(x, y)\, u_{kl} \left(\Gamma_{mn} = \sum_{k,l=1}^{\infty} \gamma_{kl}^{(mn)} u_{kl} \right), \tag{2}$$

$$A(x, y) = \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}(x, y)\, S_{kl} \left(A_{mn} = \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}^{(mn)} S_{kl} \right)$$

при условии, что ряды сходятся в $D\{a \leqslant x < \infty, \quad b \leqslant y < \infty\}$ или для $m > m_0$, $n > n_0$.

Двойной ряд (1) (или $\{S_{mn}\}$) абсолютно сходится в степени $p \geqslant 1$ к S, если $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} u_{kl} = S\, (S_{mn} \to S,\ m, n \to \infty)$ и

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} (kl)^{p-1} | u_{kl} |^p < \infty \left(\sum_{k,l=1}^{\infty} (kl)^{p-1} | \Delta S_{kl} |^p < \infty, \right. \tag{3}$$

$\Delta S_{kl} = S_{kl} - S_{k-1 l} - S_{kl-1} + S_{k-1\, l-1}$ и абсолютно сходится в степени p, если имеет место (3). Двойной ряд (1) $|\Gamma|_p$ суммируем к S, $p \geqslant 1$, если

$$\Gamma(x, y) \to S,\ x, y \to \infty\ (\Gamma_{mn} \to S,\ m, n \to \infty) \text{ и}$$

$$\int_a^{\infty}\int_b^{\infty} (xy)^{p-1} \left| \frac{\partial^2 \Gamma(x,y)}{\partial x\, \partial y} \right|^p dxdy < \infty \left(\sum_{k,\, l=1}^{\infty} (mn)^{p-1} | \Delta \Gamma_{mn} |^p < \infty, \right. \tag{4}$$

и $|\Gamma|_p$ суммируем, если имеет место (4).

Аналогично определяется $|A|_p$ — суммируемость $\{S_{mn}\}$.

В работе обобщаются результаты, полученные в [1], на случай матричных преобразований двойных рядов.

Лемма 1. *Для того чтобы абсолютно сходящийся в степени $p > 1$ к S двойной ряд (1) при фиксированном p преобразовывался с помощью $\{\alpha_{k_l}\}$ в сходящийся ряд*

$$\sum_{k,\, l=1}^{\infty} \alpha_{kl} u_{kl}, \tag{5}$$

достаточно, чтобы $\sum\limits_{k,\, l=1}^{\infty} | \alpha_{kl} - a |^q / kl < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a = \lim\limits_{k,\, l \to \infty} \alpha_{kl}$.

Доказательство. Пусть условия теоремы выполнены. Тогда из неравенства Гельдера

$$\sum_{k,\, l=1}^{\infty} |\alpha_{kl} - a| |u_{kl}| \leqslant \left\{ \sum_{k,\, l=1}^{\infty} \frac{|\alpha_{kl} - a|^q}{kl} \right\}^{1/q} \left\{ \sum_{k,\, l=1}^{\infty} (kl)^{p-1} |u_{kl}|^p \right\}^{1/p}$$

следует сходимость ряда $\sum\limits_{k,\, l=1}^{\infty} (\alpha_{kl} - a) u_{kl}$, а сходимость ряда (5) следует из тождества

$$\sum_{k,\, l=1}^{\infty} \alpha_{kl} u_{kl} = \sum_{k,\, l=1}^{\infty} (\alpha_{kl} - a) u_{kl} + a \sum_{k,\, l=1}^{\infty} u_{kl}. \tag{6}$$

В дальнейшем будем рассматривать случай: $\gamma_{kl}(x, y) = \gamma_k(x)\gamma_l(y)$.

Теорема 1. *Для того чтобы* Г-*преобразование существовало на классе абсолютно сходящихся в степени* $p > 1$ *к* S *двойных рядов* (1) *при фиксированном* p, *достаточно, чтобы* $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_k(x) = \gamma(x)$, $\lim\limits_{l\to\infty} \gamma_l(y) = \gamma(y)$ и

$$\sum_{k,\, l=1}^{\infty} \frac{|\gamma_k(x)\gamma_l(y) - \gamma(x)\gamma(y)|}{kl} < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Если при этом $\gamma_k'(x)$, $\gamma_l'(y)$ — *конечные в* D *и*

$$1^\circ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{p-1}{p}} |\gamma_k'(x)| = 0(1), \quad \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{y}{l}\right)^{\frac{p-1}{p}} |\gamma_l'(y)| = 0(1),$$

$$2^\circ \int_a^{\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left|\gamma_k'(x)\right| dx = 0,\ (1), \quad \int_b^{\infty} \left(\frac{y}{l}\right)^{\frac{p-1}{p}} |\gamma_l'(y)|\, dy = 0(1),$$

то двойной ряд (1) $|\Gamma|_p$ — *суммируем.*

Доказательство. Существование Г-преобразования двойного ряда (1) следует из леммы 1. Далее, если $p > 1$, то

$$\int_a^M \int_b^N (xy)^{p-1} \left| \frac{\partial^2 \Gamma(x, y)}{\partial x \partial y} \right|^p dxdy \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^M \int_b^N \left\{ \sum_{k,\, l=1}^{\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{p-1}{p}} |\gamma_k'(x)| \left(\frac{y}{l}\right)^{\frac{p-1}{p}} |\gamma_l'(y)| (kl)^{p-1} |u_{kl}|^p \times \right.$$

$$\left. \times \left(\sum_{k,\, l=1}^{\infty} \left(\frac{xy}{kl}\right)^{\frac{p-1}{p}} |\gamma_k'(x)| |\gamma_l'(y)| \right)^{p/q} \right\} dxdy = 0(1).$$

Теорема будет доказана, если оправдаем почленное дифференцирование ряда (2). Для этого достаточно доказать равномерную сходимость продифференцированного ряда. Из неравенства

$$\sum_{k=1}^{m+S}\sum_{l=1}^{n+r}\gamma_k'(x)\gamma_l(y)u_{kl}+\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=n+1}^{n+r}\gamma_k'(x)\gamma_l(y)u_{kl}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{x^{1/q}}\Big\{\Big(\sum_{k=m+1}^{m+S}\sum_{l=1}^{n+r}\left(\frac{x}{kl}\right)^{1/q}|\gamma_k(x)||\gamma_l(y)|(kl)^{p-1}|u_{kl}|^p\Big)^{1/p}\times$$

$$\times\Big(\sum_{k=m+1}^{m+S}\sum_{l=1}^{n+r}\left(\frac{x}{kl}\right)^{1/q}|\gamma_k'(x)||\gamma_l(y)|\Big)^{1/q}+$$

$$+\Big(\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=n+1}^{n+r}\left(\frac{x}{kl}\right)^{1/q}|\gamma_k'(x)||\gamma_l(y)|(kl)^{p-1}|u_{kl}|^p\Big)^{1/p}\times$$

$$\times\Big(\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=n+1}^{n+r}\left(\frac{x}{kl}\right)^{1/q}|\gamma_k'(x)||\gamma_l(y)|\Big)^{1/q}\Big\}$$

следует равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{k,\,l=1}^{\infty}\gamma_k'(x)\gamma_l(y)u_{kl}$, а из неравенства

$$\Big|\sum_{k=m+1}^{m+s}\sum_{l=1}^{n+r}\gamma_k'(x)\gamma_l'(y)u_{kl}+\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=n+1}^{n+r}\gamma_k'(x)\gamma_l'(y)u_{kl}\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{y^{1/q}}\Big\{\Big(\sum_{k=m+1}^{m+s}\sum_{l=1}^{n+r}\left(\frac{y}{kl}\right)^{1/q}|\gamma_k'(x)||\gamma_l'(y)|(kl)^{p-1}|u_{kl}|^p\times$$

$$\times\Big(\sum_{k=m+1}^{m+s}\sum_{l=1}^{n+r}\left(\frac{y}{kl}\right)^{1/q}|\gamma_k'(x)||\gamma_l'(y)|\Big)^{1/q}+$$

$$+\Big(\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=n+1}^{n+r}\left(\frac{y}{kl}\right)^{1/q}|\gamma_k'(x)||\gamma_l'(y)|(kl)^{p-1}|u_{kl}|^p\Big)^{1/p}\times$$

$$\times\Big(\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=n+1}^{n+r}\left(\frac{y}{kl}\right)^{1/q}|\gamma_k'(x)||\gamma_l(y)|\Big)^{1/q}$$

следует равномерная сходимость продифференцированного ряда.

Лемма 2. *Для того чтобы абсолютно сходящийся в степени $p>1$ к S двойной ряд* (1) *преобразовывался с помощью* $\{\alpha_{kl}\}$ *в сходящийся ряд* (5), *достаточно, чтобы* $\sum\limits_{k,\,l=1}^{\infty}|\alpha_{kl}-a|/_{kl}<\infty$, $a=\lim\limits_{k,\,l\to\infty}\alpha_{kl}$.

Доказательство. Из неравенства

$$\sum_{k,\,l=1}^{\infty} |\alpha_{kl}-a| \leqslant \left\{ \sum_{k,\,l=1}^{\infty} |\alpha_{kl}-a|\,(kl)^{p-1}\,|u_{kl}|^{p} \right\}^{1/p} \left\{ \sum_{k,\,l=1}^{\infty} \frac{|\alpha_{kl}-a|}{kl} \right\}^{1/q}$$

следует сходимость ряда $\sum\limits_{k,\,l=1}^{\infty} (\alpha_{kl}-a)\,u_{kl}$. В таком случае сходимость ряда (5) следует из тождества (6).

Теорема 2. *Для того чтобы Γ-преобразование существовало на классе абсолютно сходящихся в степени $p>1$ к S двойных рядов (1), достаточно, чтобы* $\sum\limits_{k,\,l=1}^{\infty} |\gamma_k(x)\,\gamma_l(y)-\gamma(x)\,\gamma(y)|/_{kl}<\infty$. *Если при этом $\gamma_k'(x)$, $\gamma_l'(y)$ — конечные в D и*

$$3^\circ \sum_{k,\,l=1}^{\infty} \frac{x}{k}\,|\gamma_k'(x)| = 0\,(1), \quad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{y}{l}\,|\gamma_l'(y)| = 0\,(1),$$

$$4^\circ \int_a^{\infty} |\gamma_k'(x)|\,dx = 0\,(1), \quad \int_b^{\infty} |\gamma_l'(y)|\,dy = 0\,(1),$$

то двойной ряд (1) $|\Gamma|_p$ — суммируем.

Доказательство. Существование Γ-преобразования следует из леммы 2, а $|\Gamma|_p$-суммируемость из неравенства

$$\int_a^M \int_b^N (xy)^{p-1} \left|\frac{\partial^2\Gamma(x,y)}{\partial x\,\partial y}\right|^p dxdy \leqslant \int_a^M \int_b^N \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |\gamma_k'(x)|\,|\gamma_l'(y)| \times \right.$$

$$\left. \times\,(kl)^{p-1}\,|u_{kl}|^p \left(\sum_{k,\,l=1}^{\infty} \frac{xy}{kl}\,|\gamma_k'(x)|\,|\gamma_l'(y)| \right)^{p/q} \right\} dxdy = 0\,(1).$$

Легко показать справедливость почленного дифференцирования ряда (2).

Докажем следующие теоремы.

Теорема 3. *Для того чтобы Γ-преобразование существовало на классе абсолютно сходящихся в степени $p>1$ двойных рядов (1) при фиксированном p, достаточно, чтобы* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\gamma_k(x)|^q/_k<\infty$, $\sum\limits_{l=1}^{\infty} |\gamma_l(y)|^q/_l<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. *Если при этом имеют место* 1° и 2°, *то двойной ряд (1) $|\Gamma|_p$-суммируем.*

Теорема 4. *Для того чтобы Γ-преобразование существовало на классе абсолютно сходящихся в степени $p>1$ двойных рядов* (1), *достаточно, чтобы* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\gamma_k(x)|/_k<\infty$, $\sum\limits_{l=1}^{\infty} |\gamma_l(y)|/_l<\infty$.

Если при этом выполнены 3° и 4°, то двойной ряд (1) $|\Gamma_p|$-суммируем.

Теорема 5. *Для того чтобы А-преобразование существовало на классе абсолютно сходящихся в степени $p>1$ к S двойных $\{S_{mn}\}$, для которых $S_{mn}=0(1)$, достаточно, чтобы 5° $\sum\limits_{k,\,l=1}^{\infty}|a_{kl}(x,y)|<<\infty$. Если при этом $\delta_k'(x)$ и $\delta_l'(y)$ — конечные в D, где*

$$\delta_k(x)=\sum_{i=k}^{\infty}a_i(x),\ \delta_l(y)=\sum_{i=l}^{\infty}a_i(y);\quad a_{kl}(x,y)=a_k(x)\,a_l(y),$$

$$6^\circ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x}{k}|\delta_k'(x)|=0(1),\quad \sum_{l=1}^{\infty}\frac{y}{l}|\delta_l'(y)|=0(1),$$

$$7^\circ \int_a^{\infty}|\delta_k'(x)|\,dx=0(1),\quad \int_b^{\infty}|\delta_l'(y)|\,dy=0(1),$$

то $\{S_{mn}\}|A|_p$ — суммируема.

Доказательство. Так как $S_{mn}=0(1)$, то 5° обеспечивает существование A-преобразования. В силу преобразования Харди

$$\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{N}\delta_k(x)\,\delta_l(y)=\sum_{k=1}^{M-1}\sum_{l=1}^{N-1}a_k(x)\,a_l(y)\,S_{kl}+\delta_M(x)\,\delta_N(y)\times$$

$$\times S_{MN}+\sum_{k=1}^{M-1}\sum_{l=N}^{\infty}a_k(x)\,a_l(y)\,S_{KN}+\sum_{l=1}^{N-1}\sum_{k=M}^{\infty}a_k(x)\,a_l(y)\,S_{Ml},$$

откуда

$$\sum_{k,\,l=1}^{\infty}\delta_k(x)\,\delta_l(y)\,u_{kl}=\sum_{k,\,l=1}^{\infty}a_k(x)\,a_l(y)\,S_{kl}.$$

Осталось применить теорему 2 по отношению $\|\delta_k(x)\,\delta_l(y)\|$, заметив, что в нашем случае $\gamma(x)=0$, $\gamma(y)=0$.

В частности, имеют место теоремы.

Теорема 6. *Для того чтобы абсолютно сходящийся в степени $p>1$ к S двойной ряд (1) был $|\Gamma|_p$-суммируем Γ-методом, сохраняющим сходимость на классе ограниченных рядов, достаточно, чтобы имели место 3° и 4°.*

Теорема 7. *Для того чтобы абсолютно сходящаяся в степени $p>1$ к S $\{S_{mn}\}$ была $|A|_p$-суммируема A-методом, сохраняющим сходимость на классе ограниченных $\{S_{mn}\}$, достаточно, чтобы имели место 6° и 7°.*

Γ- или A-преобразования, сохраняющие абсолютную сходимость в степени p, обозначим соответственно через $|\gamma|_p$ или $|a|_p$. Пусть

$$C_{mn}^{(\alpha,\,\beta)}=\sum_{k,\,l=1}^{m,\,n}\frac{E_{m-k}^{\alpha-1}\,E_{n-l}^{\beta-1}}{E_m^{\alpha}\,E_n^{\beta}}u_{kl},\ \varphi(x,y)=e^{-x}e^{-y}\sum_{k,\,l=0}^{\infty}\frac{x^k y^l}{k!\,l!}S_{kl}.$$

$C,\alpha,\beta)$ и B — средние.

Теорема 8. (C, α, β)- и *B-методы являются соответственно* $|\gamma|_p$ и $|a|_p$-методами ($\alpha > 0$, $\beta > 0$).

Доказательство. В нашей работе* доказано, что условия 3°, 4°, 6° и 7° для этих методов выполнены. Осталось применить теоремы 6 и 7.

Поступила в редколлегию 17.01.83.

УДК 517.55

С. Ю. ФАВОРОВ

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ СИБОНИ И ВОНГА

Рассматривается класс B функций $\Phi(z, t)$, определенных при $z \in C^n$, $t \geqslant 0$ и таких, что функция $\Phi(z, |w|)$, $w \in \mathbf{C}$, плюрисубгармоническая (п.—с.—г.) в $\mathbf{C}^{n+1}$ (см. [1]). Как отметил Л. И. Ронкин [2], для функций $\Phi(z, t) \in B$ имеет место следующая

Теорема А. *Пусть* $\alpha(t)$ — *произвольная монотонно растущая функция, и пусть для функции* $\Phi(z, t) \in B$ *при каждом* z *из некоторого множества положительной* Г*-емкости*** $\Phi(z, t) \leqslant \alpha(t) + K(z)$, *где* $K(z) < \infty$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *и любого ограниченного множества* $S \subset \mathbf{C}^n$ *найдется константа* $K(S, \varepsilon) < \infty$ *такая, что для всех* $z \in S$ *и всех* $t \geqslant 0$ $\Phi(z, t) \leqslant \alpha \times (t^{1+\varepsilon}) + K(S, \varepsilon)$.

Таким образом, рост функций класса B по переменной t в каком-то смысле один и тот же для всех $z \in C^n$, кроме некоторого «редкого» множества. С этой точки зрения рост функций класса B изучался ранее в [1], а также в [3, 4]. При этом рассматривались такие характеристики роста, как порядок, нижний порядок, тип, класс сходимости. Для характеристики «редкости» множества в [1, 3] использовалось понятие Г-емкости, в [3, 4] — понятие плюриполярности (см. ниже). Отметим, что в [3, 4] использовался метод «обратных функций» П. Лелона, который он применил в работе [5] для изучения роста целых и п.-с.-г. функций по одной переменной.

Л. И. Ронкин обратил внимание автора на следующий результат Сибони и Вонга, который дает более точную оценку роста п.-с.-г. функций на лучах, выходящих из начала координат, чем теорема А:

Теорема Б ([6], предложение 1). *Для любого множества* $F \subset P^{n-1}$ *положительной* Г*-емкости найдется константа* $\theta =$

---

* К. М. Слепенчук. Об условиях абсолютной суммируемости в степени p-рядов. — Укр. мат. журн., 1982, 34, № 1, с. 74—80.

** Определение Г-емкости см. [1].

$= \theta(F) < \infty$ *такая, что любая п.-с.-г. в шаре* $\{z : |z| < R\}$ *функция* $v(z)$ *при всех* $t < R$ *удовлетворяет неравенству*

$$\sup\{v(z) : |z| \leqslant \theta t\} \leqslant \sup\{v(z) : |z| \leqslant t,\ \pi(z) \in F\},$$

где π — *каноническая проекция* $\boldsymbol{C}^n$ *на* $\boldsymbol{P}^{n-1}$.

Обобщение этого неравенства на функции $\Phi(z, t) \in \mathrm{B}$ должно иметь вид

$$\sup\{\Phi(z, \theta t) : |z| \leqslant 1\} \leqslant \sup\{\Phi(z, t) : z \in E\}, \qquad (1)$$

где E — достаточно «массивное» множество. Однако для всех функций из B такое неравенство невозможно: в [1] на с. 233—235 построен пример целой в $\boldsymbol{C}^2$ функции $f(z, w)$ такой, что величина $\sup\{\ln|f(z, w)| : |z| < r,\ |w| < t\}$ имеет по переменной t минимальный тип роста при порядке 1 для $r < 1$ и нормальный тип роста при порядке 1 для $r = 1$. Очевидно, что для функции $\Phi(z, t) = \sup\{\ln|f(z, w)| : |w| = t\}$ и множества $E = \{z : |z| < 1/2\}$ неравенство (1) не может выполняться для всех $t \geqslant 0$.

В настоящей заметке находятся условия, при которых неравенство (1) имеет место для функций из класса В (теорема 1). При этом для характеристики «массивности» множества используется понятие плюриполярности. Напомним, что множество $E \subset \Omega$ называется плюриполярным в Ω, если для любой точки из Ω найдется ее окрестность $\omega \subset \Omega$ и п.-с.-г. в ω функция $v(z) \not\equiv -\infty$ такая, что $E \cap \omega \subset \{z : v(z) = -\infty\}$. Поскольку плюриполярные множества имеют нулевую Г-емкость, в качестве следствия получается усиление теоремы Б (теорема 2). Как приложение получены некоторые утверждения о росте и распределении нулей целых функций в $\boldsymbol{C}^{n+1}$ (предложения 3 и 4).

Для $\Phi(z, t) \in \mathrm{B}$ и $\alpha \geqslant 0$ полагаем $A(\Phi, \alpha) = \varlimsup\limits_{z \to \infty} \Phi(z, |z|^{-\alpha}) \times (\ln|z|)^{-1}$. Этот предел не равен $-\infty$, так как величина $\sup \times \{\Phi(z, r^{-\alpha}), |z| = r\}$ выпукла относительно $\ln r$. В частности, для $\Phi(z, t) = \sup\{V(z \cdot w) : w \in \boldsymbol{C},\ |w| \leqslant t\}$, где $V(z)$ — п.-с.-г. в $\boldsymbol{C}^n$ функция, $A(\Phi, \alpha) \leqslant 0$ при $\alpha \geqslant 1$.

Теорема 1. *Для любого неплюриполярного множества* $E \subset \boldsymbol{C}^n$ *и любого* $s < \infty$ *найдется константа* $K = K(E, s) < \infty$ *такая, что для любой функции* $\Phi(z, t) \in \mathrm{B}$ *и любых* $t \geqslant 0$, $\alpha \geqslant 0$

$$\sup\{\Phi(z, \theta t) : |z| \leqslant s\} \leqslant \sup\{\Phi(z, t) : z \in E\} + K[A(\Phi, \alpha)]^+,$$

где $\theta = \exp\{-\alpha K\}$.

Замечание. Утверждение теоремы содержательно лишь при $A(\Phi, \alpha) < +\infty$.

Следствие 1. *Для любого неплюриполярного множества* $E \subset \boldsymbol{C}^n$ *найдется константа* $\theta = \theta(E)$ *такая, что любая п.-с.-г. в* $\boldsymbol{C}^n$ *функция* $V(z)$ *удовлетворяет при любом* $t \geqslant 0$ *неравенству*

$$\sup\{V(z) : |z| \leqslant \theta t\} \leqslant \sup\{V(z \cdot w) : z \in E,\ w \in \boldsymbol{C},\ |w| \leqslant t\}.$$

С л е д с т в и е 2. *Пусть функция* $\Phi(z, t) \in$ B *такая, что при* $z \to \infty$ $\Phi(z, 1) = O(\ln|z|)$. *Тогда для любого неплюриполярного компакта* E *найдется константа* $Q = Q(E, \Phi) < \infty$ *такая, что при всех* $t \geqslant 0$

$$|\sup\{\Phi(z, t) : z \in E\} - \sup\{\Phi(z, t) : |z| = 1\}| \leqslant Q.$$

Для доказательства следствия 2 надо применить теорему 1 при $\alpha = 0$ вначале к множеству E и числу $s = 1$, а затем к множеству $\{z : |z| \leqslant 1\}$ и числу $s = \sup\{|z| : z \in E\}$.

Покажем теперь, как из теоремы 1 получить усиление теоремы Б. Заметим, что множество $F \subset \boldsymbol{P}^{n-1}$ неплюриполярно тогда и только тогда, когда множество $\pi^{-1}(F) \cap \{z : |z| \leqslant 1\}$ неплюриполярно в $\boldsymbol{C}^n$. Далее, если функция $V(z)$ п.-с.-г. в шаре $\{z : |z| < R\}$, то для любого $t < R$ можно подобрать числа $a > 0$ и b так, чтобы $\sup\{V(z) : z \in \boldsymbol{C}^n, |z| \leqslant t, \pi(z) \in F\} > a \ln t + b$ и $\sup\left\{V(z) : |z| = \frac{t+R}{2}\right\} < a \ln \frac{t+R}{2} + b$. Применяя к функции

$$\tilde{V}(z) = \begin{cases} \max\{V(z), a\ln|z| + b\} & \text{при } |z| < \frac{t+R}{2} \\ a\ln|z| + b & \text{при } |z| \geqslant \frac{t+R}{2} \end{cases}$$

следствие 1, получаем такое утверждение:

Теорема 2. *Для любого неплюриполярного множества* $F \subset \boldsymbol{P}^{n-1}$ *найдется константа* $\theta = \theta(F) > 0$ *такая, что для любого шара* $\{z : |z| < R\} \subset \boldsymbol{C}^n$ *и любой п.-с.-г. в этом шаре функции* $V(z)$ *для всех* $t \in (0, R)$ *выполняется неравенство*

$$\sup\{V(z) : |z| \leqslant \theta t\} \leqslant \sup\{V(z) : |z| \leqslant t, \pi(z) \in F\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Ввиду неравенства $A(\Phi, \alpha) \leqslant A(\Phi, 0)$ достаточно доказать эту теорему при $\alpha > 0$. Далее, если для такого α $0 \leqslant A(\Phi, \alpha) < +\infty$, то, рассматривая вспомогательную функцию $\Phi_\varepsilon(z, t) = \Phi(z, t) + [A(\Phi, \alpha) + \varepsilon]\alpha^{-1}\ln t$, сведем задачу к случаю $A(\Phi, \alpha) < 0$. Утверждение теоремы при $\alpha > 0$, $A(\Phi, \alpha) < 0$ вытекает из следующего предложения:

Предложение 1. *Для любых чисел* $s < \infty, \alpha_m > 0$, $t_m \geqslant 0$ *и функций* $\Phi_m(z, t) \in$ B *таких, что*

$$A(\Phi_m, \alpha_m) < 0, \tag{2}$$

множество

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=k}^{\infty} \{z \in \boldsymbol{C}^n : \Phi_m(z, t_m) < \sup_{|z|=s} \Phi_m(z, t_m \exp\{-m^2\alpha_m\})\}$$

плюриполярно.

Д о к а з а т е л ь с т в о п р е д л о ж е н и я 1. Полагаем $R_m(z) = \sup\{t : \Phi_m(z, t) \leqslant \sup[\Phi_m(z, t_m \exp\{-m^2\alpha_m\}) : |z| = s]\}$. Из условия (2) следует, что для всех m $\Phi_m(z, 0) \equiv -\infty$, т. е. $R_m(z)$

определено при всех $z \in C^n$. Согласно [5], функция $-\ln R_m(z)$ п.-с.-г. в C^n, поэтому величина $\sup\{-\ln R_m(z):|z|=r\}$ выпукла относительно $\ln r$. Выберем $r>d>s$, тогда

$$\sup\{-\ln R_m(z):|z|=d\} \leqslant \frac{\ln r-\ln d}{\ln r-\ln s}\sup\{-\ln R_m(z):|z|=s\}+ \\ +\frac{\ln d-\ln s}{\ln r-\ln s}\sup\{-\ln R_m(z):|z|=r\}. \qquad (3)$$

Ввиду (2) при достаточно больших $|z|$ $R_m(z)>|z|^{-\alpha_m}$, поэтому, переходя в (3) к пределу при $r\to\infty$, приходим к неравенству

$$\sup\{-\ln R_m(z):|z|=s\}-\sup\{-\ln R_m(z):|z|=d\}\geqslant \\ \geqslant -\alpha_m(\ln d-\ln s). \qquad (4)$$

Полагаем $v_m(z)=m^{-2}\alpha_m^{-1}[-\ln R_m(z)+\inf\{\ln R_m(z):|z|=d\}]$. По принципу максимума, $v_m(z)\leqslant 0$ при $|z|\leqslant d$ и, согласно (4), ряд $\sum_{m=1}^{\infty}\sup\{v_m(z):|z|=s\}$ сходится. Пусть T_m — унитарный оператор в C^n такой, что для фиксированной точки z_0, $|z_0|=s$ $\sup\{v_m\times\times(z):|z|=s\}=v_m(T_m z_0)$. Полагаем $v(z)=\sum_{m=1}^{\infty}v_m(z)$, $\tilde{v}(z)= =\sum_{m=1}^{\infty}v_m(T_m(z))$. Отметим, что $\tilde{v}(z_0)\neq-\infty$, поэтому $\tilde{v}(z)\not\equiv-\infty$. Так как $\int_{|z|=s}v(z)\,d\tau(z)=\int_{|z|=s}\tilde{v}(z)\,d\tau(z)$, где $\tau(z)$ — мера Лебега на сфере, то и п.-с.-г. в шаре $\{z:|z|<d\}$ функция $v(z)$ не равна тождественно $-\infty$. Из определения $R_m(z)$ следует, что $\inf\{R_m\times\times(z):|z|=s\}=t_m\exp\{-m^2\alpha_m\}$. Поэтому по принципу максимума

$$\inf\{\ln R_m(z):|z|=d\}\leqslant \ln t_m-m^2\alpha_m.$$

Кроме того, при $z\in E$ на некоторой последовательности $m'\to\infty$ $R_{m'}(z)>t_{m'}$, так что $v_{m'}(z)\leqslant -1$, и поэтому $E\cap\{z:|z|<d\}\subset\subset\{z:v(z)=-\infty\}$. Отсюда ввиду произвольности d следует доказываемое утверждение.

Отметим, что ограничения на рост функции $\Phi(z,t)\in\mathrm{B}$ на множестве $\{(z,t):t=|z|^{-\alpha}\}$ влекут ограничения на рост этой функции по переменной z. Именно для функции $\Phi(z,t)\in\mathrm{B}$ и $r\geqslant 0$ обозначим $u(r,t)=\sup\{\Phi(z,t):|z|=r\}$ и положим

$$\rho_1=\overline{\lim_{r\to\infty}}(\ln u(r,1))(\ln r)^{-1},\ \rho_2=\overline{\lim_{t\to\infty}}(\ln u(1,t))(\ln t)^{-1}$$

и для $\alpha>0$ $\tau_\alpha=\overline{\lim_{r\to\infty}}\ln u(r,r^{-\alpha})(\ln r)^{-1}$. Имеет место

Теорема 3. *Для любой функции* $\Phi(z, t) \in \text{B}$ $\rho_1 \leqslant \alpha\rho_2 + \tau_\alpha$.

Доказательство. Функция $u(r, t)$ монотонно неубывающая и выпуклая относительно переменных $\ln r$, $\ln t$. Поэтому для любых неотрицательных $r_1, r_2, t_1, t_2, \lambda, \mu$ таких, что $\lambda + \mu = 1$ $u(r_1^\lambda r_2^\mu, t_1^\lambda t_2^\mu) \leqslant \lambda u(r_1 t_1) + \mu u(r_2, t_2)$. Полагая в этом неравенстве $\mu = (\tau_\alpha + \varepsilon)(\alpha\rho_2 + \tau_\alpha + \varepsilon + \alpha\varepsilon)^{-1}$, $\lambda = 1 - \mu$, $r_1 = 1$, $r_2 = r^{\mu^{-1}}$, $t_1 = r^{\alpha\lambda^{-1}}$, $t_2 = r^{-\alpha\mu^{-1}}$ и пользуясь произвольностью выбора $\varepsilon > 0$, получим доказываемое утверждение.

В качестве приложения отметим следующие результаты:

Предложение 2. *Пусть* $\{f_m(z)\}$ — *семейство голоморфных в шаре* $\{z \in \boldsymbol{C}^n : |z| < R\}$ *функций. Если для каждой комплексной прямой* L *из некоторого неплюриполярного множества* $F \subset \boldsymbol{P}^{n-1}$ *сужение функций этого семейства на* L *нормально на* L, *то это семейство нормально в некоторой окрестности нуля в* $\boldsymbol{C}^n$.

Это утверждение отличается от следствия 10 работы [6] лишь тем, что в [6] множество F предполагается имеющим положительную Г-емкость. Доказательство предложения 2 проводится так же, как доказательство упомянутого следствия с использованием теоремы 2 вместо теоремы Б.

Пусть, далее, $f(z, w) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m(z) w^m$, $z \in \boldsymbol{C}^n$, $w \in \boldsymbol{C}$ — целая функция в $\boldsymbol{C}^{n+1}$ и пусть $\Phi(z, t) = \sup\{\ln|f(z, w)| : |w| < t\}$. Из неравенств Коши следует, что неравенство $A(\Phi, \alpha) \leqslant 0$ для некоторого $\alpha < \infty$ выполняется тогда и только тогда, когда $b_0(z) \equiv \equiv \text{const}$, а $b_m(z)$ — полиномы, удовлетворяющие при всех $|z| > r$ и $m = 1, 2, 3, \ldots$ неравенствам

$$|b_m(z)| \leqslant |z|^{mN}, \tag{5}$$

где константы N, r не зависят от m. Поэтому из теоремы 1 следует

Предложение 3. *Пусть* $f(z, w)$, $z \in \boldsymbol{C}^n$, $w \in \boldsymbol{C}$ — *целая функция в* $\boldsymbol{C}^{n+1}$ *такая, что ее коэффициенты разложения по степеням* w *при некоторых* N, r *удовлетворяют неравенствам (5) и, кроме того,* $f(z, 0) \equiv \text{const}$. *Тогда для любого* $s < \infty$ *и любого неплюриполярного множества* $E \subset \boldsymbol{C}^n$ *найдется константа* $\theta = \theta \times \times (E, s, N)$ *такая, что при всех* $t \geqslant 0$

$$\sup\{|f(z, w)| : |z| \leqslant s, \ |w| \leqslant \theta t\} \leqslant \sup\{|f(z, w)| : z \in E, \ |w| \leqslant t\}.$$

Замечание. Если $f(z, 0)$ — полином от z степени p, а остальные коэффициенты разложения по степеням w функции $f(z, w)$ удовлетворяют неравенствам (5), то из теоремы 1 следует, что для всех $t \geqslant 0$ имеет место неравенство

$$\sup\{|f(z, w) : |z| \leqslant s, \ |w| \leqslant \theta t\} \leqslant R \sup\{|f(z, w)| : z \in E, \ |w| < t\},$$

где константа $R < \infty$ зависит от E, s, p.

Если теперь положить $\Phi(z, t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|f(z, te^{i\varphi})|\,d\varphi$, то для тех точек $z \in \boldsymbol{C}^n$, для которых $f(z, 0) \neq 0$, по формуле Йенсена $\Phi(z, t) = N(z, t) + \ln|f(z, 0)|$, где $N(z, t) = \int\limits_0^t \frac{n(z, r)}{r}\,dr$, а $n(z, r)$ — число корней функции $f(z, w)$ как функции переменного w в круге $|w| < r$.

Поэтому имеет место также

Предложение 4. *Пусть* $f(z, w)$, $z \in \boldsymbol{C}^n$, $w \in \boldsymbol{C}$ — *целая функция в* $\boldsymbol{C}^{n+1}$, *коэффициенты разложения по степеням* w *которой при некоторых* r, N *удовлетворяют неравенствам* (5) *и, кроме того,* $f(z, 0) \equiv \mathrm{const} \neq 0$. *Тогда для любого* $s < \infty$ *и любого неплюриполярного множества* $E \subset \boldsymbol{C}^n$ *найдется константа* $\theta = \theta(E, s, N)$ *такая, что для всех* $t \geqslant 0$

$$\sup\{N(z, \theta t) : |z| \leqslant s\} \leqslant \sup\{N(z, t) : z \in E\}.$$

Автор выражает глубокую признательность Л. И. Ронкину за постоянное внимание к работе.

Список литературы: 1. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных.— М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1971.— 430 с. 2. *Ронкин Л. И.* Об одном общем подходе к изучению распределения значений целых и мероморфных функций на параллельных комплексных прямых.— В кн.: Тез. докл. Всесоюз. конф. по теории функций комплексного переменного. Х., 1971, с. 189—190. 3. *Фаворов С. Ю.* О функциях класса β и их применении в теории мероморфных функций многих переменных.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1974, вып. 20, с. 149—169. 4. *Фаворов С. Ю.* О росте плюрисубгармонических функций.— Сиб. мат. журн., 1983, 24, № 1, с. 168—174. 5. *Lelong P.* Fonctionnelles analy Ligues et fonctions entieres. Chapitre VI, Press Univ. de Montreal, 1968.— 169 p. 6. *Sibony N., Wong P. N.* Some results on Global Analitic Sets, Seminaire P. Lelong — H. Scoda (Analyse).— Lecture Notes, 1979, № 694, p. 221—237.

Поступила в редколлегию 18.06.84.

УДК 517.9

В. И. ХРАБУСТОВСКИЙ

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ВЫРОЖДАЮЩИМСЯ ВЕСОМ (РАЗЛОЖЕНИЯ ПО БЛОХОВСКИМ РЕШЕНИЯМ)

В данной статье строятся формулы разложения по ограниченным на оси (в отличие от [1]) решениям периодической симметрической системы m дифференциальных уравнений

$$l[y] = \lambda w(t)\, y \tag{1}$$

произвольного порядка r с матричным (возможно всюду вырожденным) весом $w(t) \geqslant 0$.

Эти разложения строятся в двух видах: в n° 2 — по блоховским решениям (ограниченным на оси решениям Флоке) и в n° 4 — по линейным комбинациям этих решений, обладающим тем удобным свойством, что для их построения (см. n° 3) не надо знать (в отличие от блоховских решений) собственные векторы матрицы монодромии (м. м.). Предварительно в n° 1 исследуется самосопряженное (эрмитово) отношение L_α, порождаемое краевой задачей для (1) с граничным условием $\tilde{y}(1) = e^{i\alpha}\tilde{y}(0)$ *. Строится характеристическая матрица и показывается, что $L_{\alpha+0} = L_{\alpha-0}$ (в смысле равномерной резольвентной сходимости) и что в то же время может $L_{\alpha+0} \neq L_\alpha$ (для конечного числа значений $e^{i\alpha}$). Найдено предельное отношение $L_{\alpha+0}$. Результаты n° 3,4 являются новыми и для скалярного уравнения с $w(t) \equiv 1$. Часть результатов работы анонсирована в [2].

1. Пусть $J = (a, b) \subseteq R^1$. Обозначим: $H = L^2(J, w\,dt)$; $N = \{h \in E^n : Y_\lambda(t) h \overset{H}{=} 0\}$, где $n = mr$, $Y_\lambda(t)$ — такое $m \times n$ — матричное решение (1), что $\tilde{Y}_\lambda(0) =$ единичной $n \times n$ — матрице 1_n; P — ортопроектор на $N^\perp$. Для $J = R^1 N$ и P обозначаем N_∞ и P_∞ соответственно. В интегралах по J пределы интегрирования опускаем. Считаем, что в (1) период коэффициентов $= 1$ и м. м. $\tilde{Y}_\lambda(1)$ обозначаем X_λ.

Теорема [1].

$$X_\lambda N_\infty = N_\infty, \quad X_\lambda (GN_\infty)^\perp = (GN_\infty)^\perp, \tag{2}$$

$$b - a \geqslant \varkappa \Rightarrow N = N_\infty, \tag{3}$$

где $iG =$ *старшему коэффициенту в нуле эквивалентной (1) системы первого порядка из [1],* $\varkappa = \deg$ *минимального полинома* X_0.

Ниже в этом n° $J = (0, 1)$, $\alpha \in R^1$. В силу [1]

$$N \supseteq K_\alpha(\lambda) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Ker}(X_\lambda - e^{i\alpha} 1_n) = K_\alpha(i), \ \lambda \overline{\in} R^1, \tag{4}$$

$$N \supseteq K_\alpha(\lambda_0) \Rightarrow K_\alpha(\lambda) \supseteq K_\alpha(\lambda_0) = K_\alpha(i). \tag{5}$$

Лемма 1. *Уравнение*

$$(1_n - e^{-i\alpha} X_\lambda)\hat{h} = (iG)^{-1} h \tag{6}$$

имеет решение $\hat{h} = \hat{h}(\alpha, \lambda, h)$, *если и только если* $h \perp K_\alpha(\lambda)$. *Если* $K_\alpha(\lambda_0) \subseteq N$ *(при* $\lambda_0 \overline{\in} R^1$ *это так в силу (4)), то в окрестности* $\lambda_0 P\hat{h}$ *является оператором в* $N^\perp$, *аналитически зависящим от* λ.

Доказательство. По теореме Фредгольма (6) разрешимо, если и только если $G^{-1}h \perp \forall$ решению g уравнения

$$(X_\lambda^* - e^{-i\alpha} 1_n) g = 0. \tag{7}$$

---

* Если z — решение (1) или аналогичного неоднородного уравнения, то $\tilde{z}$ — соответствующее решение эквивалентной системы первого порядка из [1].

Но учитывая, что $X^*_{\bar\lambda} G X_\lambda = G$, и (4), видим, что любое решение (7) $g = Ge$, где $e \in K_\alpha(\lambda)$, и первое утверждение доказано. Из (5) следует, что в окрестности $\lambda_0 K_\alpha(\lambda) \subseteq \boldsymbol{N}^*$. Значит в этой окрестности $\forall h \in \boldsymbol{N}^\perp \exists \hat h$, которое можно выбрать аналитически зависящим от λ по формуле (1.20) из [3, с. 22], если учесть, что $K_\alpha(\lambda) = K_\alpha(i)$ в этой окрестности в силу (5). Так как $P\hat h$ вектором h определяется однозначно, то все доказано.

Рассмотрим в H отношение $L_\alpha = \{\{u, v\} \in H^2 : u \overset{H}{=} y,\ \tilde y \in \mathrm{AC},\ l[y] \overset{\text{п. в.}}{=} wv,\ \tilde y(1) = e^{i\alpha} \tilde y(0)\}$.

Теорема 1. $L^*_\alpha = L_\alpha$. *Пусть* $M_\alpha = M_\alpha(\lambda)$ — *характеристическая матрица резольвенты* L_α (см. [1]).

$$\forall h \in \boldsymbol{N}^\perp : M_\alpha(\lambda) h = P\left(\hat h - \frac{1}{2}(iG)^{-1} h\right), \quad \lambda \bar\in R^1. \tag{8}$$

Доказательство. $\forall f \in H$ положим $h = \int Y^*_{\bar\lambda}(s) w(s) f(s) ds \in \boldsymbol{N}^\perp$. Непосредственная проверка показывает, что $y(t) = Y_\lambda(t) \times \left\{\hat h - \frac{1}{2}(iG)^{-1} h - \int \frac{i}{2} \operatorname{sgn}(t-s) G^{-1} Y^*_{\bar\lambda}(s) w(s) f(s) ds\right\}$ является при $\forall f \in H$, $\lambda \bar\in R^1$ решением задачи

$$l[y] - \lambda w y = wf, \quad \tilde y(1) = e^{i\alpha} \tilde y(0). \tag{9}$$

Из очевидной симметричности L_α и разрешимости (9) при $\forall f \in H$, $\lambda \bar\in R^1$ выводим, как в доказательстве леммы 6 из [1], самосопряженность L_α, а затем формулу (8).

Обозначим $S = \{z \in C : |z| = 1\}$. В силу [1] при $\lambda \bar\in R^1$ $\sigma(X_\lambda) \cap S = \sigma(X_i) \cap S \overset{\text{def}}{=} \sigma_s$ и у σ_s суммарная алгебраическая кратность $d(\lambda) = d(i)$. Пусть $R_s(\lambda)$ — отвечающий σ_s проектор Рисса м. м. X_λ.

Следствие 1. *При* $e^{i\alpha} \bar\in \sigma_s$ *для* $M_\alpha(\lambda)$ *справедливы формулы:*

$$M_\alpha(\lambda) = P\left((1_n - e^{-i\alpha} X_\lambda)^{-1} - \frac{1}{2} 1_n\right)(iG)^{-1} P, \ \lambda \bar\in R^1, \tag{10}$$

$$M_\alpha(\lambda) = P\left(F_\alpha(X_\lambda) - \frac{1}{2} 1_n\right)(iG)^{-1} P, \ \lambda \bar\in R^1, \tag{11}$$

где $F_\alpha(\rho) = \begin{cases} (1 - e^{-i\alpha}\rho)^{-1} & \text{при } \rho \in \sigma(X_\lambda) \setminus \sigma_s \\ 0 & \text{при } \rho \in \sigma_s. \end{cases}$.

Доказательство. При $e^{i\alpha} \bar\in \sigma_s$ из (6) выводим, что при $\lambda \bar\in R^1 \forall h \in E^n \hat h = (1_n - e^{-i\alpha} X_\lambda)^{-1} (iG)^{-1} h$. Подставив это $\hat h$ в (8),

---

* Действительно, если $\exists \lambda_j \to \lambda_0 : K_\alpha(\lambda_j) \cap N \neq K_\alpha(\lambda_j)$, то в силу (5) $K_\alpha(\lambda_j) \supset K_\alpha(\lambda_0)$. Значит, все миноры $X_\lambda - e^{i\alpha} 1_n$ порядка $< \dim K_\alpha(\lambda_0)^\perp$ равны нулю при $\lambda = \lambda_j$, а значит, они $\equiv 0$, что невозможно.

получим (10). Так как $P = P_\infty P = PP_\infty$, то при $e^{i\alpha} \overline{\in} \sigma_s P (1_n - - e^{-i\alpha} X_\lambda)^{-1} (iG)^{-1} P = PF_\alpha (X_\lambda) (iG)^{-1} P + PP_\infty (1_n - e^{-i\alpha} X_\lambda)^{-1} \times \times R_s (iG)^{-1} P_\infty P$. Но в силу (2) второе слагаемое $= 0$, ибо, как показано в [1],

$$P_\infty R_s (\lambda) G^{-1} P_\infty = 0, \quad \lambda \overline{\in} R^1. \tag{12}$$

Итак, (8) при $e^{i\alpha} \overline{\in} \sigma_s$ преобразуется в известную [4] формулу (10), теряющую смысл при $e^{i\alpha} \in \sigma_s$.

Из (11) следует, что $\forall \alpha M_{\alpha+0} = M_{\alpha-0} =$ правой части (11) и при $e^{i\alpha} \overline{\in} \sigma_s M_{\alpha+0} = M_\alpha$. Однако, как показано в [2] (см. также пример 1 данной работы), бывает, что $M_{\alpha+0} \neq M_\alpha$. Возникает вопрос: характеристической матрицей какого отношения является $M_{\alpha+0}$?

Рассмотрим в H отношение $L_{\alpha+0} = \{\{u, v\} \in H^2,\ u \overset{H}{=} y,\ \tilde{y} \in AC,\ l[y] \overset{\text{п. в.}}{=} wv,\ \tilde{y}(1) - e^{i\alpha} \tilde{y}(0) \in \boldsymbol{N}_\infty,\ \tilde{y}(0) \in (G\boldsymbol{N}_\infty)^\perp\}$. Ответ на вопрос дает

Теорема 2. $L^*_{\alpha+0} = L_{\alpha+0}$. *Характеристическая матрица резольвенты* $L_{\alpha+0}$ *равна* $M_{\alpha+0}$.

Доказательство*. $\forall f \in H$ положим $g = (iG)^{-1} \int Y^*_{\bar{\lambda}} (s) \times \times w(s) f(s)\, ds \in (G\boldsymbol{N}_\infty)^\perp$, $g_s = R_s(\lambda) g$. Из (12), (2) следует, что

$$g_s \in \boldsymbol{N}_\infty \cap (G\boldsymbol{N}_\infty)^\perp, \quad X_\lambda F_\alpha (X_\lambda) g \in (G\boldsymbol{N}_\infty)^\perp. \tag{13}$$

Обозначим

$$y(t) = \int Y_\lambda (t) \left\{ \left(F_\alpha (X_\lambda) - \frac{1}{2} 1_n \right) (iG)^{-1} - - \frac{i}{2} \operatorname{sgn}(t - s) G^{-1} \right\} Y^*_{\bar{\lambda}} (s) w(s) f(s)\, ds. \tag{14}$$

Легко видеть, что

$$\tilde{y}(0) = e^{-i\alpha} X_\lambda F_\alpha (X_\lambda) g + g_s, \quad \tilde{y}(1) = X_\lambda F_\alpha (X_\lambda) g, \tag{15}$$

откуда в силу (13) $\tilde{y}(1) - e^{i\alpha} \tilde{y}(0) \in \boldsymbol{N}_\infty$, $\tilde{y}(0) \in (G\boldsymbol{N}_\infty)^\perp$. Значит $y(t)$ (14) — решение задачи

$$l[y] - \lambda w y = wf, \quad \tilde{y}(1) - e^{i\alpha} \tilde{y}(0) \in \boldsymbol{N}_\infty, \quad \tilde{y}(0) \in (G\boldsymbol{N}_\infty)^\perp. \tag{16}$$

Оно единственно в H. Действительно, если y_1, y_2 — решения (16), то $y_1 - y_2 = Y_\lambda (t) h$, где $(X_\lambda - e^{i\alpha} 1_n) h \in \boldsymbol{N}_\infty$, $h \in (G\boldsymbol{N}_\infty)^\perp$. Из второго включения $\Rightarrow R_s h \in \boldsymbol{N}_\infty$ в силу (12). Значит $h_0 = = (X_\lambda - e^{i\alpha} 1_n)(1_n - R_s) h \in \boldsymbol{N}_\infty$ в силу (2) и первого включения. Отсюда получаем, что $(R_s - 1_n) h = e^{-i\alpha} F_\alpha (X_\lambda) h_0 \in \boldsymbol{N}_\infty$ в силу (2). Значит $h \in \boldsymbol{N}_\infty \subseteq \boldsymbol{N}$.

Докажем симметричность $L_{\alpha+0}$. Из единственности решения в H задачи (16) следует, что $\forall \{u, v\} \in L_{\alpha+0} : u \overset{H}{=} y$, где $y = (14)$

---

* В нем всюду $\lambda \overline{\in} R^1$.

с $f = v - \lambda u$. Следовательно, у $L_{\alpha+0}$ внеинтегральный член в формуле Лагранжа $= \tilde{y}_1^* i G \tilde{v}_2 |_0^1$, где y_1, y_2 — функции вида (14). Но тогда в силу (15), (13) он равен 0 и значит $L_{\alpha+0}$ симметрично. Доказательство теоремы 2 завершается аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание 1. Функции $M_\alpha(\lambda)$, $M_{\alpha+0}(\lambda)$ являются мероморфными* функциями λ. Их полюсы совпадают с собственными значениями задач

$$l[y] = \lambda w y,\ \tilde{y}(1) = e^{i\alpha}\tilde{y}(0),\ y \overset{H}{\neq} 0, \tag{17}$$

$$l[y] = \lambda w y,\ \tilde{y}(1) - e^{i\alpha}\tilde{y}(0) \in N_\infty,\ \tilde{y}(0) \in (GN_\infty)^\perp,\ y \overset{H}{\neq} 0, \tag{18}$$

соответственно.

Доказательство. Аналитичность $M_\alpha(\lambda)$ может нарушаться лишь при $\lambda \in U_s = \{\lambda \in R^1 : K_\alpha(\lambda) \cap N \neq K_\alpha(\lambda)\}$ в силу леммы 1, а аналитичность $M_{\alpha+0}(\lambda)$ — лишь при $\lambda \in T_s = \{\lambda \in R^1 : d(\lambda) > > d(i)\}$**. U_s не имеет конечных предельных точек. Действительно, если $\exists U_s \ni \lambda_j \to \lambda_0 \neq \infty$, то в силу (4), (5) все миноры $X_\lambda - e^{i\alpha} 1_n$ порядка $\dim K_\alpha(i)^\perp$ равны нулю при $\lambda = \lambda_j$, а значит, они $\equiv 0$, что невозможно. Из того, что мультипликаторы (м.) — алгебраические функции, следует, что и T_s конечных предельных точек не имеет. Отсюда с учетом неванлинновости M_α, $M_{\alpha+0}$ вытекает первое утверждение. Второе — следствие теоремы 1 из [1].

Из (11) и теорем 1, 2 следует, что $\forall\alpha$ при $\beta \to \alpha \pm 0$ $(L_\beta - - \lambda)^{-1} \to (L_{\alpha+0} - \lambda)^{-1}$ $(\lambda \overline{\in} R^1)$ в равномерной операторной топологии и что при $e^{i\alpha} \overline{\in} \sigma_s$ $L_{\alpha+0} = L_\alpha$. Однако при $e^{i\alpha} \in \sigma_s$ бывает, что $L_{\alpha+0} \neq L_\alpha$, как показывает

Пример 1. У системы

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} y' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & 1+\lambda \end{pmatrix} y \tag{19}$$

два м. $= 1$, а третий $= \rho = \exp\{-i(1+\lambda)\}$. При $\forall\lambda$ м. $= 1$ отвечает решение Флоке $\mathrm{col}(1,\ 0,\ 0) \overset{H}{=} 0$, а при $\lambda = 0$ — еще и $y_0 = \mathrm{col}(0,\ 1,\ 0) \overset{H}{\neq} 0$. М. ρ отвечает при $\forall\lambda$ решение Флоке $y_\lambda(t) = \mathrm{col}(\lambda,\ 0,\ \ln\rho)\rho^t$, которое $\overset{H}{\neq} 0$ при $\lambda \neq -1$. Учитывая, что $P = \mathrm{diag}(0,\ 1,\ 1)$, находим по формуле (11), что при $e^{i\alpha} \neq 1 = = \sigma_s M_\alpha(\lambda) = \mathrm{diag}(0,\ 0,\ i/(\rho e^{-i\alpha} - 1) + i/2)$, откуда

$$M_{+0}(\lambda) = \mathrm{diag}(0,\ 0,\ i/(\rho - 1) + i/2). \tag{20}$$

---

* Или целыми, как показывает пример (5) из [2].

** Бывает, что $\lambda \in U_s$, но $\overline{\in} T_s$ ($\lambda = 0$ в (5) из [2] и в (19), (5) и наоборот, ($\lambda = -1$ в (19)).

По формуле (8) находим, что

$$M_0(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -(1+\lambda)/\lambda & 1\\ 0 & 1 & -\lambda/(1+\lambda)+i/(\rho-1)+i/2\end{pmatrix}. \qquad (21)$$

Из (20), (21) в силу теоремы 1 из [1] следует: 1) $\lambda_j=2\pi j-1$ при $j\in \boldsymbol{Z}\setminus\{0\}$ являются общими собственными значениями (17) и (18), а $y_{\lambda_j}(t)$ — общими собственными функциями; 2) $\lambda=0$ — собственное значение только (17). Собственная функция $=y_0$; 3) $\lambda=-1$ — собственное значение только (18). Собственная функция $=\operatorname{col}(i-t,\ 0,\ 1)$ $(=dy_\lambda(t)/d\rho|_{\rho=1})$.

Замыкая в H линейные оболочки собственных функций, получаем в силу теоремы 1 из [1], что $\overline{D(L_0)}$ состоит из функций вида $\operatorname{col}(0,\ \mathrm{Const},\ f)$, где $f\in L^2(J,\ dx)\ominus \mathrm{Const}$, а $\overline{D(L_{+0})}$ — из функций вида $\operatorname{col}(0,\ 0,\ g)$, где $g\in L^2(J,\ dx)$.

Характеристическая матрица резольвенты отношения $\boldsymbol{L}_0=\boldsymbol{L}_0^*$, порождаемого (1) на оси, равна [1]:

$$M(\lambda)=P_\infty\left(R^+(\lambda)-\frac{1}{2}1_n\right)(iG)^{-1}P_\infty,\ \lambda\overline{\in}R^1, \qquad (22)$$

где $R^+(\lambda)$ — проектор Рисса м. м., отвечающий $\sigma_i=\{\rho\in\sigma(X_\lambda):|\rho|<1\}$.

Отметим, что $M(\lambda)=\lim\limits_{j\to\infty}M_{\alpha j}(\lambda)$, где $M_{\alpha j}(\lambda)$ — характеристическая матрица задачи вида (18) (если $e^{2i\alpha j}\overline{\in}\sigma_s$, то и вида (17)) на интервале $(-j,\ j)$, где $\varkappa/2\leqslant j\in\boldsymbol{Z}$. Действительно, в силу (3), (11) $M_{\alpha j}(\lambda)=P_\infty\left(F_\alpha(X_\lambda^{2j})-\frac{1}{2}1_n\right)(iG)^{-1}P_\infty$. Так как при $j\to\infty$ $F_\alpha(\rho^{2j})$ стремится к характеристической функции σ_i, то $F_\alpha(X_\lambda^{2j})\to$ $\to R^+(\lambda)$ (функциональное исчисление) и все доказано.

2. В этом n° строится спектральное разложение для (1) в форме Гельфанда. Здесь $J=R^1$.

После удаления из λ-оси не имеющего конечных предельных точек множества получим непересекающиеся интервалы Λ_p такие, что $\Lambda_p\cap(T_s\cup U_s)=\varnothing$ и при фиксированном $\lambda\in\Lambda_p$ среди м. $\in S\setminus\sigma_s$ нет совпавших (исключая м., равные тождественно на Λ_p) и равных 1. Спектр задачи (17), попавший при $\alpha\in[0,\ 2\pi)$ в Λ_p, состоит из собственных значений $\mu_p^q(\alpha):A_p^q\to\Lambda_p$ $(0\leqslant q<\infty$, интервал $A_p^q\subset[0,\ 2\pi))$ являющихся аналитическими и монотонными на A_p^q функциями. Соответствующие ортонормированные в $L^2((0,\ 1),\ w\,dt)$ собственные функции $x_{p\alpha}^q(t)$ можно выбрать непрерывно зависящими от $\alpha\in A_p^q$ и так, что $\exists\lim x_{p\alpha}^q(0)$, если $A_p^q\ni\alpha\to$ к концу A_p^q, а $e^{i\alpha}\not\to\sigma_s$ (эти факты можно доказать, ис-

пользуя [3, гл. 3, n° 4, 2], [5, с. 115], [2]). Перенумеровав $\mu_p^q(\alpha)$, $x_{p\alpha}^q(t)$, A_p^q, получим $\mu_j(\alpha)$, $x_{j\alpha}(t)$, A_j и положим

$$\lambda_j(\alpha) = \begin{cases} \mu_j(\alpha) & \text{при } \alpha \in A_j \\ \infty & \text{при } \alpha \overline{\in} A_j \end{cases},$$

$$y_{j\alpha}(t) = \begin{cases} Y_{\lambda_j(\alpha)}(t)\, P_\infty x_{j\alpha}(0) & \text{при } \alpha \in A_j \\ 0 & \text{при } \alpha \overline{\in} A_j \end{cases} \tag{23}$$

Теорема 3. *$\forall f \in D(\boldsymbol{L}_0)$ справедливы формулы обращения*

$$f(t) = \sum_j \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y_{j\alpha}(t)\, a_j(\alpha)\, d\alpha, \tag{24}$$

$$a_j(\alpha) = \int y_{j\alpha}^*(t)\, w(t)\, f(t)\, dt \tag{25}$$

и равенство Парсеваля

$$\int f^* w f\, dt = \sum_j \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |a_j(\alpha)|^2\, d\alpha, \tag{26}$$

ряд (24) сходится в H, а интеграл (25) — в $L^2((0, 2\pi), dx)$.

Доказательство. В силу (3), (11) характеристическая матрица задачи вида (17) на интервале $(0, \varkappa)$ равна при $\lambda \overline{\in} R^1$

$$\boldsymbol{M}_\alpha(\lambda) = P_\infty \left(F_\alpha(X_\lambda^\varkappa) - \frac{1}{2} 1_n \right) (iG)^{-1} P_\infty,$$

если $e^{i\alpha\varkappa} \overline{\in} \sigma_s$. Отсюда, учитывая (22), конечность σ_s и равенство $(\lambda \overline{\in} R^1)$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_\alpha(X_\lambda^\varkappa)\, d\alpha = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1-0} (X_\lambda^\varkappa - z 1_n)^{-1}\, dz = R^+(\lambda),$$

получим, что

$$M(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{M}_\alpha(\lambda)\, d\alpha, \ \lambda \overline{\in} R^1. \tag{27}$$

Пусть $\tau(\lambda)$ и $\tau_\alpha(\lambda)$ — спектральные матрицы, отвечающие $M(\lambda)$ и $\boldsymbol{M}_\alpha(\lambda)$ соответственно. В силу (27)

$$\int (1+\lambda^2)^{-1}\, d\tau_\alpha(\lambda) < \operatorname{Im} M(i). \tag{28}$$

Используя формулу обращения Стильтьеса [4, с. 631] и теорему Лебега, из (27), (28) выводим:

$$\tau(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau_\alpha(\lambda)\, d\alpha^*. \tag{29}$$

* Используя пример 1 из [5], можно показать, что (27), (29), вообще говоря, перестанут быть справедливыми, если в них соответственно $\boldsymbol{M}_\alpha$ заменить M_α, а τ_α — отвечающей M_α спектральной матрицей.

Но с помощью (10) из [1] и замечания 1 можно показать, что

$$\int_0^{2\pi} (\tau_\alpha(\mu_2) - \tau_\alpha(\mu_1))\, d\alpha = \sum_j \int_{\Delta_j} \tilde{y}_{j\alpha}(0)\,(\tilde{y}_{j\alpha}(0))^*\, d\alpha, \qquad (30)$$

где $\Delta_j = \{\alpha : \mu_1 < \lambda_j(\alpha) < \mu_2\}$. Пусть E_μ — спектральное семейство отношения $\boldsymbol{L}_0$ [1]. Используя [1] ((11), теорема 5), теорему Лебега, из (28)—(30) получаем, что для финитных $f \in H$

$$(E_{\mu_2} - E_{\mu_1}) f \overset{H}{=} \sum_j \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_j} y_{j\alpha}(t)\, a_j(\alpha)\, d\alpha,$$

откуда стандартно выводятся (24)—(26).

Отметим, что $y_{j\alpha}(0) \in L^\infty(0, 2\pi)$ в силу (28). Однако (ср. замечание 3 из [2]), если в (23) убрать P_∞, то в (24) некоторые интегралы могут стать расходящимися. Так для (19) расходится в 0 интеграл из (24), отвечающий собственному значению $\lambda = -(1+\alpha)$, если в (23) нет P_∞, а $f = \mathrm{col}(0, 0, g)$, $0 \leqslant g \in C_0^1(J)$ $(f \in D(\boldsymbol{L}_0))$.

3. Ниже $\sigma_s = \varnothing$, $n = 2k$ и выполнено условие:

$$\exists \Gamma \in M_n(\boldsymbol{C}) : \Gamma^* G \Gamma = i \begin{pmatrix} 0 & 1_k \\ -1_k & 0 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{def}}{=} J. \qquad (31)$$

Обозначим $\Lambda = R^1 \setminus T$, где T — множество тех λ, при которых > 1 порядки жордановых клеток, отвечающих унимодулярным м. Пусть проекторы Рисса $P^+(\lambda)\,(P^-(\lambda))$ отвечают м. I (II) рода [1, 5], $Q^+(\lambda) = R^+ + P^+$, $Q^-(\lambda) \underset{\mathrm{def}}{=} 1_n - Q^+$. Как известно [5], $P^+ \in C^\infty_{\mathrm{loc}}(\Lambda)$. В силу (31) $\mathrm{rg}\, P^+ = \mathrm{rg}\, P^- = r(\lambda)$, а в силу [5] $r(\lambda) = \mathrm{const}$ при $\lambda \in (\alpha, \beta) \subseteq \Lambda$. $\forall B(\lambda) \in M_n(\boldsymbol{C})$ полагаем $\Gamma^{-1} B(\lambda)\,\Gamma = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$, $B_l \in M_k(\boldsymbol{C})$. Обозначим $\tau^\pm(\lambda) = (1/2\pi)\,(2\,\mathrm{Re}\, P_1^\pm \pm i\,(P_2^\pm - P_3^\pm))$ $(\lambda \in \Lambda)$.

Лемма 2. $\tau^\pm(\lambda) \geqslant 0$, $\mathrm{rg}\,\tau^\pm(\lambda) = r(\lambda)$.

Доказательство. В силу леммы 2 из [1]

$$2\pi\tau^\pm = \mp(1_k,\ \mp i 1_k) J \Gamma^{-1} P^\pm \Gamma\, (1_k,\ \mp i 1_k)^*, \qquad (32)$$

откуда $\tau^\pm \geqslant 0$, ибо $\mp G P^\pm \geqslant 0$ [3], и $\mathrm{rg}\,\tau^\pm \leqslant r$, так как rg произведения (32) $\leqslant$ rg каждого множителя.

Покажем, что $\mathrm{rg}\,\tau^\pm \geqslant r$. Обозначим $K^\pm$ подпространства векторов вида $\Gamma\,\mathrm{col}(f^\pm, \pm i f^\pm)$, где $f^\pm \in \mathrm{Ker}\,\tau^\pm$. Ясно, что $K^\pm$ $\mp G$ — положительны. В силу (32) $P^\pm K^\pm = 0 \Rightarrow P^\pm E^n$ G — ортогональны $K^\pm \Rightarrow P^\pm E^n \dotplus K^\pm$ $\mp G$ — положительны $\Rightarrow \dim(P^\pm E^n \dotplus K^\pm) \leqslant k \Rightarrow$ $\Rightarrow r + \mathrm{def}\,\tau^\pm \leqslant k \Rightarrow r \leqslant \mathrm{rg}\,\tau^\pm$.

Обозначим $\Pi^\pm(\lambda)$ ортопроекторы на $\tau^\pm(\lambda) E^k$.

Лемма 3.1°. $\Pi^{\pm}(\lambda) \in C^{\infty}_{\text{loc}}(\Lambda)$ 2°. $\forall \lambda_0 \in T\ \exists \lim\limits_{\lambda \uparrow \lambda_0} \Pi^{\pm}(\lambda)$, $\lim\limits_{\lambda \downarrow \lambda_0} \Pi^{\pm}(\lambda)$.

Доказательство. Утверждение 1° вытекает из того, что

$$P^{\pm} \in C^{\infty}_{\text{loc}}(\Lambda) \text{ и } r(\lambda) = \text{const} \text{ при } \lambda \in (\alpha, \beta) \subseteq \Lambda.$$

Докажем 2°. Запишем $\Pi^{\pm}(\lambda)$ с помощью интерполяционного полинома:

$$\Pi^{\pm}(\lambda) = 1_k - L^{\pm}(\tau^{\pm}(\lambda), \lambda), \tag{33}$$

где

$$L^{\pm}(\mu, \lambda) = \frac{\delta!\, D^{\pm}(\mu, \lambda)}{\mu^{\delta} \left\{ \dfrac{\partial^{\delta}}{\partial \mu^{\delta}} D^{\pm}(\mu, \lambda) \Bigg|_{\mu=0} \right\}}, \tag{34}$$

$\delta = k - r(\lambda)$, $D^{\pm}(\mu, \lambda) = \det(\tau^{\pm}(\lambda) - \mu 1_k)$. Из (33), (34) и формул (21), (24), (25) из [5] вытекает, что в полуокрестностях точки $\lambda_0 \Pi^{\pm}(\lambda)$ представимы рядами Лорана по дробным степеням $\lambda - \lambda_0$ и в этих рядах число членов с отрицательными степенями конечно. Отсюда с учетом того, что $|\Pi^{\pm}| = 1$, следует требуемое существование пределов ■

Пусть $a^{\pm}(\lambda)$, $b^{\pm}(\lambda) \in M_k(\boldsymbol{C})$ и столбцы $\Gamma(a^{\pm}, b^{\pm})$ образуют базис в $Q^{\pm}E^n$ ($\operatorname{Im} \lambda \geqslant 0$, $\lambda \bar{\in} T$).

Лемма 4. $\det(a^{\pm}(\lambda) \mp ib^{\pm}(\lambda)) \neq 0$.

Доказательство вытекает из формулы

$$(a^{\pm} \mp ib^{\pm})^* (a^{\pm} \mp ib^{\pm}) = a^{\pm *} a^{\pm} + b^{\pm *} b^{\pm} + \\ + \{\mp [\operatorname{col}(a^{\pm}, b^{\pm})]^* J \operatorname{col}(a^{\pm}, b^{\pm})\},$$

так как $\{\cdots\} \geqslant 0$ в силу $\mp G$ — неотрицательности $Q^{\pm}E^n$ при $\operatorname{Im} \lambda \geqslant 0$, $\lambda \bar{\in} T$ [3], [6].

Обозначим $A^{\pm}(\lambda) = \operatorname{col}(a^{\pm}, b^{\pm})(a^{\pm} \mp ib^{\pm})^{-1}$ ($A^{\pm}$ не зависит от выбора $a^{\pm}$, $b^{\pm}$).

Лемма 5.1°. $\frac{1}{2} 1_k \leqslant A^{\pm *}(\lambda) A^{\pm}(\lambda) \leqslant 1_k$. 2°. $A^{\pm}(\lambda)$ *аналитичны при* $\operatorname{Im} \lambda > 0$. 3°. $A^{\pm}(\lambda) \in C^{\infty}_{\text{loc}}(\Lambda)$ *и* $\lambda \in T$ *являются точками устранимых разрывов* $A^{\pm}(\lambda)$.

Доказательство. 1°. Легко видеть, что

$$A^{\pm} = \frac{1}{2} \operatorname{col}(1_k + V^{\pm}, \pm i (1_k - V^{\pm})),$$

где $V^{\pm} = (a^{\pm} \pm ib^{\pm})(a^{\pm} \mp ib^{\pm})^{-1}$, откуда $A^{\pm *} A^{\pm} = \frac{1}{2}(1_k + V^{\pm *} V^{\pm})$ и 1° доказано, ибо $1_k - V^{\pm *} V^{\pm} = \mp 2 A^{\pm *} J A^{\pm} \geqslant 0$ в силу $\mp G$ — неотрицательности $Q^{\pm}E^n$ при $\operatorname{Im} \lambda \geqslant 0$, $\lambda \bar{\in} T$ [3], [6].

Утверждение 2° вытекает из [6, с. 274].

3°. Используя [6, с. 274] и функции $x_{jk}(\lambda)$ из [5, с. 116], можно показать, что в окрестности $\forall \lambda_0 \in \Lambda\ (\in T)\ A^{\pm}(\lambda)$ разлага-

ются в ряды Лорана по целым (дробным) степеням $\lambda-\lambda_0$ и в этих рядах число членов с отрицательными степенями конечно. Отсюда с учетом 1° следует 3°.

Обозначим $U^{\pm}(\lambda)=\Gamma A^{\pm}(\lambda)\Pi^{\pm}(\lambda)$ $(\lambda\in\Lambda)$.

Теорема 4.1°. $P^{\pm}(\lambda)U^{\pm}(\lambda)=U^{\pm}(\lambda)$, *т. е. столбцы* $U^{+}(\lambda)$ $(U^{-}(\lambda))$ *линейно выражаются через собственные векторы м. м., отвечающие м.* I (II) *рода.* 2°. $\frac{1}{2}\mu\Pi^{\pm}(\lambda)\leqslant U^{\pm *}(\lambda)U^{\pm}(\lambda)\leqslant\nu\Pi^{\pm}(\lambda)$, *где* μ, ν — *наименьшее и наибольшее собственные числа* $\Gamma^*\Gamma$. 3°. $U^{\pm}(\lambda)\in C^{\infty}_{\text{loc}}(\Lambda)$. 4°. $\forall\lambda_0\in T\exists\lim\limits_{\lambda\uparrow\lambda_0}U^{\pm}(\lambda)$, $\lim\limits_{\lambda\downarrow\lambda_0}U^{\pm}(\lambda)$.

Доказательство 1°. Допустим сначала, что $w(t)$ — вес положительного типа [5]. Тогда [1] не имеют конечных предельных точек множества $T^{\pm}=\{\lambda\in\Lambda:\det Q_2^{\pm}=0\}$. Используя леммы 2, 3 из [1], можно показать, что при $\lambda\in\Lambda\diagdown T^{\pm}$

$$\mp 2\pi i\tau^{\pm}=(1_k\mp iQ_4^{\pm}Q_2^{\pm -1})P_2^{\pm}(1_k\mp iQ_4^{\pm}Q_2^{\pm -1})^*. \tag{35}$$

Полагая $a^{\pm}=Q_2^{\pm}$, $b^{\pm}=Q_4^{\mp}$, имеем в силу леммы 4 и (35) при $\lambda\in\Lambda\diagdown T^{\pm}$: $U^{\pm}E^k=\Gamma\operatorname{col}(Q_2^{\pm},\ Q_4^{\pm})(Q_2^{\pm}\mp iQ_4^{\pm})^{-1}(1_k\mp iQ_4^{\pm}Q_2^{\pm -1})\times\times P_2^{\pm}E^k=\Gamma\operatorname{col}(Q_2^{\pm},\quad Q_4^{\pm})Q_2^{\pm -1}P_2^{\pm}E^k=\Gamma\operatorname{col}(P_2^{\pm},\quad P_4^{\pm})E^k$, если учесть $(26)^{\pm}$ из [1]. Отсюда $P^{\pm}U^{\pm}=U^{\pm}$ при $\lambda\in\Lambda\diagdown T^{\pm}$, а так как $P^{\pm}$, $U^{\pm}\in C_{\text{loc}}(\Lambda)$ в силу леммы 3, 5, то и при $\lambda\in\Lambda$.

Рассмотрим общий случай. Возьмем $\forall\lambda_0$ из Λ, отвечающего системе (1). Тогда $\lambda=0$ принадлежит Λ, отвечающему системе $l[y]-\lambda_0 w(t)y=\lambda y$ с весом 1_m положительного типа. По доказанному для этой системы справедливо 1° при $\lambda=0$, а значит для (1) — при $\lambda=\lambda_0$.

Утверждения 2°—4° — следствия леммы 3, 5.

Отметим, что если в (1) $w(t)$ — вес положительного типа, то, положив $a^{\pm}=Q_2^{\pm}$, $b^{\pm}=Q_4^{\pm}$, получим в силу 1° теоремы 4, что $U^{\pm}(\lambda)=\Gamma\operatorname{col}(P_2^{\pm},\ P_4^{\pm})(Q_2^{\pm}\mp Q_4^{\pm})^{-1}\Pi^{\pm}$, **(36)** и значит, используя (24), (25) из [5], (33), (34) и аналогичные формулы для $Q^{\pm}$, можно явно выразить $U^{+}(\lambda)$ $(U^{-}(\lambda))$ через м. м., м. I (II) рода и через м., модули которых <1.

Отметим также, что если в (36) отбросить $\Pi^{\pm}$, то полученные выражения по-прежнему $\in C^{\infty}_{\text{loc}}(\Lambda)$, однако, как показывает пример уравнения $y^{(4)}=\lambda y$, уже не всегда $\in L^{\infty}(R^1)$.

Обозначим $u^{\pm}_{\lambda}(t)$ $m\times k$ — матричные решения (1), удовлетворяющие начальным условиям: $\tilde{u}^{\pm}_{\lambda}(0)=U^{\pm}(\lambda)$.

4. В этом n° $I=R^1$. В силу замечания 3 из [2] $\tau^{\pm}\in L^1_{\text{loc}}(J)$.

Теорема 5. $\forall f\in D(\boldsymbol{L}_0)$ *справедливы формулы обращения*

$$f(t)=\int\{u^{+}_{\lambda}(t)\tau^{+}(\lambda)\eta^{+}_{\lambda}+u^{-}_{\lambda}(t)\tau^{-}(\lambda)\eta^{-}_{\lambda}\}\,d\lambda, \tag{37}$$

$$\eta^{\pm}_{\lambda}=\int u^{\pm *}_{\lambda}(t)w(t)f(t)\,dt \tag{38}$$

и равенство Парсеваля

$$\int f^* w f\, dt = \int (\eta_\lambda^{+*}\tau^+\eta_\lambda^+ + \eta_\lambda^{-*}\tau^-\eta_\lambda^-)\, d\lambda, \tag{39}$$

интеграл (37) сходится в H, а интегралы $(38)^\pm$ — в $L^2(R^1, \tau^\pm d\lambda)$.

Доказательство. В силу теоремы (5) и формулы (11) из [1] при финитных $f \in H$

$$(E_{\mu_2} - E_{\mu_1}) f \overset{H}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{\mu_1}^{\mu_2} d\lambda \int Y_\lambda(t)\, SS^{-1}(P^- - P^+) \times$$
$$\times G^{-1}S^{-1*}S^*Y_\lambda^*(s)\, w(s)\, f(s)\, ds, \tag{40}$$

где $S = \Gamma(A^+(\lambda), A^-(\lambda))$.

Непосредственная проверка показывает, что

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1_k & -i1_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Gamma^{-1}Q^+ + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_k & i1_k \end{pmatrix}\Gamma^{-1}Q^-. \tag{41}$$

Подставляя (41) в (40) и используя самосопряженность $P^\pm G^{-1}$ и лемму 2 из [1], получаем, что при финитных $f \in H$

$$(E_{\mu_2} - E_{\mu_1}) f \overset{H}{=} \int_{\mu_1}^{\mu_2} \{u_\lambda^+(t)\,\tau^+(\lambda)\,\eta_\lambda^+ + u_\lambda^-(t)\,\tau^-(\lambda)\,\eta_\lambda^-\}\, d\lambda,$$

откуда стандартно выводятся (37)—(39).

Список литературы: 1. *Храбустовский В. И.* Спектральный анализ периодических систем с вырождающимся весом на оси и полуоси.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1985, вып. 44, с. 122—133. 2. *Храбустовский В. И.* Разложения по собственным функциям периодических систем с весом.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1984, № 5, с. 26—28. 3. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения.— М.: Наука, 1972.— 718 с. 4. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи.— М.: Мир, 1968.— 749 с. 5. *Храбустовский В. И.* Спектральная матрица периодической симметрической системы с вырождающимся весом на оси.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1981, вып. 35, с. 111—119. 6. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М.: Наука, 1970.— 534 с.

Поступила в редколлегию 08.10.84.

УДК 517.5

П. М. ЮДИЦКИЙ

ВНЕШНЕ-ВНУТРЕННЯЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ j-РАСТЯГИВАЮЩИХ ОБРАТИМЫХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

Данная статья является продолжением работы [2]. Пусть $B(\zeta)$ j-растягивающая обратимая аналитическая матрица функция. Определим $\Gamma(t) = \lim_{\zeta\to t}\{j - B^{-1*}(\zeta)\, jB^{-1}(\zeta)\}$, $\Lambda = \Gamma^{1/2}(I + \Gamma)^{-1/2}$, $|t| = 1$.

Свяжем с данным Λ интерполяционную задачу [2]. Любая функция вида

$$\begin{bmatrix} w(\zeta) \\ 1 \end{bmatrix} = B(\zeta) \begin{bmatrix} \omega(\zeta) \\ 1 \end{bmatrix} (b_{21}(\zeta)\,\omega(\zeta) + b_{22}(\zeta))^{-1},$$

$\omega(\zeta)$ — аналитическая сжимающая функция, $B = \| b_{ij} \|$, является ее решением. Поэтому в силу теоремы 3 существует аналитическая функция $A(\zeta)$, определяемая как

$$jA(\zeta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \{ j + P_+ [\Lambda (D_\varepsilon^{-1} \Lambda)](\zeta) \} R$$

и обладаюшая свойствами

$$\frac{j - A^{-1*}(\zeta)\, jA^{-1}(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}\zeta} = \lim_{\varepsilon \to 0} \langle (D + \varepsilon)^{-1} (\zeta - T)^{-1} \Lambda,\ (\zeta - T)^{-1} \Lambda \rangle,$$

$$j - A^{-1*}(t)\, jA^{-1}(t) = \Lambda (I - \Lambda^2)^{-1} \Lambda = \Gamma(t), \quad |t| = 1. \qquad (1)$$

Поскольку граничные значения j-форм матриц $A(\zeta)$ и $B(\zeta)$ совпадают, то матрица $B_i(\zeta) = A^{-1}(\zeta)\, B(\zeta)$ имеет j-унитарные граничные значения. Далее покажем, что $B_i(\zeta)$ является j-растягивающей в единичном круге. С этой целью выводится неравенство отщепления — точный аналог неравенства, использованного в [1] при выделении множителей Бляшке—Потапова

$$\left[\begin{array}{c|c} \langle Dx, x \rangle & \langle (\zeta - T)^{-1} \Lambda, x \rangle \\ \hline * & \dfrac{j - B^{-1*}(\zeta)\, jB^{-1}(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}\zeta} \end{array} \right] \geqslant 0, \qquad \text{(НО)}$$

x — произвольный вектор из $L^2(C^2)$, $|\zeta| < 1$.

При доказательстве неравенства применяется следующая

Лемма. *Блочный (в ортогональном разложении) оператор*

$$G = \begin{bmatrix} f & 0 \\ g & h \end{bmatrix}$$

является сжатием тогда и только тогда, когда

$$\begin{bmatrix} I - hh^* & g \\ g^* & I - f^* f \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

Вывод Неравенства Отщепления (НО). Представим данную функцию $B^{-1}(\zeta)$ дробнолинейным преобразованием сжатия $B^{-1}(\zeta) = [pS(\zeta) + q]\,[qS(\zeta) + p]^{-1}$, где $p = 1/2\,(I + j)$, $q = 1/2\,(I - j)$. При этом j-форма матрицы $B^{-1}(\zeta)$ имеет вид

$$j - B^{-1*}(\zeta)\, jB^{-1}(\zeta) = [qS(\zeta) + p]^{-1*}\, [I - S^*(\zeta)\, S(\zeta)]\, [qS(\zeta) + p]^{-1}. \quad (2)$$

Будучи сужено на единичную окружность, тождество (2) дает равенство

$$I - S^* S - (qS^* + p)^* \Lambda (I - \Lambda^2)^{-1} \Lambda (qS + p) = 0,$$

следствием которого является неравенство

$$\begin{bmatrix} I-\Lambda^2 & \Lambda(qS+p) \\ \divideontimes & I-S^*S \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

Поэтому матрица-функция

$$w = \begin{vmatrix} S & 0 \\ \Lambda(qS+p) & \Lambda \end{vmatrix}$$

является сжимающей.

В соответствии с этим, оператор Pw^* в пространстве $H = H^2(\mathbf{C}^2) \oplus L^2(\mathbf{C}^2)$ также представляет собой сжатие,

$$P = \begin{bmatrix} P_+ & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Разложим пространство H в ортогональную сумму

$$\tilde{\xi} = \begin{vmatrix} \dfrac{\alpha}{1-t\bar{\zeta}} \\ 0 \end{vmatrix} \oplus b\xi, \ \xi \in H, \ \alpha \in \mathbf{C}^2, \ b(t) = \frac{\zeta - t}{1-t\bar{\zeta}}.$$

Соответствующее блочное разложение оператора Pw^* имеет вид

$$Pw^*\tilde{\xi} = \begin{bmatrix} P_+S^* \dfrac{\alpha}{1-t\bar{\zeta}} \\ 0 \end{bmatrix} + Pbw^*\xi = \begin{bmatrix} \dfrac{S^*(\zeta)\,\alpha}{1-t\bar{\zeta}} \\ 0 \end{bmatrix} + Pb(I-P)\,w^*\xi \oplus \oplus\, bPw^*\xi.$$

Как видим, разложение является треугольным, и в силу леммы выполнено неравенство

$$\left[\begin{array}{c|c} \langle (I - wPw^*)\,\xi,\ \xi\rangle & \left\langle \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha}{1-t\bar{\zeta}} \\ 0 \end{bmatrix},\ Pb(I-P)\,w^*\xi \right\rangle \\ \hline \divideontimes & \alpha^* \dfrac{I - S^*(\zeta)\,S(\zeta)}{1-\bar{\zeta}\zeta}\,\alpha \end{array}\right] \geqslant 0. \qquad (3)$$

Определим вектор

$$\xi = \begin{bmatrix} -P_+q\Lambda x \\ x \end{bmatrix}, \ x \in L^2(\mathbf{C})^2.$$

и вычислим получающиеся при этом блоки (3). Так как

$$Pw^*\xi = P\begin{bmatrix} -S^*P_+q\Lambda x + (p+S^*q)\,\Lambda x \\ \Lambda x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_+ & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S^*P_-q\Lambda x + p\Lambda x \\ \Lambda x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_+p\Lambda x \\ \Lambda x \end{bmatrix},$$

то

$$\langle \xi, \xi\rangle - \langle Pw^*\xi, Pw^*\xi\rangle = \langle P_+q\Lambda x, \Lambda x\rangle + \langle x, x\rangle - \langle P_+p\Lambda x, \Lambda x\rangle - \langle \Lambda x, \Lambda x\rangle = \langle (I - \Lambda^2 - \Lambda P_+ j\Lambda)\,x, x\rangle = \langle Dx, x\rangle.$$

Другой блок неравенства (3) приводится к виду

$$\left\langle \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{1-t\bar{\zeta}} \\ 0 \end{bmatrix}, Pb(I-P)\,w^*\xi \right\rangle = \left\langle \bar{b}\,\frac{\alpha}{1-t\bar{\zeta}}, P_-(p\Lambda x + S^*P_-q\Lambda x) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{\alpha}{\zeta - t}, p\Lambda x + S^*P_-q\Lambda x \right\rangle = \left\langle \Lambda\,\frac{p+qS(\zeta)}{\zeta - t}\,\alpha, x \right\rangle.$$

Подставляя эти выражения в (3), получим неравенство

$$\left[\begin{array}{c|c} \langle Dx, x\rangle & \langle(\zeta - T)^{-1}\Lambda, x\rangle\,(p+qS(\zeta))\,\alpha \\ \hline * & \alpha^*\,\frac{I - S^*(\zeta)\,S(\zeta)}{1-\bar{\zeta}\zeta}\,\alpha \end{array}\right] \geqslant 0.$$

Используя соотношение (2), можем переписать последнее в виде (НО).

Теперь легко показать, что $B_i(\zeta) = A^{-1}(\zeta)\,B(\zeta)$ является j-сжимающей матрицей функцией. В самом деле, из НО следует неравенство

$$\frac{j - B^{-1*}(\zeta)\,jB^{-1}(\zeta)}{1-\bar{\zeta}\zeta} - \langle (D+\varepsilon)^{-1}(\zeta - T)^{-1}\Lambda, (\zeta - T)^{-1}\Lambda\rangle \geqslant 0, \ \forall\varepsilon > 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, по свойству (1), получим

$$\frac{j - B^{-1*}(\zeta)\,jB^{-1}(\zeta)}{1-\bar{\zeta}\zeta} - \frac{j - A^{-1*}(\zeta)\,jA^{-1}(\zeta)}{1-\bar{\zeta}\zeta} \geqslant 0.$$

Откуда и имеем $B^*(\zeta)\,A^{-1*}(\zeta)\,jA^{-1}(\zeta)\,B(\zeta) - j \geqslant 0$.

Таким образом, установлено.

1. Резольвентная матрица задачи интерполяции [2] $A(\zeta)$ обладает тем свойством, что любая j-растягивающая аналитическая матрица-функция $B(\zeta)$, имеющая те же граничные значения j-формы допускает представление $B(\zeta) = A(\zeta)\,B_i(\zeta)$ (в.-в. ф.), где $B_i(\zeta)$ — j-внутренняя матрица функция в классе j-сжимающих. Последнее означает

$$B_i^*(\zeta)\,jB_i(\zeta) - j \geqslant 0, \ 1 - \bar{\zeta}\zeta > 0,$$

$$B_i^*(t)\,j\,B_i(t) - j = 0, \ |t| = 1.$$

2. Произвольная обратимая j-растягивающая аналитическая матрица функция $B(\zeta)$ допускает разложение (в.-в. ф.), где $A(\zeta)$ — резольвентная матрица соответствующей задачи [2].

Список литературы: 1. *Ефимов А. В., Потапов В. П.* J-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей.— Успехи мат. наук, 1973, 33, вып. 1 (169), с. 65—130. 2. *Юдицкий П. М.* О восстановлении j-сжимающей аналитической матрицы функции по граничным значениям ее j-формы и связанная с этим задача «интерполяции».— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1984, вып. 44, с. 21—24.

Поступила в редколлегию 05.12.84

УДК 517.946

И. Ю. ЧУДИНОВИЧ

ОСРЕДНЕНИЕ ГУСТОПЕРФОРИРОВАННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Хорошо известно, что расчет деформаций тонких упругих оболочек, содержащих различного рода микронеоднородности, является весьма сложной задачей. Когда же число микронеоднородностей велико, непосредственное применение стандартных численных методов становится невозможным. Оболочки такого сорта естественно заменять однородными телами со специально подобранными эффективными упругими характеристиками.

В заметке предлагается метод осреднения краевых задач для круговых цилиндрических оболочек, ослабленных большим числом мелких отверстий. В основе доказательств теорем осреднения лежат вариационные методы, развитые в [1].

Аналогичная задача об осреднении перфорированной пластины решена в работе [2]. В [3, 4] проведено осреднение краевых задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений в областях с пустотами. Поскольку система уравнений теории тонких оболочек является эллиптической [5], настоящую заметку следует рассматривать как продолжение [3, 4]. При этом будут использованы обозначения, введенные в этих работах [3, 4].

Итак, рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку длины a, радиуса R. Параметризуем точки ее срединной поверхности с помощью переменных $x = (x_1, x_2)$, где x_1 — длина дуги меридиана, x_2 — параллели. Малую толщину оболочки обозначим через 2σ. Пусть $U(x) = (u^{(1)}(x),\ u^{(2)}(x),\ u^{(3)}(x))$ — вектор смещения точек срединной поверхности, причем $u^{(i)}(x)$ $(i = 1,2)$ — тангенциальные, $u^{(3)}(x)$ — нормальное смещения.

Связь между деформациями оболочки и смещениями дается формулами

$$\begin{gathered}\varepsilon_1(U) = \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_1},\ \ \varepsilon_2(U) = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_2} - \frac{u^{(3)}}{R},\ \ \omega(U) = \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_2} + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_1},\\ \varkappa_1(U) = \frac{\partial^2 v^{(3)}}{\partial x_1^2},\ \ \varkappa_2(U) = \frac{\partial^2 u^{(3)}}{\partial x_2^2},\ \ \tau(U) = \frac{\partial^2 u^{(3)}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{R}\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_1}.\end{gathered} \tag{1}$$

Введем область изменения параметров $\Omega = \{(x_1, x_2): 0 < x_1 < a,\ 0 < x_2 < l\}$ и в ней билинейную форму $L_\Omega(U, V) = \int\limits_\Omega W(U, V)\,dx$,

$$\begin{aligned} W(U, V) = \frac{2E\sigma}{1-\nu^2}\{&\varepsilon_1(U)\varepsilon_1(V) + \varepsilon_2(U)\varepsilon_2(V) +\\ &+ \nu[\varepsilon_1(U)\varepsilon_2(V) + \varepsilon_2(V)\varepsilon_1(V)] + \frac{1-\nu}{2}\omega(U)\omega(V) +\\ &+ \frac{\sigma^2}{3}[\varkappa_1(U)\varkappa_1(V) + \varkappa_2(U)\varkappa_2(V) + \nu(\varkappa_1(U)\varkappa_2(V) +\\ &+ \varkappa_2(U)\varkappa_1(V)) + 2(1-\nu)\tau(U)\tau(V)]\}.\end{aligned} \tag{2}$$

В (2) E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона материала, из которого изготовлена оболочка. Нетрудно видеть [5], что $L_\Omega(U, U)$ представляет удвоенную потенциальную энергию деформации оболочки на смещении $U(x)$. Подставив в (2) компоненты деформации (1), получим

$$W(U, V) = \frac{2E\sigma}{1-\nu^2} \sum_{p,\, q=1}^{3} \sum_{\substack{|\alpha_p| < n_p \\ |\beta_q| < n_q}} a_{\alpha_p \beta_q} (D^{\alpha_p} u^{(p)})(x) \cdot (D^{\beta_q} v^{(q)})(x),$$

где α_p, β_q — двухкомпонентные мультииндексы; $n = (n_1, n_2, n_3) = (1, 1, 2)$ — фиксированный мультииндекс.

Далее, пусть $F(x) = (f^{(1)}(x),\ f^{(2)}(x),\ f^{(3)}(x))$ — фиксированная вектор-функция с компонентами $f^{(k)}(x) \in C(\bar{\Omega})$ $(k = 1, 2, 3)$. Назовем задачей равновесия для оболочки, защемленной по краю, под действием заданной нагрузки $F(x)$ задачу об отыскании решения $U \in \overset{\circ}{H}{}^n(\Omega)$ вариационного уравнения $L_\Omega(U, V) = (F, V)_{0,\Omega}\ \forall V \in \overset{\circ}{H}{}^n(\Omega)$. Напомним, что используются обозначения, введенные в [3, 4]. Рассмотрим теперь области Ω_s, полученные из Ω удалением большого числа s непересекающихся замкнутых множеств F_{is} $(i = 1, \ldots, s)$, итак, $\Omega_s = \Omega \setminus F_s$, $F_s = \bigcup\limits_{(i)} F_{is}$. Считаем все F_{is} кругами радиуса $r_s = s^{-\frac{1}{2}}$. В результате получаем перфорированную оболочку с s отверстиями. Задача равновесия для перфорированной оболочки при нагрузке $F(x)$ принимает вид

$$L_s(U_s, V_s) = (F, V_s)_{0,s}\ \forall V_s \in H_s^n \tag{3}$$

см. [3]. Примем, что расположение отверстий оболочки регулярно [3]. Нашей задачей является отыскание асимптотики решений $U_s(x)$ уравнений (3) при $s \to \infty$.

Оказывается, при некоторых предположениях (см. [3]) $U_s(x)$ сходятся при $s \to \infty$ к решению осредненного уравнения

$$\tilde{L}_\Omega(U, V) = \sum_{k=1}^{3} (f^{(k)}, v^{(k)})_{L_b^2(\Omega)} \quad \forall V \in \overset{\circ}{H}{}^n(\Omega)$$

в следующем смысле: $\lim\limits_{s\to\infty} \| U_s - U \|_{\overset{\circ}{H}{}_s^{(0,0,1)}} = 0$. Способ построения коэффициентов осредненной формы $\tilde{L}_\Omega$ и весовой функции $b(x)$ изложен в [3] и потому здесь не приводится.

Наибольший интерес представляет рассмотрение практически важного случая периодического распределения отверстий, геометрия которого описана в [4]. В этом случае нахождение коэффициентов осредненной формы удается свести к решению набора ячеечных задач. Построение этих ячеечных задач в теории оболочек весьма нетривиально из-за наличия в исходном функционале энер-

гии слагаемых, содержащих произведения компонент смещений и их производных. Поэтому приведенные ниже результаты являются основными в настоящей заметке.

Осредненная форма имеет вид $\tilde{L}_\Omega(U, V) = \int\limits_\Omega \tilde{W}(U, V)\,dx$,

$$\tilde{W}(U, V) = \sum_{p,\, q=1}^{3} \sum_{\substack{|\alpha_p| < n_p \\ |\beta| \leqslant n}} \tilde{a}_{\alpha_p \beta_q} (D^{\alpha_p} u^{(p)})(x) \cdot (D^{\beta_q} v^{(q)})(x). \tag{4}$$

Пусть P (как и в [4]) — стандартная ячейка, представляющая собой прямоугольник П с центром в начале координат со сторонами c_1, c_2, из которого выброшен единичный круг. Площадь П, равную $c_1 c_2$, обозначим через S. Для всякого двухкомпонентного мультииндекса α_p обозначим через $P_{p\alpha_p}(x)$ трехкомпонентную вектор-функцию с единственной отличной от нуля p-й компонентой, равной $(\alpha_p!)^{-1} x^{\alpha_p}$.

Введем, наконец, вспомогательный функционал

$$\Delta_P(Y, Z; \gamma_1, \gamma_2) = \frac{2E\sigma}{1-\nu^2} \int\limits_P \Big\{ \varepsilon_1(Y)\, \varepsilon_1(Z) + \left(y_{x_2}^{(2)} - \frac{\gamma_1}{R} \right) \times$$
$$\times \left(z_{x_2}^{(2)} - \frac{\gamma_2}{R} \right) + \nu \left[y_{x_1}^{(1)} \left(z_{x_2}^{(2)} - \frac{\gamma_2}{R} \right) + z_{x_1}^{(1)} \left(y_{x_2}^{(2)} - \frac{\gamma_1}{R} \right) + \right.$$
$$+ \frac{1-\nu}{2}\, \omega(Y)\, \omega(Z) + \frac{\sigma^2}{3} [\varkappa_1(Y)\, \varkappa_1(Z) + \varkappa_2(Y)\, \varkappa_2(Z) +$$
$$+ \nu(\varkappa_1(Y)\, \varkappa_2(Z) + \varkappa_1(Z)\, \varkappa_2(Y)) + 2(1-\nu)\, \tau(Y)\, \tau(Z)] \Big\}\, dx,$$
$$(\gamma_1, \gamma_2 \in R).$$

Коэффициенты осредненной формы (4) вычисляются по формулам

$$\tilde{a}_{\alpha_p \beta_q} = S^{-1} \Delta_P (Z_{\alpha_p}, Z_{\beta_q};\ \delta_{p3} \delta_{|\alpha_p| 0},\ \delta_{q3} \delta_{|\beta_q| 0})$$

($p, q = 1, 2, 3$; $|\alpha_p| \leqslant n_p$, $|\beta_q| \leqslant n_q$), где δ — символ Кронеккера, Z_{α_p} ($p = 1, 2, 3$; $|\alpha_p| \leqslant n_p$) — решения следующих вариационных задач в ячейке P.

1. При $p = 1, 2$; $|\alpha_p| = 0$, $Z_{\alpha_p} = 0$.

2. При $p = 3$; $|\alpha_p| = 0$, Z_{α_p} минимизирует $\Delta_P(Y, Y; 1,1)$ в классе периодических на противоположных сторонах П вектор-функций $Y(x) \in H^n(P)$.

3. При $p = 1, 2, 3$; $0 < |\alpha_p| \leqslant n_p$ Z_{α_p} минимизирует $\Delta_P(Y, Y; 0, 0)$ в классе вектор-функций $Y(x) \in H^n(P)$ таких, что $Y(x) - P_{p\alpha_p}(x)$ периодичны на противоположных сторонах П.

Список литературы: 1. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей.— К.: Наук. думка, 1974.—285 с. 2. *Берлянд Л. В.* Асимптотическое описание тонкой пластины с большим числом мелких отверстий.—Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 10, с. 5—8. 3. *Чудинович И. Ю.* Осреднение эллиптических систем дифференциальных уравнений

в областях с пустотами. 1. Общая теорема об осреднении.— Теория функций функцион. анализ и их прил., 1984, вып. 42, с. 21—26. 4. *Чудинович И. Ю.* Осреднение эллиптических систем дифференциальных уравнений в областях с пустотами. 2. Случай периодического распределения пустот.—Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1985, вып. 44, с. 133—136. 5. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек.—М.: Наука, 1979.—383 с.

Поступила в редколлегию 05.12.84.

УДК 517.535.4

Б. Г. ФРЕЙДИН

О ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЯХ, ДОПУСКАЮЩИХ СПЕЦИАЛЬНУЮ ОЦЕНКУ СНИЗУ

Целая функция $f: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ называется функцией класса Крейна, если

$$1/f(z) = C + \sum_{k=1}^{\infty} A_k/(z - h_k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} |A_k| < \infty, \tag{1}$$

где C, A_k, $h_k \in \boldsymbol{R}$. Эти функции были введены М. Г. Крейном в [1] и использовались в теории операторов, проблеме моментов, теории дифференциальных уравнений [2, 5]. М. Г. Крейн доказал [1], что такие функции имеют рост не выше экспоненциального типа и выполняются условия:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\ln|f(t)||\,(1+t^2)^{-1}\,dt < \infty, \tag{2}$$

$$\exists \lim_{t\to\infty} t^{-1} n_+(t) = \lim_{t\to\infty} t^{-1} n_-(t), \tag{3}$$

где $n_+(t)$ и $n_-(t)$ — считающие функции нулей соответственно на $[0, t]$ и $[-t, 0]$. Для функций класса Крейна, имеющих нормальный тип при порядке $\rho = 1$, условие (3) означает определенную симметрию в расположении корней. Возникает вопрос, имеется ли аналог (3) для функций класса Крейна порядка $\rho < 1$. То, что при $0 \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{2}$ корни могут располагаться лишь на одном луче, показывает пример: $f(z) = \cos\sqrt{z}$. В настоящей заметке показано, что при $1/2 < \rho < 1$ для функций класса Крейна имеет место некоторое более слабое условие, чем (3): обе величины

$$\sigma_+ = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-\rho(t)} n_+(t), \quad \sigma_- = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-\rho(t)} n_-(t),$$

где $\rho(t)$ — уточненный порядок $f(z)$, положительны.

Из (1) следует, что $f(z)$ допускает оценку снизу $|f(z)| > C|y|$. В 1961 г. В. И. Мацаевым было получено следующее обобщение теоремы Крейна.

Теорема [3.] *Если целая функция $f(z)$ удовлетворяет во всей плоскости неравенству*

$$\ln|f(z)| > -C(r/|\sin\varphi|)^{\delta}, \tag{4}$$

где $0<\delta<1$, то функция $f(z)$ не выше экспоненциального типа и выполняются условия (2) и (3).

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ, $1/2<\rho<1$, и уточненного порядка $\rho(r)$. Предположим, что $f(z)$ во всей плоскости допускает оценку снизу*

$$\ln|f(z)| > -\delta(r)(r/|\sin\varphi|)^{\rho(r)}, \tag{5}$$

где $\delta(r)\downarrow 0$. Тогда величины σ_+ и σ_- положительны.

Доказательство. Будем пользоваться характеристиками Неванлинны для угла [4, гл. 1, § 5], а также следующим результатом [4, гл. 6, теорема 2.3]. Если функция $f(z)$ мероморфна в углу $\{z:\alpha\leqslant\arg z\leqslant\beta\}$, то для произвольных $\varepsilon>0$, $d>1$ вне некоторого множества $E_\varepsilon\subset(0,\infty)$, такого, что $\mu(E_\varepsilon)=\varlimsup_{r\to\infty} r^{-1}m(E_\varepsilon\cap[0,r])$,

$$\int_{\alpha}^{\beta}\ln^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi\leqslant Kr^{\pi/(\beta-\alpha)}(S_{\alpha,\beta}(dr,f)+1), \tag{6}$$

где K — постоянная.

Обозначим через D угол $\{z:|\arg z-\pi|<\theta/2\}$, $\theta>\pi/\rho$, $\pi-\theta/2=\alpha$. Условимся характеристики S, A, B, C, c, относящиеся к этому углу, обозначать соответственно S_D, A_D, B_D, C_D, c_D.

Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет условию теоремы 1. По первой теореме Неванлинны для угла [4, гл. 1] имеем $S_D(r,f)=S_D(r,1/f)+O(1)$, поэтому получаем

$$m_D(r,f)\equiv\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha}\ln^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi\leqslant Kr^{\pi/\theta}(S_D(dr,1/f)+O(1))=$$
$$=Kr^{\pi/\theta}(C_D(dr,1/f)+A_D(dr,1/f)+B_D(dr,1/f)+O(1)), \tag{7}$$

$r\overline{\in}E_\varepsilon$, $\mu(E_\varepsilon)<\varepsilon$. Оценим характеристики C_D, A_D и B_D в (7). Если предположим, что $\sigma_-=0$, то, учитывая свойства уточненного порядка [4, гл. 2], имеем

$$C_D(dr,1/f)=(2\pi/\theta)\int_1^{dr}c_D(t)\,(1/t^{\pi/\theta}+t^{\pi/\theta}(dr)^{-2\pi/\theta})\,t^{-1}\,dt\leqslant$$
$$\leqslant(4\pi/\theta)\int_1^{dr}n_-(t)\,t^{-(1+\pi/\theta)}\,dt=o(r^{\rho(r)-\pi/\theta});$$
$$A_D(dr,1/f)=\int_1^{dr}(t^{-\pi/\theta}-t^{\pi/\theta}(dr)^{-2\pi/\theta})\,[\ln^+|1/f(te^{i\alpha})|+$$
$$+\ln^+|1/f(te^{i(2\pi-\alpha)})|]\,t^{-1}\,dt\leqslant\int_1^{dr}t^{-(1+\pi/\theta)}\,[2\delta(t)\times$$
$$\times(t/|\sin\varphi|)^{\rho(t)}]\,dt=o(r^{\rho(r)-\pi/\theta});$$

$$B_D(dr,\ 1/f)=2\,(\theta\,(dr)^{\pi/\theta})^{-1}\int\limits_{\alpha}^{2\pi-\alpha}\ln^+|1/f\,(dre^{i\varphi})|\,dt=o\,(r^{\rho(r)-\pi/\theta}).$$

Объединяя оценки и используя (7), получаем $m_D(r,\ f)=o\,(r^{\rho(r)})$.

Оценим функцию $f(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} z<0$. Заметим, что для любой точки z, $\operatorname{Re} z<0$, круг с центром в точке z и радиусом $R=|z|\cos\alpha$ целиком лежит в углу D. Так как функция $\ln|f(z)|$ является субгармонической, то при $\operatorname{Re} z_0<0$ имеем

$$\ln|f(z_0)|\leqslant\pi R^{-2}\iint\limits_{|z-z_0|<R}\ln|f(z)|\,d\sigma\leqslant(\cos\alpha\cdot r_0\sqrt{\pi})^{-2}\times$$

$$\times\int\limits_{r_0(1-\cos\alpha)}^{r_0(1+\cos\alpha)}\int\limits_{\alpha}^{2\pi-\alpha}r\ln^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta\,dr\leqslant Cr_0^{-1}\int\limits_{r_0(1-\cos\alpha)}^{r_0(1+\cos\alpha)}m_D(r,\ f)\,dr=$$

$$=o\,(r_0^{\rho(r_0)})+C_1r_0^{-1}\int\limits_{E\varepsilon\bigcap[0,\ r_0(1+\cos\alpha)]}m_D(r,\ f)\,dr\leqslant o\,(r_0^{\rho(r_0)})+\varepsilon C_1r_0^{\rho(r_0)}.$$

В силу произвольности ε, отсюда следует, что индикатор $h(\varphi,\ f)$ функции $f(z)$ равен нулю при $\pi/2\leqslant\varphi\leqslant3\pi/2$. Так как $\rho<1$, то в силу ρ-тригонометрической выпуклости индикатора $h(\varphi,\ f)\equiv0$, $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$, что противоречит определению уточненного порядка.

Следствие 1. *Пусть $f(z)$ — функция класса Крейна порядка $\rho>1/2$. Тогда величины σ_+ и σ_- положительны.*

Незначительно изменяя доказательство теоремы 1, можно доказать следующие теоремы.

Теорема 2. *Пусть $u(z)$ — субгармоническая функция порядка $1/2<\rho<1$ и удовлетворяет условию $u(z)>-\delta(r)\,(r/|\sin\varphi|)^{\rho(r)}$, где $\rho(r)$ — уточненный порядок $u(r)$, а $\delta(r)\downarrow0$. Тогда для любого угла D раствора больше π/ρ имеем*

$$\varlimsup_{t\to\infty}\mu_D(t)\,t^{-\rho(t)}>0,\ \text{где}\ \mu_D(t)=\mu\,(\{z:|z|<t\}\cap D),$$

а μ — массы Рисса функции $u(z)$.

Теорема 3. *Пусть $f(z)$ — мероморфная функция порядка $1/2<\rho<1$, $\delta(\infty,\ f)>0$ и допускающая представление (1). Тогда σ_+ и σ_- положительны.*

Можно показать, что для функций класса Крейна порядка $1/2<\rho<1$ выполняются неравенства $(2\rho-1)/K<\sigma_+/\sigma_-<K/(2\rho-1)$, где K — абсолютная постоянная.

Список литературы: 1. *Крейн М. Г.* К теории целых функций экспоненциального типа. — Изв. АН СССР. Сер мат., 1947, **11**, с. 309—326. 2. *Крейн М. Г.* О неопределенном случае краевой задачи Штурма — Лиувилля в интервале $(0,\ \infty)$. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1952, **16**, с. 293—324. 3. *Мацаев В. И.* О вольтеровых операторах, получаемых возмущением самосопряженных. — Докл. АН СССР, 1961, **139**, № 4, с. 810—814. 4. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. — М.: Наука, 1970. — 591 с. 5. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. — М.: Физматгиз, 1961. — 146 с.

Поступила в редколлегию 05.12.84.

УДК 513.88 : 519.21

А. А. ЯНЦЕВИЧ

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. II. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Рассмотрим нестационарную линейно представимую последовательность [1] $x(n) = T^n x_0$ **(1)**, где $T \in [H, H]$ — обратимый оператор (в дальнейшем будем считать для простоты T квазиунитарным оператором первого ранга).

Включим T в операторный ϑ-узел $\vartheta = [T, H, \Psi, E, J, K]$, $I - T^*T = \Psi\Psi^+$, $I - K^+K = \Psi^+\Psi$, $\Psi^+ = J\Psi^*$, $\Psi \in [E, H]$, $J \in [E, E]$, $J = J^*$, $J^2 = I$, $K \in [E, E]$.

Рассмотрим пару отображений $H \dot{+} E \to H$, $H \dot{+} E \to E$, которая сопоставляется ϑ-узлу:

$$\begin{cases} x(n+1) = Tx(n) + \Psi u(n), \; x(n) \in H, \\ Kv(n) = u(n) - J\Psi^* x(n+1), \; u(n), \; v(n) \in E, \\ \qquad\qquad x(n)|_{n=0} = x_0. \end{cases} \tag{2}$$

В дальнейшем отображение (2) будем называть случайной открытой системой (СОС).

Так как T по предположению квазиунитарен и ранг его равен 1, то удобно перейти от операторного ϑ-узла к операторному θ-комплексу:

$$\theta = (T, H, g = \sqrt{\omega} a, J = 1, k),$$
$$I - T^*T = (\cdot, g) g, \; a \in E \subset H, \; \dim E = 1,$$
$$|a| = 1, \; k = \sqrt{1 - \omega^2}\, e^{i\alpha}, \; \Psi a = g, \; \omega > 0,$$

где α — произвольное вещественное число.

Уравнения СОС в этом случае упрощаются:

$$x(n+1) = Tx(n) + u(n) g; \quad kv(n) = u(n) - (x(n+1), g), \tag{3}$$

где $u(n) = (u(n), a)_E$, $v(n) = (v(n), a)_E$

Лемма. *Корреляционная разность случайной последовательности имеет вид $w(n, m) = R_v(n, m) - R_u(n, m)$, где R_u и R_v — соответствующие корреляционные функции на входе и выходе СОС.*

Доказательство получается из рассмотрения наряду с СОС (3) двойственной открытой системы, ассоциированной с θ^*-узлом, содержащим T^* [2].

Теорема 1. *Пусть $x(n) = T^n x_0$, где T — полное сжатие. Тогда существуют две совокупности случайных последовательностей $\{x_l(n)\}$, $\{u_l(n)\}$, удовлетворяющих следующим условиям:*

1) $x_l(n) = \Psi_l(n)\xi_l$, $\Psi_l(n)$ — детерминированные функции, $M\xi_l\bar{\xi}_m = \delta_{lm}$;

2) имеет место представление

$$x(n)=\sum_{k=1}^{\infty}\Psi_k(n)\,\xi_k \tag{4}$$

(сходимость понимается в среднеквадратичном);

3) $u_l(n)=\tilde{u}_l(n)\,a,\ \tilde{u}_l(n)=Mu_l(n)\,\bar{a},\ M\,|\,a\,|^2=1;$

4) детерминированные последовательности $\Psi_k(n)$ *и* $\tilde{u}_l(n)$ *определяются рекуррентными соотношениями*

$$\begin{cases}\Psi_l(m+1)=\lambda_l\Psi_l(m)+\tilde{u}_l(m)\,M\,(a\bar{\xi}_l);\\ k\tilde{u}_{l+1}(m)=\tilde{u}_l(m)-\sqrt{\omega}\,\Psi_l(m+1)\,M\xi_l\bar{a},\\ \qquad u_1(m)=0.\end{cases} \tag{5}$$

Доказательство теоремы 1 получается при помощи разложения и последующего сцепления открытой системы (3) [2].

Отметим, что в отличие от ортогонального разложения Лоэва—Карунена (5) представляет собой полный аналог спектрального разложения стационарной случайной последовательности: $\Psi_k(n)$ является внутренним состоянием дискретного осциллятора с комплексными частотами.

Пусть $z(n)=T^n z_0$— линейная представимая последовательность, где T — вполне неунитарный оператор с непрерывным спектром первого ранга. Тогда оператор T унитарно эквивалентен своей треугольной модели $\dot{T}\in[L^2_{[0,\,l]},\ L^2_{[0,\,l]}]$ [3]:

$$\dot{T}f=e^{i\alpha(x)}f(x)-2e^{i\alpha(x)+x}\int_x^l e^{-\xi}f(\xi)\,d\xi. \tag{6}$$

Так как $(J-T^*T)\,f=2\int_0^l e^{-\xi}f(\xi)\,d\xi\,e^{-x}$,

то каналовый элемент $g(x)=\sqrt{2}\,e^{-x}$, $\dim E=1$, $\Psi a=g$, $a\in E$, $|\,a\,|=1$, $k=e^{-l+i\gamma}$, γ — вещественное число. Следовательно, θ-комплекс имеет вид

$$\dot{\theta}=[\dot{T},\ L^2_{[0,\,l]},\ g=\sqrt{2}\,e^{-x},1,\ e^{-l+i\gamma}]. \tag{7}$$

В силу унитарной эквивалентности T и $\dot{T}$ рассмотрение достаточно проводить для треугольной модели. Уравнения открытой системы, ассоциированной с (7),

$$\begin{gathered}f_{n+1}(x)=e^{i\alpha(x)}f_n(x)-2e^{i\alpha(x)+x}\int_x^l e^{-\xi}f(\xi)\,d\xi+u_n\sqrt{2}\,e^{-x};\\ kv_n=u_n-2\int_0^l f_{n+1}(\xi)\,e^{-\xi}\,d\xi,\ f_n(x)\,|_{n=0}=f_0(x).\end{gathered} \tag{8}$$

Введем функции

$$g_n(x)=\int_x^l e^{-\xi}f_n(\xi)\,d\xi, \tag{9}$$

тогда из (8), (9) имеем

$$\frac{dg_{n+1}(x)}{d_x} = e^{i\alpha(x)}\frac{dg_n(x)}{dx} - 2e^{i\alpha(x)}g_n(x) - \sqrt{2}\,e^{-2x}{}_{\prime\prime}\cdot$$
$$f_n(x) = -e^{-x}\frac{dg_n(x)}{dx}; \tag{10}$$

$$g_n(l) = 0,\ g_n(x)\,|_{n=0} = \int_x^l e^{-\xi} f_0(\xi)\,d\xi;$$
$$kv_n = u_n - \sqrt{2}\,g_{n+1}(l). \tag{11}$$

Используя представления:

$$g = \int_0^l \sqrt{2}\,e^{-x}\,d\zeta_{[0,\,x]};\quad f_n = \int_0^l f_n(x)\,d\zeta_{[0,\,x]},$$
$$f_n(x) = \frac{d}{dx}(f_n,\ \zeta_{[0,\,x]}),$$

где

$$\zeta_\Delta(x) = \begin{cases} 1, & x\in\Delta, \\ 0, & x\bar{\in}\Delta, \end{cases}\quad \Delta = [x',\ x''],$$

$(\zeta_{\Delta_1},\ \zeta_{\Delta_2}) = d(\Delta_1\cap\Delta_2)$, d — длина соответствующего интервала, приходим к теореме

Теорема 2. *Для случайной последовательности* $\dot{z}(n) = \dot{T}^n z_0$, *где* $\dot{T}$ *— вполне неунитарный оператор с непрерывным спектром первого ранга, существует случайная спектральная мера* $\zeta_{[0,\,x]}$ $M\zeta_{\Delta_1}\bar{\zeta}_{\Delta_2} = d(\Delta_1\cap\Delta_2)$ *такая, что* $\dot{z}(n)$ *представляется в виде*

$$\dot{z}(n) = \int_0^l f_n(x)\,d\zeta_{[0,\,x]}, \tag{12}$$

где $f_n(x) = -e^{-x}\dfrac{dg_n(x)}{dx}$, *а* $g_n(x)$ *определяются из дифференциально-разностного уравнения* (10) *с условиями* (11).

Замечание. Так как в случае $\dim(I - T^*T)\,H = 1$ корреляционная разность имеет вид $w(n,\ m) = \Phi(n)\,\Phi(m)$, где $\Phi(n) = (\dot{T}^n_{z_0},\ g)$, то, переходя к треугольной модели, имеем $\Phi(n) = \sqrt{2}\,g_n(0)$, следовательно, корреляционную разность можно найти по формуле $w(n,\ m) = 2g_n(0)\,\overline{g_m(0)}$, где $g_n(0)$ строится по треугольной модели.

Список литературы: 1. *Янцевич А. А.* Применение теории операторных узлов к исследованию нестационарных случайных процессов и последовательностей.— В кн.: Материалы Всесоюз. симпозиума по статистике случайных процессов. К., 1973, с. 229—232. 2. *Янцевич А. А.* Операторные j-узлы и ассоциированные открытые системы.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1972, вып. 17, с. 215—220. 3. *Кужель А. В.* Треугольная модель K′-операторов в пространстве с индефинитной метрикой.— Докл. АН УССР, 1962, 5, с. 572—574.

Поступила в редколлегию 23.11.83.

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Выпуск 46

Редактор *Л. Ф. Кизилова*
Художественный редактор *Т. П. Короленко*
Технический редактор *Г. П. Александрова*
Корректор *Е. В. Сергина*

Информ. бланк № 10332

Сдано в набор 06.08.85. Подп в печ. 12.11.85. БЦ 09416. Формат 60×90/16. Бумага типогр. № 1 Лит. гарн. Выс. печать. 9 печ. л. 9,25 кр.-отт. 10 уч.-изд. л. Тираж 700 экз. Изд. № 1408. Зак. 5-1338. Цена 1 р. 40 к.

Издательство при Харьковском государственном университете издательского объединения «Вища школа», 310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16

Отпечатано с матриц книжной фабрики им. М. В. Фрунзе в Харьковской городской типографии № 16, 310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16 Зак. 2048.

1 р. 40 к.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖДУВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ СБОРНИК

Основан в 1965г.

Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1986, вып. 46, 1—145.