Если выполнено условие c), то преобразовываем уравнение (2) к виду (3). Повторяя оценки, аналогичные рассмотренным в случае a), доказываем сходимость ряда ψ в топологии пространства C^∞-отображений.

Замечание 1. Решение уравнения (1), вообще говоря, не единственно: из теоремы вытекает, что каждое формальное решение однородного уравнения (при $\gamma(x) = 0$) восстанавливается до локального C^∞-решения.

Замечание 2. Из доказательства теоремы следует, что при выполнении ее условий уравнение (1) имеет решение при любой правой части с нулевым рядом Тейлора в нуле.

Список литературы: 1. *Кучко Л. П.* Линейные функциональные уравнения. — Изв. АН СССР, 1978, **42**, № 2, с. 379—395. 2. *Tychonoff A. N.* Ein Fixpunktsatz. — Math. Ann., 1935, **111**, № 5, р. 767—776.

Поступила в редколлегию 11.12.84.

УДК 517. 982

М. В. ЛЕЙБОВ

О ПОДПРОСТРАНСТВАХ ПРОСТРАНСТВА VMO

Рассмотрим пространства BMO и VMO функций, заданных на отрезке $[0,1]$ или окружности S длины 1 (S — обозначим отрезок $[0, 1]$ с отождествленными концами, и соответственно будем использовать аддитивные обозначения, $\|\cdot\|_*$ — норма в пространстве BMO). Пусть $f \in$ BMO, I — подынтервал. Положим для $h \in (0,1/2)$ $S_h = S$ в случае BMO(S), и $S_h = [h, 1-h]$ в случае BMO $[0,1]$.

Введем следующие обозначения:

$$f_I = \frac{1}{|I|}\int_I f;\ f_*(I) = \frac{1}{|I|}\int_I |f - f_I|;\ f_h(x) = f_*[x-h,\ x+h];$$

$$f^*(h) = \sup_{x\in S_h} f_h(x);\ f_*(\varepsilon) = \sup_{0<h\leqslant\varepsilon} f^*(h).$$

Тогда $\|f\|_* = \sup\limits_h f^*(h)$. Известно, что $f \in$ VMO тогда и только тогда, когда $f_*(\varepsilon) \to 0\ (\varepsilon \to 0)$ [1], или, что то же самое, $f^*(h) \to 0\ (h \to 0)$.

Лемма 1. *Если $f \in$ VMO, то существует интервал I такой, что $\|f\|_* = f_*(I)$.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что для функции $f \in L_1$ функции $f_h(x)$ (при фиксированном $h > 0$) и $f^*(h)$ при $h \in (0,\ 1/2)$ непрерывны. Положим $f^*(0) = 0$. Тогда для $f \in$ VMO $f^*(h)$ непрерывна на $[0,\ 1/2]$ и, следовательно, достигает максимума в некоторой точке $h' > 0$.

Функция $f_{h'}(x)$ достигает максимума в некоторой точке $x' \in S_{h'}$. Тогда $\|f\|_* = \sup\limits_h f^*(h) = f^*(h') = \sup\limits_{x\in S_{h'}} f_{h'}(x) = f_{h'}(x') = f_*(I)$ для $I = [x' - h',\ x' + h']$, что и требовалось доказать.

Пусть $f \in \mathrm{BMO}$. Положим $\Omega(f) = \{\varepsilon \mid f_*(I) \leqslant \varepsilon \|f\|_*$ для любого интервала I, $|I| \geqslant \varepsilon\}$. Заметим, что если $\varepsilon' \in \Omega(f)$ и $\varepsilon'' > \varepsilon'$, то $\varepsilon'' \in \Omega(f)$. Действительно, в этом случае для любого интервала I, $|I| \geqslant \varepsilon''$, выполняется $|I| > \varepsilon'$, $f_*(I) \leqslant \varepsilon' \|f\|_* < \varepsilon'' \|f\|_*$. Далее, $\Omega(f)$ непусто, так как $\varepsilon = 1$ всегда принадлежит $\Omega(f)$. Обозначим $\omega(f) = \inf\{\varepsilon \in \Omega(f)\}$. Если $F \subset \mathrm{BMO}$, положим $\omega(F) = \inf\{\omega(f) \mid f \in F\}$.

Лемма 2. *Пусть $F = \{f_i\}_1^\infty \subset \mathrm{VMO}$ — нормированная базисная последовательность, $\omega(F) = 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует подпоследовательность $\{f_{i_j}\}_{j=1}^\infty$, $(1+\varepsilon)$ — эквивалентная естественному базису пространства c_0.*

Доказательство. Положим $\varepsilon_0 = 2^{-1}\varepsilon$. Выберем i_1 так, что $\omega(f_{i_1}) < \varepsilon_0$. Рассмотрим $\varepsilon_1 \leqslant 2^{-2}\varepsilon$ такое, что $(f_{i_1})_*(\varepsilon_1) < 2^{-1}\varepsilon_1$. Выберем $i_2 > i_1$ так, что $\omega(f_{i_2}) < \varepsilon_1$. Рассмотрим $\varepsilon_2 \leqslant 2^{-3}\varepsilon$ такое, что $(f_{i_2})_*(\varepsilon_2) < 2^{-2}\varepsilon$. Выберем $i_3 > i_2$ так, что $\omega(f_{i_3}) < \varepsilon_2$, и т. д. Если последовательности $\{\varepsilon_j\}_{j=0}^{m-1}$, $\{f_{i_j}\}_{j=1}^m$ уже построены, рассмотрим $\varepsilon_m \leqslant 2^{-m-1}\varepsilon$ такое, что $(f_{i_m})_*(\varepsilon_m) < 2^{-m}\varepsilon$ и выберем $i_{m+1} > i_m$ так, что $\omega(f_{i_{m+1}}) < \varepsilon_m$. Таким образом, построены последовательности $\{\varepsilon_j\}_0^\infty$, $\{f_{i_j}\}_{j=1}^\infty$, обладающие следующими свойствами: $\varepsilon_j < \min(\varepsilon_{j-1}, 2^{-j}\varepsilon)$ и если $|I| \bar{\in} (\varepsilon_j, \varepsilon_{j-1}]$, то $(f_{i_j})_*(I) < 2^{-j}\varepsilon$. Обозначим $N(I)$ номер n такой, что $|I| \in (\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}]$. Тогда последнее свойство переформулируется так: если $n \neq N(I)$, то $(f_{i_n})_*(I) < 2^{-n}\varepsilon$. Покажем теперь, что $\{f_{i_j}\}_{j=1}^\infty$ — требуемая последовательность, т. е. что для любых $m > 0$, $\{\alpha_j\}_1^m \subset R$

$$(1-\varepsilon)\max_{1 \leqslant j \leqslant m} |\alpha_j| \leqslant \Big\| \sum_{j=1}^m \alpha_j f_{i_j} \Big\|_* \leqslant (1+\varepsilon)\max_{1 \leqslant j \leqslant m} |\alpha_j|.$$

Пусть $f = \sum_{j=1}^m \alpha_j f_{i_j}$, I — интервал. Оценим $f_*(I)$ сверху.

Если $N(I) > m$, то

$$f_*(I) = \Big(\sum_{j=1}^m \alpha_j f_{i_j}\Big)_*(I) \leqslant \sum_{j=1}^m |\alpha_j| (f_{i_j})_*(I) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant m} |\alpha_j| \Big(\sum_{j=1}^m (f_{i_j})_*(I)\Big) \leqslant \big(\max_{1 \leqslant j \leqslant m} |\alpha_j|\big)\Big(\sum_{j=1}^m 2^{-j-1}\varepsilon\Big) \leqslant \varepsilon \max_{1 \leqslant j \leqslant m} |\alpha_j|.$$

Если $N(I) \leqslant m$, то, аналогично,

$$f_*(I) \leqslant \big(\max_{1 \leqslant j \leqslant m} |\alpha_j|\big)\Big((f_{i_{N(I)}})_*(I) + \sum_{j \neq N(I)} (f_{i_j})_*(I)\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \big(\max_{1 \leqslant j \leqslant m} |\alpha_j|\big)\Big(\|f_{i_{N(I)}}\|_* + \sum_{j \neq N(I)} 2^{-j}\varepsilon \|f_{i_j}\|_*\Big) \leqslant (1+\varepsilon)\max_{1 \leqslant j \leqslant m} |\alpha_j|.$$

Итак, $\|f\|_* \leqslant (1+\varepsilon)\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} |\alpha_j|$. Оценим $\|f\|_*$ снизу. Пусть n — номер такой, что $|\alpha_n| = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} |\alpha_j|$, I — интервал, для которого

$\|f_{i_n}\|_* = (f_{i_n})_*(I)$. Заметим, что в этом случае $N(I) = n$ и, следовательно, $(f_{i_j})_*(I) < 2^{-j}\varepsilon$ для $j \neq n$.
Тогда

$$\|f\|_* \geqslant f_*(I) = (\sum_{j=1}^{m} \alpha_j f_{i_j})_*(I) \geqslant (\alpha_n f_{i_n})_*(I) -$$
$$-(\sum_{j\neq n} \alpha_j f_{i_j})_*(I) \geqslant |\alpha_n| \cdot \|f_{i_n}\|_* - \sum_{j\neq n} |\alpha_j| (f_{i_j})_*(I) \geqslant$$
$$\geqslant |\alpha_n| - (\max_{1\leqslant j\leqslant m} |\alpha_j|) \cdot (\sum_{j\neq n} (f_{i_j})_*(I)) \geqslant (\max_{1\leqslant j\leqslant m} |\alpha_j|) \times$$
$$\times (1 - \sum_{j=1}^{m} 2^{-j}\varepsilon) \geqslant (1-\varepsilon) \max_{1\leqslant j\leqslant m} |\alpha_j|.$$

Итак $\|f\|_* \geqslant (1-\varepsilon)\max|\alpha_j|$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $F = \{f_n\}_1^\infty \subset \mathrm{VMO}$, $\|f\|_* = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\omega(F) = 0$. *Тогда F содержит базисную последовательность.*

Доказательство. Будем сразу считать, что $\omega(f_n) \to 0$ $(n \to \infty)$. Тогда $\|f_n\|_1 = (f_n)_*[0, 1] \leqslant \omega(f_n) \cdot \|f_n\|_* = \omega(f_n) \to 0$ $(n \to \infty)$, где $\|\cdot\|_1$ — норма в пространстве L_1. Следовательно, $f_n \to 0$ слабо* в BMO или, что то же самое (поскольку $\mathrm{VMO}^{**} = \mathrm{BMO}$), $f_n \to 0$ слабо в VMO. Тогда ([2], теорема 1.17) $\{f_n\}_1^\infty$ содержит базисную подпоследовательность, что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Пусть* $\omega(F) = 0$, $F \subset \mathrm{VMO}$ — *замкнутое подпространство. Тогда F содержит подпространство, ε — изометричное пространству c_0.*

Обозначим U естественное вложение пространства BMO в пространство L_1.

Лемма 4. *Пусть* $F \subset \mathrm{BMO}$ — *замкнутое подпространство,* $\omega(F) > 0$. *Тогда* $U|F$ — *изоморфизм.*

Доказательство. Условие $\omega(F) > 0$ означает, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любой функции $f \in F$ существует интервал I, $|I| \geqslant \varepsilon$, для которого $f_*(I) \geqslant \varepsilon\|f\|_*$. Тогда

$$f_*(I) = \frac{1}{|I|}\int_I |f - f_I| \leqslant \frac{1}{|I|}\int_I |f| + |f_I| \leqslant \frac{2}{|I|}\int_I |f|$$

и

$$\|f\|_1 \geqslant \int_I |f| \geqslant \frac{|I|}{2} f_*(I) > \frac{\varepsilon^2}{2}\|f\|_*$$

для любой функции $f \in F$. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть* $F \subset \mathrm{VMO}$ — *замкнутое подпространство. Тогда либо F дополняемо в* BMO *и изоморфно* l_2, *либо для любого* $\varepsilon > 0$ *содержит подпространство, дополняемое в* VMO *и изометричное* c_0.

Доказательство. Если $\omega(F)>0$, то, по лемме 4, $U|F$ — изоморфизм и, следовательно, F изоморфно l_2 и дополняемо в BMO. Если $\omega(F)=0$, то по следствию 1 F для любого $\varepsilon>0$ содержит подпространство G, ε — изометричное c_0. Дополняемость G в VMO следует из теоремы Собчика [3]. Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть $F\subset$ VMO — замкнутое подпространство. Тогда следующие свойства F эквивалентны:*

(1) *F не содержит подпространств, изоморфных c_0;*
(2) *F изоморфно сопряженному пространству;*
(3) *F рефлексивно;*
(4) *F изоморфно l_2;*
(5) *F дополняемо в* BMO;
(6) *$U|F$ — изоморфизм.*

Список литературы: 1. *Sarason D.* Functions of vanishing mean oscillation. — Trans. of the Amer. Math. Soc., 1975, **207**, p. 391—405. 2. *Мильман В. Д.* Геометрическая теория пространств Банаха. 4.1. — Успехи мат. наук, 1970, **25**, № 3, с. 113—174 3. *Sobszyk A.* Projections of the space m on its subspace c_0. — Bull. of the Amer. Math. cal Soc., 1941, **47**, p. 938—947.

Поступила в редколлегию 18.10.84.

УДК 513.88

М. Ю. ЛЮБИЧ, Ю. И. ЛЮБИЧ

ТЕОРИЯ ПЕРРОНА — ФРОБЕНИУСА ДЛЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ И ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПОЛУГРУПП

1. **Введение.** Основное содержание настоящей статьи, так же как и предшествующей ей статьи [2], было анонсировано в [1]. Прежде чем к нему переходить, напомним читателю теорему об отщеплении граничного спектра, которой вместе с различными ее вариантами, обобщениями и ближайшими следствиями была посвящена работа [2].

Пусть S — топологическая полугруппа, T — ее п.п. представление в банаховом пространстве B. Тогда сильное замыкание $\beta_T=\overline{\operatorname{Im} T}$ является компактной полугруппой и, следовательно, обладает наименьшим двусторонним идеалом K — *ядром Сушкевича*. Если K — группа и, тем самым, — компактная группа, то представление T называется *элементарным*. Единица P группы K называется *граничным проектором* представления T (очевидно, $P^2=P$). Подпространства $B_0=\operatorname{Ker} P$, $E_1=\operatorname{Im} P$ называются соответственно *внутренним и граничным* для T. Они инвариантны, так как P коммутирует со всеми операторами $T(s)$ $(s\in S)$. Очевидно, $B=B_0\dotplus B_1$. При этом B_0 состоит из тех векторов x, для которых орбита $O(x)=\{T(s)x\}$ «асимптотична» нулю (т. е. $0\in\overline{O(x)}$), а B_1 является замыканием линейной оболочки тех векторов x, орбиты которых лежат в конечномерных подпространствах,

и подпредставления $T(s) | \mathrm{Lin}\, O(x)$ эквивалентны неприводимым унитарным представлениям группы K.

Для абелевой полугруппы S все п. п. представления элементарны. Однако в этом случае существует более широкий класс так называемых *асимптотически почти периодических* (*а. п. п.*) представлений, для которых теорема об отщеплении граничного спектра остается в силе, причем описание внутреннего подпространства уточняется следующим образом: $B_0 = \{x \mid \lim\limits_{s\to\infty} T(s)\, x = 0\}$, где предельный переход совершается по естественному направлению в S: $s_1 \geqslant s_2$, если s_1 делится на s_2 или $s_1 = s_2$. Что касается граничного подпространства B_1, то оно превращается в замыкание линейной оболочки весовых векторов, отвечающих унитарным характерам группы K. Отметим, что в данном случае K есть ω — предельное множество полугруппы β_T. Это по-прежнему компактная группа, хотя β_T может уже не быть компактной.

Абелева ситуация охватывает, в частности п.п. операторы A, для которых по определению представление $n \mapsto A^n$ полугруппы Z_+ является п.п. (свойство а. п. п. здесь эквивалентно п.п.).

В настоящей статье мы строим на основе [2] спектральную теорию неотрицательных п. п. (в абелевом случае — а. п. п.) представлений в пространстве $C(Q)$ непрерывных функций на компакте Q. Ее прототипом является классическая теория Перрона — Фробениуса, относящаяся первоначально к неотрицательным матрицам, но обобщенная затем М. Г. Крейном и М. А. Рутманом на неотрицательные компактные операторы в банаховом пространстве с конусом. Центральным фактом этой теории является теорема существования неотрицательного инвариантного вектора и дуального к нему неотрицательного линейного функционала. Мы начнем с обобщения этой «теоремы Перрона — Фробениуса» на п. п. представления в $C(Q)$*. В конце статьи будет изложено одно применение к динамическим системам.

2. Обобщение теоремы Перрона — Фробениуса. Условимся для краткости говорить, что представление T топологической полугруппы S в пространстве $C(Q)$ непрерывных функций на компакте Q принадлежит *классу* N, если 1) T — элементарное п. п. (или в случае абелевой S — а.п.п.); 2) T неотрицательно, т. е. $T(s) \geqslant 0$ для всех $s \in S$; 3) спектральный радиус $r(T(s)) = 1$ для всех $s \in S$. Именно этот класс представлений будет объектом нашего исследования.

Теорема 2.1. *Для любого представления класса N существует инвариантная функция $h \geqslant 0$ и инвариантная мера*** μ, *дуальная к h в том смысле, что*

$$\mu(h) = \int\limits_Q h\, d\mu = 1. \tag{2.1}$$

* Дальнейшее обобщение на банахово пространство с конусом содержится в [1].

** Термин «мера», если не оговорено противное, означает неотрицательную меру.

Доказательство. Положим

$$h = \int_K (A1)\, dA \tag{2.2}$$

где dA — нормированная мера Хаара на группе K. Все $A \in K$ неотрицательны, поэтому $h \geqslant 0$. Функция $\varepsilon = P1 \geqslant 0$ отлична от нуля, ибо в силу неотрицательности представления $\| T(s) 1 \| = \| T(s) \|$, а $\| T(s) \| \geqslant r(T(s)) = 1$. Отсюда $\| \varepsilon \| \geqslant 1$, поскольку $P \in \{\overline{T(s)}\}$. Теперь из (2.1) видно, что $h \neq 0$ (положительный вклад в h вносит окрестность единицы P группы K). Наконец, h — инвариантная для T функция, ибо $T(s)A = T(s)PA$, а $T(s)P \in K$, так как K — двусторонний идеал в β_T.

Для построения меры μ возьмем любую меру $\lambda \geqslant 0$, такую, что $\lambda(h) = 1$ и положим

$$\mu(\varphi) = \int_K \lambda(A\varphi)\, dA \quad (\varphi \in C(Q)). \tag{2.3}$$

Этим определяется инвариантная мера μ, такая, что

$$\mu(h) = \int_K \lambda(Ah)\, dA = \int_K \lambda(h)\, dA = 1.$$

Использованная в доказательстве функция $\varepsilon = P1$ играет и в дальнейшем важную роль. Множество тех $t \in Q$, для которых $\varepsilon(t) > 0$, будет обозначаться через E_+. Построенная согласно (2.2) инвариантная функция h, которую мы назовем *канонической**, положительна на E_+. Вместе с тем она равна нулю вне E_+. Последним свойством обладают вообще все инвариантные функции и даже все функции из граничного подпространства $B_1 = \operatorname{Im} P$. Дело в том, что граничный проектор P неотрицателен, в силу чего действует по формуле

$$(P\varphi)(t) = \int_Q \varphi\, d\pi_t \quad (t \in Q), \tag{2.4}$$

где $\{\pi_t\}$ — соответствующее семейство мер. Отсюда

$$\varepsilon(t) = (P1)(t) = \int_Q u\pi_t \quad (t \in Q). \tag{2.5}$$

Следовательно, $|(P\varphi)(t)| \leqslant \|\varphi\| \varepsilon(t)$ $(t \in Q)$ и, если $\varepsilon(t_0) = 0$, то $(P\varphi(t_0) = 0$ для всех φ. Это замечание является исходным пунктом нашей работы [3], в которой описывается структура произвольного неотрицательного проектора в $C(Q)$. Некоторые факты из [3] существенно используются ниже. В частности, пусть

$$\Pi = \operatorname{supp} P \equiv \overline{\bigcup_{t \in Q} \operatorname{supp} \pi_t}, \; E = E_+ \cap \Pi. \tag{2.6}$$

---

* Обозначение ее буквой h зафиксируем раз и навсегда.

Рассcмотрим фактор-пространство E, получаемое отождествлением точек из E функциями вида $(P\varphi)/\varepsilon$. Оказывается, $\tilde{E}$ — компакт, а пространство $C(\tilde{E})$ порядково изоморфно граничному подпространству. Требуемый изоморфизм V: $B_1 \to C(\tilde{E})$ есть композиция сужения на E, деления на ε и естественного переноса на $\tilde{E}$. Отсюда, между прочим, ясно, что функции из B_1 однозначно определяются своими сужениями на E. Это можно усмотреть и непосредственно, поскольку (2.4) при $\varphi \in B_1$ дает

$$\varphi(t) = \int\limits_E \varphi d\pi_t \ (t \in Q). \tag{2.7}$$

Назовем представление T класса N *слабо положительным*, если $E_+ = Q$ (т. е. $\varepsilon > 0$) и $\Pi = Q$. Тогда и $E = Q$, компакт $\tilde{E}$ оказывается фактор-компактом $\tilde{Q}$ исходного Q. Для слабо положительного представления каноническая инвариантная функция h положительна (и $\mu > 0$, если в (2.3) $\lambda > 0$).

Представление T полугруппы S в $C(Q)$ называется *стохастическим* (или *марковским*), если таковы все $T(s)$, т. е. $T(s) \geqslant 0$, $T(s)1 = 1$ $(s \in S)$. По этому определению функция 1 инвариантна. Она же будет канонической инвариантной функцией в случае стохастического представления класса N, а утверждение теоремы 2.1 теперь содержательно сводится к существованию инвариантной вероятностной меры.

Подчеркнем еще, что для стохастического представления $\|T(s)\| = r(T(s)) = 1$.

3. Леммы о положительной эквивалентности. *Положительной эквивалентностью* неотрицательных представлений* называется эквивалентность, осуществляемая оператором, неотрицательным вместе со своим обратным.

Лемма 3.1. *Для того чтобы оператор $U \geqslant 0$ в $C(Q)$ был обратим в полугруппе неотрицательных операторов, необходимо и достаточно, чтобы он был мономиален, т. е. имел следующий вид:*

$$(U\varphi)(t) = \omega(t)\varphi(f^{-1}t) \ (t \in Q), \tag{3.1}$$

*где $\omega > 0$, $f \in \operatorname{Homeo} Q$. Функция ω и гомеоморфизм f однозначно определяются** оператором U.*

Необходимость. Сопряженный оператор U^*, будучи автоморфизмом конуса мер, биективно действует на множестве лучей конуса, а эти лучи определяются мерами Дирака δ_t $(t \in Q)$. Следовательно, $U^*\delta_t = \omega(t)\delta_{f^{-1}t}$, где $\omega > 0$, $f: Q \to Q$ — биекция. Непрерывность ω и f^{-1} следует из непрерывности U^*. Так как Q — компакт, то $f \in \operatorname{Homeo} Q$. Остается заметить, что $(U\varphi)(t) = (U^*\delta_t)\varphi$.

* Действующий, возможно, в разных пространствах с конусом.

** Конечно, в (3.1) можно написать $\varphi(ft)$ вместо $\varphi(f^{-1}t)$, но принятая нами запись удобнее для дальнейшего.

Достаточность. Если U имеет вид (3.1), то $(U^{-1}\psi)(t) = \psi(ft)/\omega(ft)$.

Однозначность. Из (3.1) следует, что $\omega = U1$, $\varphi(f^{-1}t) = (U\varphi)(t)/\omega(t)$ для всех φ, а этим f определяется однозначно.

Следствие. *Для того чтобы стохастический оператор U в $C(Q)$ был обратим в полугруппе неотрицательных (и, тем самым, в полугруппе стохастических) операторов, необходимо и достаточно, чтобы он был оператором подстановки, т. е. имел следующий вид:*

$$(U\varphi)(t) = \varphi(f^{-1}t), \tag{3.2}$$

где $f \in \operatorname{Homeo} Q$. Гомеоморфизм f однозначно определяется оператором U.

Рассмотрим теперь вопрос об условиях положительной эквивалентности представления класса N стохастическому.

Лемма 3.2. *Для того чтобы представление T класса N было положительно эквивалентно стохастическому, необходимо и достаточно выполнение любого из следующих четырех равносильных условий:* 1) $\inf(T(s)1)(t) > 0$; 2) $\varepsilon > 0$; 3) $h > 0$; 4) *существует инвариантная функция* $H > 0$. *Требуемая эквивалентность осуществляется оператором $\hat{H}$ умножения на H (в частности — оператором $\hat{h}$).*

Доказательство. Условие 1) необходимо. Действительно, пусть $T(s) = u^{-1}T_1(s)U$, где T_1 — стохастическое представление, $U \geqslant 0$, $U^{-1} \geqslant 0$. Положим $c_1 = \|U^{-1}\|^{-1}$, $c_2 = \|U\|^{-1}$. Тогда $U^{-1}1 \leqslant c_1^{-1}$, $U1 \leqslant c_2^{-1}$, откуда $U1 \geqslant c_1$, $U^{-1}1 \geqslant c_2$. Следовательно, $T(s)1 \geqslant c_1c_2$. 1) $\Rightarrow$ 2), так как $\varepsilon\, (\in \overline{\{T(s)\,1\}}$. Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) вытекает из известного нам факта: $h \mid E_+ > 0$. Импликация 3) $\Rightarrow$ 4) тривиальна. Наконец, при условии 4) представление $T_1 = \hat{H}^{-1}T\hat{H}$, очевидно, — стохастическое.

Следствие. *Слабо положительное представление класса N положительно эквивалентно стохастическому (по-прежнему слабо положительному).*

4. Связь представлений класса N с действиями компактных групп. Напомним, что *действием* топологической группы G на хаусдорфовом топологическом пространстве X называется гомоморфизм α: $G \to \operatorname{Homeo} X$, такой, что отображение $(g, x) \mapsto \alpha(g)x$ $(g \in G,\ x \in X)$ непрерывно. Если X — компакт, то α порождает стохастическое представление α^* группы G в $C(X)$:

$$(\alpha^*(g)\,\theta)(x) = \theta(\alpha(g^{-1})\,x) \quad (x \in X). \tag{4.1}$$

Если вдобавок группа G компактна, то α^* — представление класса N. Очевидно, α^* слабо положительно ($P = \mathrm{id}$). Мы покажем, что к этой модели сводится любое представление класса N на своем граничном подпространстве.

Теорема 4.1. *Каждому представлению T класса N соответствует некоторое действие α_T ядра Сушкевича K на компакте $\tilde{E}$, такое, что представление $T \mid B_1$ положительно эквивалентно естественному поднятию представления α_T^* на исходную полугруппу S.*

Доказательство. Ядро Сушкевича K можно рассматривать как компактную группу неотрицательных операторов в B_1 ($K \approx K \mid B_1$, $K \mid B_0 = 0$). Если V: $B_1 \to C(\tilde{E})$ — описанный ранее (на основе [3]) порядковый изоморфизм, то, полагая $\tilde{A} = VAV^{-1}$ ($A \in K$), мы получаем представление $\tilde{T}$ группы K в $C(\tilde{E})$, положительно эквивалентное исходной реализации в B_1. Так как все $\tilde{A} \geqslant 0$ и обратимы в полугруппе неотрицательных операторов, то по лемме 3.1 они мономиальны:

$$(\tilde{A}\theta)(\tilde{t}) = \omega_A(\tilde{t})\,\theta(f_A^{-1}\tilde{t}) \quad (\tilde{t} \in \tilde{E},\ A \in K). \tag{4.2}$$

Легко видеть, что $f_{A_1A_2} = f_{A_1}f_{A_2}$ и $f_A^{-1}\tilde{t}$ — непрерывная функция по совокупности A, $\tilde{t}$. Таким образом, мы имеем действие $\alpha_T(A)\,\tilde{t} = f_A^{-1}\tilde{t}$ группы K на компакте $\tilde{E}$. При этом $(\alpha_T^*\theta)(\tilde{t}) = \theta(f_A^{-1}\tilde{t})$. Покажем, что представление $\tilde{T}$ положительно эквивалентно α_T^*. Действительно, функция $H = Vh$ инвариантна для $\tilde{T}$, причем $H > 0$, так как $H(\tilde{t}) = (h/\varepsilon)(t)$ ($t \in E$, $\tilde{t} \in \tilde{E}$ — класс точки t). В силу (4.2) инвариантность H означает, что

$$H(\tilde{t}) = \omega_A(\tilde{t})\,H(f_A^{-1}\tilde{t}) \quad (\tilde{t} \in \tilde{E},\ A \in K). \tag{4.3}$$

Выражая отсюда $\omega_A(\tilde{t})$ и подставляя в (4.2), получаем*

$$(\tilde{A}\,\theta)\ (\tilde{t}) = \frac{H(\tilde{t})\,\theta\,(f_A^{-1}\tilde{t})}{H(f_A^{-1}\tilde{t})} = H(\tilde{t})\,\alpha_T^*\left[\frac{\theta}{H}\right](\tilde{t}),$$

т. е. $\tilde{A} = \tilde{H}\alpha_T^*\tilde{H}^{-1}$, что и требовалось.

Естественное поднятие представления α_T^* на S индуцируется цепочкой гомоморфизмов $S \underset{T}{\to} \beta_T \underset{\pi}{\to} K$, где π — умножение на P (по поводу последнего см. [2]).

Замечание. Требуемую эквивалентность осуществляет $\hat{H}^{-1}V$.

Следствие 1. *Любое представление класса N на своем граничном подпространстве положительно эквивалентно стохастическому.*

Если T с самого начала стохастическое, то действие α_T происходит на фактор-компакте $\tilde{\Pi}$ (или даже на $\tilde{Q}$, если T слабо положительно). Так как в этом случае $\varepsilon = 1$, то $1 \in B_1$. Изомор-

* С общей точки зрения смысл этой процедуры состоит в уничтожении тривиального коцикла ω.

физм V редуцируется к композиции сужения на Π и переноса на $\tilde{\Pi}$. Следовательно, $V1 = 1$. Поэтому $\omega_A \equiv 1$, и эквивалентность $T|B_1$ с α_T^* осуществляется стохастическим преобразованием V.

Действие α_T факторизует компакт $\tilde{E}$, превращая его в пространство орбит $\tilde{E}/K$, также компактное.

Следствие 2. *Подпространство инвариантных функций представления T порядково изоморфно пространству $C(\tilde{E}/K)$, а подпространство инвариантных мер — пространству мер на $\tilde{E}/K$.*

В самом деле, инвариантные функции представления T лежат в граничном подпространстве, а инвариантные функции эквивалентного представления α_T^* и его поднятия — одни и те же, так как образ S в K плотен. Для α_T^* инвариантность функции эквивалентна ее постоянству на каждой орбите. Подпространство таких функций естественно изоморфно $C(\tilde{E}/K)$ с сохранением порядка. Утверждение для мер вытекает из двойственности (см. [2]).

5. **Эргодические и неразложимые представления.** Представление T класса N называется *эргодическим*, если действие α_T транзитивно, т. е. для любых $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2 \in \tilde{E}$ существует $A \in K$, такой, что $f_A \tilde{t}_2 = \tilde{t}_1$, иными словами, компакт $\tilde{E}/K$ сводится к одной точке. Так как последнее равносильно одномерности пространства $C(\tilde{E}/K)$, то *для эргодичности представления класса N необходимо и достаточно, чтобы подпространство его инвариантных функций (мер) было одномерным.* Между прочим, это означает, что для эргодического представления можно канонизировать не только инвариантную функцию h, но и дуальную ей инвариантную меру. Определение эргодичности — глубоко внутреннее. Однако существует некоторое внешнее проявление эргодичности — так называемая неразложимость, обнаруживающее себя при дополнительном условии слабо положительности.

Представление $T \geqslant 0$ называется *неразложимым*, если для любой точки $t \in Q$ и любой функции $\varphi \geqslant 0$ $(\varphi \neq 0)$ существует $s \in S$, такое, что $(T(s)\varphi)(t) > 0$.

Теорема 5.1. *Для того чтобы представление T класса N было неразложимым, необходимо и достаточно, чтобы оно было эргодическим и слабоположительным.*

Необходимость. Пусть T неразложимо, но не эргодично. Тогда существует $t_0 \in E$ такое, что орбита $O(\tilde{t}_0) \subset \tilde{E}$ под действием α_T не совпадает с $\tilde{E}$. Так как $O(\tilde{t})$ — компакт (в силу компактности K), то существует функция $\theta \in C(\tilde{E})$ такая, что $(\theta \geqslant 0)$ $(\theta \neq 0)$, $\theta | O(\tilde{t}_0) = 0$, т. е. $\theta(f_A^{-1}\tilde{t}_0) = 0$ для всех $A \in K$. Полагая $\varphi = V^{-1}\hat{H}\theta \in C(Q)$, имеем $\varphi \geqslant 0$ $(\varphi \neq 0)$, $(T(s)\varphi)(t_0) = 0$ для всех $s \in S$ вопреки неразложимости.

Докажем, что T слабоположительно. Если $\varepsilon(t_0)=0$ при некотором $t_0\in Q$, то $\varphi(t_0)=0$ для всех $\varphi\in B_1$, а тогда и $(T(s)\times\varphi)(t_0)=0$ для всех $s\in S$, ибо B_1 инвариантно. Это противоречит неразложимости, ибо в B_1 существует функция $\varphi\geqslant 0$ $(\varphi\neq 0)$, например, $\varphi=\varepsilon$.

Если $\Pi\neq Q$, то найдется $\varphi\geqslant 0$ $(\varphi\neq 0)$ такая, что $\varphi|\Pi=0$. Тогда $P\varphi=0$ и, поскольку $B_0=\operatorname{Ker}P$ инвариантно, то $PT(s)\varphi=0$ $(s\in S)$. Отсюда $T(s)\varphi|\Pi=0\,(s\in S)$, ибо $T(s)\varphi\geqslant 0$. Это также противоречит неразложимости.

Достаточность. Пусть представление T эргодично и слабо положительно, но не неразложимо. Пусть $\varphi\geqslant 0$ $(\varphi\neq 0)$ и $t_0\in Q$ таковы, что $(T(s)\varphi)(t_0)=0$ для всех $s\in S$. Заменяя s на ss' и переходя по s' к точке $P\varphi$ замыкания орбиты $\{T(s')\varphi\}$, получаем $(T(s)P\varphi)(t_0)=0$. При этом $P\varphi\geqslant 0$ и $P\varphi\neq 0$, ибо $\Pi=Q$. Следовательно, с самого начала можно считать, что $\varphi\in B_1$. Так как $\varepsilon>0$, то $E_+=Q$ и $E=Q$.

Изоморфизм V редуцируется к композиции деления на ε и естественного переноса $(t\mapsto\tilde t)$ на $\tilde Q$. Если $\theta=\hat H^{-1}V\varphi$, то в силу предыдущего $\theta(f_A^{-1}\tilde t_0)=0$ для всех $A\in K$. Ввиду эргодичности $\theta=0$, откуда $\varphi=0$, вопреки исходному допущению.

Исследуем теперь спектральные свойства эргодических представлений. Обозначим по-прежнему через h каноническую инвариантную функцию представления T.

Теорема 5.2. *Пусть ψ — весовая функция эргодического представления T, отвечающая унитарному весу χ. Тогда*

$$|\psi(t)|=\rho h(t)\ \ (t\in E),\ \ |\psi(t)|\leqslant\rho h(t)\ \ (t\in Q),\tag{5.1}$$

где $\rho=\mathrm{const}>0$.

Доказательство. Согласно замечанию к теореме 4.1 функция $\theta=\hat H^{-1}V\psi\in C(\tilde E)$ — весовая для представления α_T^* и того же веса χ (продолженного на K). Таким образом, $\theta(f_A^{-1}\tilde t)=\chi(A)\theta(\tilde t)$, откуда $|\theta(f_A^{-1}\tilde t)|=|\theta(\tilde t)|\ (\tilde t\in\tilde E,\ \ A\in K)$. Ввиду транзитивности действия α_T получаем: $|\theta|=\rho$, где $\rho=\mathrm{const}>0$. Но $\theta(\tilde t)$ является частным от деления функций $(\psi/\varepsilon)(t)$ и $(h/\varepsilon)(t)$, преобразованных к переменной $\tilde t$ $(t\in E)$. Следовательно, $|(\psi/h)(t)|=\rho\,(t\in E)$. Для произвольного $t\in Q$ используем (2.7):

$$\psi(t)=\int\limits_E\psi\,d\pi_t,\quad h(t)=\int\limits_E h\,d\pi_t\quad(t\in Q).$$

Отсюда

$$|\psi(t)|\leqslant\int\limits_E|\psi|\,d\pi_t=\rho\int\limits_E h\,d\pi_t=\rho h(t).$$

Из теоремы 5.2 извлекается основная информация об унитарных весах и соответствующих весовых функциях эргодического представления.

Следствие 1. *Весовые функции эргодического представления, отвечающие унитарным весам, не имеют нулей на множестве E, а в стохастическом случае их модули постоянны на $E = \Pi$. Весовые функции неразложимого представления класса N не имеют нулей, а в стохастическом случае их модули постоянны.*

В частности, $h > 0$ для неразложимого представления класса N, а, значит, такое представление положительно эквивалентно стохастическому по лемме 3.2.

Следствие 2. *Весовые подпространства эргодического представления, отвечающие унитарным весам, одномерны.*

Действительно, пусть ψ_1, ψ_2 — две весовых функции, отвечающие унитарному весу χ. Возьмем любую точку $t_0 \in E$. Комбинация $\psi_2(t_0)\psi_1(t) - \psi_1(t_0)\psi_2(t)$ обращается в нуль в этой точке. Согласно следствию 1 она тождественно равна нулю. Тем самым, ψ_1, ψ_2 линейно зависимы.

Следствие 3. *Унитарные веса эргодического представления образуют группу относительно поточечного умножения, т. е. подгруппу группы K^* одномерных характеров ядра Сушкевича.*

Доказательство. Благодаря теореме 4.1 можно заменить T представлением α_T^*. Если χ_1, χ_2 — два унитарных веса, а θ_1, θ_2 — соответствующие весовые функции (для α_T^*), то $\theta_1\theta_2 \neq 0$ (ибо модули функций θ_1, θ_2 постоянны) и, следовательно, $\theta_1\theta_2$ — весовая функция, отвечающая весу $\chi_1\chi_2$. Точно так же θ_1^{-1} — весовая функция, отвечающая весу χ_1^{-1}.

Более глубокий факт заключен в следующей «теореме о повороте», доказательство которой приведено в [4].

Теорема 5.3. *Пусть χ — унитарный вес неразложимого представления T класса N. Тогда представление $\chi \otimes T$ (т. е. $s \to \chi(s) T(s)$) эквивалентно T.*

Эквивалентность осуществляется оператором $\hat{\psi}$ умножения на соответствующую весовую функцию ψ.

В силу теоремы 5.3 весь (а не только унитарный) спектр представления T инвариантен относительно умножения на χ.

6. **Перемешивающие и примитивные представления.** Представление T класса N называется *перемешивающим*, если компакт $\tilde{E}$ состоит из одной точки. Очевидно, перемешивающее представление эргодично. В силу изоморфизма $C(\tilde{E}) \approx B_1$ свойство перемешивания эквивалентно тому, что $\dim B_1 = 1$, что в терминах граничного проектора означает, что он имеет вид

$$(P\varphi)(t) = h(t) \int_Q \varphi \, d\mu \quad (t \in Q), \tag{6.1}$$

где h, μ — канонические инварианты. При этом $\varepsilon = P1 = h$.

Внешнее проявление перемешивания (при условии слабой положительности) состоит в так называемой примитивности. Это свойство, более сильное, чем неразложимость.

Представление $T \geqslant 0$ называется *примитивным*, если для любой функции $\varphi \geqslant 0$ $(\varphi \neq 0)$ существует $s \in S$ такое, что $T(s)\varphi > 0$

Теорема 6.1. *Для того чтобы представление T класса N было примитивным, необходимо и достаточно, чтобы оно было перемешивающим и слабо положительным.*

Необходимость. Если T примитивно, то оно неразложимо и по теореме 5.1 слабо положительно и эргодично. Если компакт $\tilde{E}$ содержит более одной точки, то, выбрав любую точку $t_0 \in E$, можно построить функцию $\theta \in C(\tilde{E})$ такую, что $\theta \geqslant 0$ $(\theta \neq 0)$, но $\theta(\tilde{t}_0) = 0$. Тогда для любого $A \in K$ функция $\theta(f_A^{-1}\tilde{t})$ обращается в нуль в точке $f_A\tilde{t}_0$. Полагая $\varphi = V^{-1}\hat{H}\theta \in C(Q)$, имеем: $\varphi \geqslant 0$ $(\varphi \neq 0)$, $(T(s)\varphi)(t_s) = 0$ $(s \in S)$, где t_s — прообраз в E точки $f_A\tilde{t}_0$ при $A = T(s)P$. Это противоречит определению примитивности.

Достаточность. Пусть представление T — перемешивающее и слабо положительное. Тогда в силу (6.1) $P\varphi > 0$ для любой $\varphi \geqslant 0$ $(\varphi \neq 0)$. По теореме об отщеплении граничного спектра $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, где $\varphi_1 = P\varphi$, а замыкание орбиты $\{T(s)\varphi_0\}$ содержит нуль. Поэтому найдется $s \in S$ такое, что $T(s)\varphi > 0$.

7. **Эргодические и субэргодические классы и компоненты.** Рассмотрим произвольное представление T класса N. Его *эргодическими классами* называются полные прообразы в E орбит действия α_T в $\tilde{E}$*. Так как естественное отображение $E \to \tilde{E}$ непрерывно, а орбиты компактны, то эргодические классы замкнуты в E (а при $\varepsilon > 0$ компактны, ибо в этом случае E — компакт). Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы с каждым эргодическим классом X связать некоторое представление T_X, естественно порождаемое представлением T. Проще всего было бы рассмотреть представление, определяемое действием α_T на орбите $\tilde{X} \subset \tilde{E}$. Однако хотелось бы, в отличие от этого, построить T_X в пространстве функций на самом X. Это удается сделать, анализируя еще более тонкую структуру, состоящую из *субэргодических классов* — полных прообразов в E точек множества $\tilde{E}$.

Для каждого субэргодического класса v рассмотрим банахово пространство $C_\varepsilon(v)$ функций на v, непрерывных и обладающих конечной нормой относительно ε: $\|\psi\| = \sup\limits_{t \in v} |\psi(t)| / \varepsilon(t) < \infty$.

Лемма 7.1. *Каждая функция $\psi \in C_\varepsilon(v)$ продолжается до функции $\hat{\psi} \in C(Q)$, обращающейся в нуль на множестве E_0 нулей функции ε.*

---

* Если представление эргодично, то единственным эргодическим классом является E.

Доказательство. Достаточно показать, что $\bar{v} \setminus v \subset E_0$. Тогда объединение $v \cup E_0$ будет компактным, а продолжение функции ψ нулем на E_0 будет непрерывным в силу неравенства $|\psi(t)| \leqslant \|\psi\| \varepsilon(t)$ $(t \in v)$. После этого можно взять любое непрерывное продолжение с компакта $v \cup E_0$ на весь Q.

Пусть $t_0 \in \bar{v} \setminus v$, но $\varepsilon(t_0) > 0$. Тогда $t_0 \in E_+$ и $t_0 \in \bar{v} \subset \Pi$, т. е. $t_0 \in E$. Но класс v замкнут в E, поэтому $t_0 \in v$, вопреки условию.

Замечание. Если $\psi \geqslant 0$, то можно построить и $\hat{\psi} \geqslant 0$.

Рассмотрим теперь семейство мер $\{\tau_{s,t}\}$, связанных с неотрицательными операторами $T(s)$:

$$(T(s)\varphi)(t) = \int_Q \varphi \, d\tau_{s,t} \quad (s \in S, \ t \in Q). \tag{7.1}$$

Лемма 7.2. *Имеет место включение* $\operatorname{sup} \tau_{s,t} \subset \Pi \ (t \in \Pi)$.

Доказательство. Достаточно показать, что если функция $\varphi \geqslant 0$ обращается в нуль на Π, то она обращается в нуль на $\operatorname{sup} \tau_{s,t}$ $(t \in \Pi)$. Но так как $P\varphi = 0$, то $PT(s)\varphi = 0$, и так как $T(s)\varphi \geqslant 0$, то $T(s)\varphi \,|\, \Pi = 0$, откуда в силу (7.1) $\varphi \,|\, \operatorname{sup} \tau_{s,t} = 0$ $(t \in \Pi)$.

Лемма 7.3. *Имеет место включение*

$$E_+ \cap \operatorname{sup} \tau_{s,t} \subset \Delta^{-1} f_s \Delta(t) \quad (t \in E),$$

где f_s — гомеоморфизм факторкомпакта $\tilde{E}$, соответствующий оператору $T(s)$, Δ: $E \to \tilde{E}$ — естественное отображение.

Доказательство. Пусть $z \in E_+ \cap \operatorname{sup} \tau_{s,t}$. Тогда по лемме 7.2 $z \in E$. Пусть, однако, $\tilde{z} \neq f_s^{-1} \tilde{t}$ $(\tilde{t} = \Delta(t), \ \tilde{z} = \Delta(z))$. Тогда найдется функция $\theta \in C(\tilde{E})$, такая, что $\theta \geqslant 0$, $\theta(\tilde{z}) > 0$, $\theta(f_s^{-1}\tilde{t}) = 0$. Последнее равенство записывается в виде $(\tilde{T}(s)\theta)(\tilde{t}) = 0$. Положим $\varphi = V^{-1}\theta \in B_1$. Тогда

$$\int_Q \varphi \, d\tau_{s,t} = (T(s)\varphi)(t) = (V^{-1}\tilde{T}(s)\theta)(\tilde{t}) = 0,$$

ибо изоморфизм V^{-1} действует поточечно. Следовательно, $\varphi \,|\, \operatorname{sup} \tau_{s,t} = 0$. В частности, $\varphi(z) = 0$, т. е. $\theta(\tilde{z}) = 0$ — противоречие.

Возьмем теперь $\psi \in C_\varepsilon(v)$ и продолжим в соответствии с леммой 7.1. Будем иметь

$$(T(s)\hat{\psi})(t) = \int_Q \hat{\psi} \, d\tau_{s,t} = \int_{E_+ \cap \operatorname{sup} \tau_{s,t}} \hat{\psi} \, d\tau_{s,t} \quad (t \in Q).$$

Положим $v(s) = \Delta^{-1} f_s \Delta(v)$. Если $t \in v(s)$, то по лемме 7.3 $E_+ \cap \operatorname{sup} \tau_{s,t} \subset v$. Так как, с другой стороны, $v \subset E_+$, то $E_+ \cap \operatorname{sup} \tau_{s,t} = v \cap \operatorname{sup} \tau_{s,t}$. С учетом того, что $\hat{\psi} \,|\, v = \psi$, получаем

$$(T(s)\hat{\psi})(t) = \int_v \psi \, d\tau_{s,t} \quad (t \in v(s)). \tag{7.2}$$

Итак, функция $T(s)\hat{\psi}|v(s)$ не зависит от выбора продолжающей функции $\hat{\psi}$. Она непрерывна на $v(s)$, поскольку непрерывна на всем Q. Покажем, что она принадлежит пространству $C_\varepsilon(v(s))$. Так как $\psi \in C_\varepsilon(v)$, то

$$\left|\int_v \psi\, d\tau_{s,t}\right| \leqslant \|\psi\| \int_Q \varepsilon\, d\tau_{s,t},$$

а

$$\int_Q \varepsilon\, d\tau_{s,t} = (T(s)\varepsilon)(t) = (T(s)P1)(t) =$$
$$= (PT(s)1)(t) \leqslant \|T(s)1\|\varepsilon(t) = \|T(s)\|\varepsilon(t).$$

Следовательно,

$$\left|\int_v \psi\, d\tau_{s,t}\right| \leqslant \|T(s)\|\cdot\|\psi\|\varepsilon(t). \tag{7.3}$$

Итак, для каждого субэргодического класса v и каждого $s \in S$ мы построили оператор $T_v(s): C_\varepsilon(v) \to C_\varepsilon(v(s))$ по формуле $T_v(s)\psi = T(s)\hat{\psi}|v(s)$. В силу (7.2), (7.3) $\|T_v(s)\| \leqslant \|T(s)\|$. Семейство $\{T_v(s)\}_{s\in S}$ назовем *субэргодической компонентой* представления T, отвечающей данному классу v.

Пусть теперь X — эргодический класс, $C_\varepsilon(X)$ — функциональное банахово пространство, определяемое так же как $C_\varepsilon(v)$ для субэргодического класса v. Аналогично лемме 7.1 доказывается

Лемма 7.1′. *Каждая функция $\psi \in C_\varepsilon(X)$ продолжается до непрерывной функции $\tilde{\psi} \in C(Q)$, обращающейся в нуль на множестве E_0.*

Это продолжение, очевидно, обслуживает в смысле леммы 7.1 одновременно все ограничения $\psi|v$ $(v \subset X)$ для субэргодических классов. Введем оператор $T_X(s)$ в $C_\varepsilon(X)$, полагая

$$(T_X(s)\psi)(t) = \int_{\Delta^{-1}f_s^{-1}\Delta(t)} \psi\, d\tau_{s,t} \quad (t \in X). \tag{7.4}$$

Так как равенство $\Delta^{-1}f_s^{-1}\Delta(t) = v$ эквивалентно тому, что $t \in v(s)$, то это определение согласовано с определением субэргодических компонент и, следовательно, $(T_X(s)\psi)(t) = (T(s)\tilde{\psi})(t)$ $(t \in X)$. Тем самым, действительно, $T_X(s)\psi \in C_\varepsilon(X)$ и $\|T_X(s)\| \leqslant \|T(s)\|$.

Представление T_X полугруппы S в пространстве $C_\varepsilon(X)$ называется *эргодической компонентой* представления T, отвечающей эргодическому классу X.

Естественно ожидать, что T_X окажется эргодическим, однако нужно помнить, что $C_\varepsilon(X)$ не является, вообще говоря, пространством непрерывных функций на компакте из-за возможного наличия нулей у функции $\varepsilon|X$. Тем не менее, T_X — неотрицательное п. п. представление, обладающее инвариантной функцией $h_X = h|X$ (где h, как обычно,— каноническая инвариантная функ-

ция* представления T). Так как $h \mid E_+ > 0$, то и подавно $h_X > 0$. Ситуацию можно считать вполне удовлетворительной, поскольку имеет место

Теорема 7.1. *Подпространства инвариантных функций и инвариантных мер представления T_X одномерны.*

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для функций. Если $\psi \in C_\varepsilon(X)$ инвариантна для T_X, то $\psi(t) = (T \times \times (s)\tilde{\psi})(t)$ $(t \in X)$ при всех $s \in S$. Но тогда $\psi(t) = (P\tilde{\psi})(t)$ $(t \in X)$. Функция $P\tilde{\psi}$ постоянна на субэргодических классах, а, значит, такова же и ψ. Но тогда в силу (7.4)

$$\psi(t) = \int_v \psi \, d\tau_{s,t} = (\psi \mid v) \int_v d\tau_{s,t} \ (t \in v(s)).$$

Точно так же

$$h(t) = (h \mid v) \int_v d\tau_{s,t} \ \ (t \in v(s)).$$

Следовательно, (ψ/h) $(t) = a(v)$ $(t \in v(s))$, где $a(v)$ — соответствующая константа. Итак, $\psi/h = \mathrm{const}$ на объединении классов $v(s)$ $(s \in S)$. Но это множество плотно в X ввиду транзитивности действия группы K в ее орбите $\tilde{X}$.

Следствие. *Если $\varepsilon > 0$, то для каждого эргодического класса X представление T_X — эргодическое.*

8. **Абелева ситуация. Неотрицательные п. п. операторы.** Напомним, что в абелевой ситуации представление достаточно считать а. п. п. При этом наиболее интересен эргодический случай. Существенным дополнением к теореме 4.1 здесь является

Теорема 8.1. *Если T — эргодическое (в частности, неразложимое) представление абелевой полугруппы S, то компакт $\tilde{E}$ гомеоморфен ядру Сушкевича K, а действие α_T при этом эквивалентно регулярному действию группы K на себе**.*

Доказательство. В абелевом транзитивном случае гомеоморфизмы $f_A \neq \mathrm{id}\,(A \in K)$ не имеют неподвижных точек, так как множество неподвижных точек любого из них инвариантно для всех. Выбирая любую точку $\tilde{t}_0 \in \tilde{E}$, получаем гомеоморфизм $K \to \tilde{E}$ $(A \to f_A^{-1}\tilde{t}_0)$. При соответствующем отождествлении $\tilde{E}$ с K действие α_T переходит в регулярное.

Следствие. *Группа унитарных весов эргодического (в частности, неразложимого) представления абелевой полугруппы совпадает с группой K^* характеров ядра Сушкевича.*

---

* Можно положить $\tilde{h}_X = h$, ибо $h \mid E_0 = 0$. Важно заметить, что $h_X \in C_\varepsilon(X)$. Вообще, если $\varphi \in B_1$, то $\varphi \mid X \in C_\varepsilon(X)$.

** Напомним, что *регулярным действием группы на себе называется действие сдвигами.*

Рассмотрим теперь вопрос о сходимости представления, т. е. о сходимости всех орбит.

Теорема 8.2. *Для того чтобы эргодическое представление T было сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы оно было перемешивающим. При выполнении этого условия*

$$\lim_{s\to\infty} T(s)\varphi = \Big(\int_Q \varphi\, d\mu\Big) h. \tag{8.1}$$

Это непосредственно вытекает из теоремы 2.4 работы [2], замечания к ней и формулы (6.1) настоящей статьи.

Следствие. *Если представление T класса N примитивно, то оно сходится к пределу, определяемому формулой* (8.1).

Теперь мы резюмируем развитую теорию в приложении к неотрицательному оператору A в $C(Q)$. При этом никаких дополнительных доказательств не понадобится, поскольку дело сведется к представлению $n\to A^n$ $(n\in Z_+)$. Соответственно вводятся следующие определения.

Оператор $A\geqslant 0$ называется *неразложимым*, если для любой точки $t\in Q$ и любой функции $\varphi\geqslant 0$ $(\varphi\neq 0)$ существует показатель n такой, что $(A^n\varphi)(t)>0$. Оператор A называется *примитивным*, если для любой функции $\varphi\geqslant 0$ $(\varphi\neq 0)$ существует показатель n такой, что $A^n\varphi>0$.

Теорема 8.3. *Пусть A — неотрицательный п. п. оператор в $C(Q)$ и пусть его спектральный радиус $r(A)=1$*. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *ω — предельное (в сильной топологии) множество K для полугруппы $\{A^n\}_1^\infty$ является компактной абелевой группой (ядром Сушкевича оператора A). Единицей этой группы служит некоторый проектор $P\geqslant 0$, $P\neq 0$.*

2. *На внутреннем подпространстве $B_0=\operatorname{Ker} P$ последовательность $\{A^n\}_1^\infty$ сильно стремится к нулю.*

3. *Граничное подпространство $B_1=\operatorname{Im} P$ порядково изоморфно $C(\tilde E)$, где $\tilde E$ — компакт, являющийся факторпространством топологического пространства $E=E_+\cap\Pi$ $(E_+=\{t\mid \varepsilon(t)>0\})$, $\varepsilon=P1$, $\Pi=\operatorname{supp} P$. Изоморфизм осуществляется композицией сужения функций на E, деления на ε и переноса на $\tilde E$.*

4. *Оператор A на граничном подпространстве положительно эквивалентен стохастическому оператору, порождаемому некоторым гомеоморфизмом компакта $\tilde E$.*

5. *Число $\lambda=1$ является собственным значением для операторов A и A^*, ему соответствуют инвариантная функция $h\geqslant 0$ и инвариантная мера μ такие, что $\mu(h)=1$* (обобщение теоремы Перрона—Фробениуса).

---

* Для любого п. п. оператора спектральный радиус не превосходит единицы.

6. *Если оператор A неразложим, то a) h, μ единственны с точностью до положительных множителей, $h>0$, $\mu>0$; b) $E=Q$, $\varepsilon>0$, фактор-компакт $\tilde{Q}$ гомеоморфен ядру Сушкевича K, сужение оператора A на граничное подпространство подобно оператору, порожденному в $C(K)$ топологически транзитивным сдвигом* на компактной группе K; c) граничный спектр оператора A — группа, изоморфная группе K^* характеров ядра Сушкевича; d) собственные подпространства, отвечающие граничному спектру, одномерны; e) модули всех собственных функций пропорциональны инвариантной функции h; f) для каждого граничного собственного значения λ оператор λA подобен A и, таким образом, весь спектр оператора A инвариантен относительно умножения на λ* (теорема о повороте).

7. *Следующие утверждения для неразложимого оператора A эквивалентны: a) A примитивен; b) A не имеет собственных значений $\lambda\neq 1$ на единичной окружности; c) последовательность $\{A^n\}_1^\infty$ сильно сходится. При этом*

$$\lim_{n\to\infty} A^n\varphi=\Big(\int_Q \varphi\, d\mu\Big)h. \tag{8.2}$$

Основные спектральные свойства неразложимых операторов (включая обобщение на этот случай теоремы Перрона — Фробениуса, но исключая теорему о повороте) были получены М. Розенблаттом [5] и Б. Джемисоном совместно с Р. Сайном [6]. В работах [5]—[7] были введены также эргодические и субэргодические классы (но не компоненты!) для стохастического оператора. Наши конструкции в этом случае приводят к близким, но не точно тем же результатам. Сходимость степеней неразложимого стохастического оператора изучалась в [8].

9. **Рюэлевский вариант теоремы Перрона — Фробениуса.** В эргодической теории некоторых классов динамических систем ключевую роль играет «рюэлевский вариант» теоремы Перрона — Фробениуса (см., например, [9, 10]). Мы покажем, что он укладывается в рамки построенной выше теории. Пусть Q — метрический компакт с метрикой d, $B(x,\ \varepsilon)=\{y\in Q\,|\,d(x,\ y)<\varepsilon\}$. Непрерывное преобразование R компакта Q называется *растягивающим*, если существуют такие $\eta_0>0$, $a>1$, что для всех $x\in Q$: a) $R^{-1}B(x,\ \eta_0)=\bigcup_{1\leq i\leq e(x)} U_i$, где U_i — такие попарно не пересекающиеся множества, что $R|U_i$ — гомеоморфизм на $B(x,\ \eta_0)$; b) если $y_1,\ y_2\in U_i$, то $d(Ry_1,\ Ry_2)\geq ad(y_1,\ y_2)$.

Если $Rx'=x$ и $x'\in U_i$, то через $R^{-1}_{x,\,x'}$ мы будем обозначать отображение $B(x,\ \eta_0)\to U_i$, обратное к $R|U_i$ («ветвь многозначного отображения R^{-1}»). Преобразование R^n является также рас-

* Т. е. сдвигом, орбиты которого плотны.

тягивающим с параметрами η_0, a^n. Ветви многозначного отображения R^{-n} мы будем обозначать через $R^{-n}_{x,x'}$.

Преобразование R называется *перемешивающим*, если для любых открытых множеств U и V существует такое ν, что $R^{-n}U \cap V = \varnothing$ $(n \geqslant \nu)$. Для растягивающего R это эквивалентно тому, что для любого $\eta > 0$ найдется такое ν, что для всех $x \in Q$ множества $R^{-\nu}x$ η-плотны в Q.

Далее, пусть $\gamma \in C^\alpha(Q)$ — гельдеровская функция с показателем $\alpha > 0$, т. е. $|\gamma(x) - \gamma(y)| \leqslant Ld(x, y)^\alpha$ $(L = \text{const})$. Оператор Рюэля $\tilde{R}: C(Q) \to C(Q)$, ассоциированный с преобразованием R, определяется следующим образом:

$$(\tilde{R}\varphi)(x) = \sum_{y \in R^{-1}x} e^{\gamma(y)} \varphi(y).$$

Очевидно, $\tilde{R} \geqslant 0$ и

$$(\tilde{R}^n\varphi)(x) = \sum_{y \in R^{-n}x} e^{\gamma_n(y)} \varphi(y),$$

где

$$\gamma_n(y) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(R^k y).$$

Через r обозначим спектральный радиус оператора $\tilde{R}$.

Предложение 9.1. *Если $R: Q \to Q$ — растягивающее перемешивающее преобразование, $\gamma \in C^\alpha(Q)$, то $A = r^{-1}\tilde{R}$ — п. п. примитивный оператор.*

Для доказательства нам понадобятся три леммы.

Лемма 9.1. *Существует такое $M = M(a; L, \alpha)$, что если $d(x, y) < \eta_0$, $x' = R^{-n}x$, $y' = R^{-n}_{x,x'}y$, то*

$$|\gamma_n(x') - \gamma_n(y')| \leqslant Md(x, y)^\alpha \leqslant D \quad (\equiv M\eta_0^\alpha).$$

Доказательство. Имеем

$$|\gamma_n(x') - \gamma_n(y')| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |\gamma(R^k x') - \gamma(R^k y')| \leqslant$$

$$\leqslant L \sum_{k=0}^{n-1} d(R^k x', R^k y')^\alpha \leqslant Ld(x, y)^\alpha \sum_{k=0}^{n-1} a^{-(n-k)\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{L}{a^\alpha - 1} d(x, y)^\alpha.$$

Лемма 9.2. *Существует такое $\rho > 0$, что для всех $x, y \in Q$*

$$(\tilde{R}^n 1)(x) \leqslant \rho (\tilde{R}^n 1)(y) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Доказательство. Предположим сначала, что $d(x, y) < \eta_0$. Пусть $R^{-n}x = \{x_i\}$, $R^{-n}y = \{y_i\}$, где $y_i = R^{-n}_{x, x_i}y$. Тогда по лемме 9.1 $e^{\gamma_n(x_i)} \leqslant e^D e^{\gamma_n(y_i)}$. Суммируя, получаем (9.1) с $\rho = e^D$.

Далее, так как R — перемешивающее преобразование, то найдется такое ν, что для всех y множество $R^{-\nu}y$ η_0-плотно в Q. Пусть $n \geqslant \nu$ и z — точка максимума $\widetilde{R}^{n-\nu}1$. Тогда

$$(\widetilde{R}^{n-\nu}1)(z) = \|\widetilde{R}^{n-\nu}1\| \geqslant \|\widetilde{R}\|^{-\nu}(\widetilde{R}^{n}1)(x).$$

Найдется такое $y_0 \in R^{-\nu}y$, что $d(y_0, z) < \eta_0$. Полагая $c = \inf e^{\gamma_\nu} > 0$, получаем

$$(\widetilde{R}^{n}1)(y) = \sum_{t \in R^{-\nu}y} e^{\gamma_\nu(t)}(\widetilde{R}^{n-\nu}1)(t) \geqslant c(\widetilde{R}^{n-\nu}1)(y_0) \geqslant$$
$$\geqslant ce^{-D}(\widetilde{R}^{n-\nu}1)(z) \geqslant ce^{-D}\|\widetilde{R}\|^{-\nu}(\widetilde{R}^{n}1)(x).$$

Лемма 9.3. *Имеет место оценка* $\|\widetilde{R}^n\| \leqslant \rho r^n$.

Доказательство. Возьмем в качестве x точку максимума функции $\widetilde{R}^n1$, а в качестве y — ее точку минимума. Получим

$$(\widetilde{R}^{n}1)(x) = \|\widetilde{R}^{n}\|, \quad (\widetilde{R}^{n}1)(y) \leqslant r^n.$$

Остается применить предыдущую лемму.

Доказательство предложения 9.1. Пусть $\varphi \in C(Q)$. Зафиксируем $\delta > 0$. Найдем такое $\eta < \eta_0$, что $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \delta$ при $d(x, y) < \eta$. Имеем

$$(\widetilde{R}^{n}\varphi)(x) - (\widetilde{R}^{n}\varphi)(y) = \sum_i e^{\gamma_n(x_i)}\{\varphi(x_i) - \varphi(y_i) +$$
$$+ \varphi(y_i)(1 - e^{\gamma_n(y_i) - \gamma_n(x_i)})\}.$$

Но $d(x_i, y_i) < \eta$, откуда следует, что $|\varphi(x_i) - \varphi(y_i)| < \delta$. Кроме того, из леммы 9.1 $|1 - e^{\gamma_n(y_i) - \gamma_n(x_i)}| \leqslant e^D M d(x, y)^\alpha$. Таким образом,

$$|(\widetilde{R}^{n}\varphi)(x) - (\widetilde{R}^{n}\varphi)(y)| \leqslant (\varepsilon + \|\varphi\| e^D M d(x, y)^\alpha) \sum_i e^{\gamma_n(x_i)}.$$

Но $\sum_i e^{\gamma_n(x_i)} = (\hat{R}^n 1)(x) \leqslant \rho r^n$ по лемме 9.3. Отсюда следует, что ограниченная последовательность $A^n\varphi = r^{-n}\widetilde{R}^n\varphi$ равностепенно непрерывна, что и доказывает п. п. оператора A.

Пусть теперь $\varphi \geqslant 0$ и $\varphi \neq 0$. Тогда найдется шар $B(z, \varepsilon)$, на котором функция φ положительна. Так как R перемешивает, то существует такое n, что $R^{-n}x \cap B(z, \varepsilon) \neq \varnothing$ $(x \in Q)$. Отсюда следует, что $A^n\varphi > 0$, что доказывает примитивность оператора A.

Из теоремы 8.3 и предложения 9.1 вытекает

Теорема 9.1. («рюэлевский вариант» теоремы Перрона—Фробениуса. *Спектральный радиус* r *является простым собственным значением операторов* $\widetilde{R}$ *и* $\widetilde{R}^*$. *Ему отвечает положительная собственная для* $\widetilde{R}$ *функция* h *и положи-*

тельная собственная для $\tilde{R}^*$ *мера* μ, $\int\limits_Q h d\mu = 1$. *Равномерно на* Q *имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} r^{-n}\tilde{R}^n\varphi = \Big(\int\limits_Q \varphi d\mu\Big) h \quad (\varphi \in C(Q)).$$

10. **Конечномерный случай** является полезной иллюстрацией развитой выше теории. Пусть $A = (a_{ik})_{i,\,k=1}^m$ — неотрицательная матрица (т. е. все $a_{ik} \geqslant 0$). Ее можно рассматривать как неотрицательный оператор в пространстве $C(Q)$ на компакте $Q = \{1, \ldots, m\}$. Почти периодичность оператора A в данном случае эквивалентна ограниченности степеней $A^n = (a_{ik}^{(n)})$ $(n > 0)$.

Неразложимость матрицы A означает, что для любой пары i, k найдется такое n, что $a_{ik}^{(n)} > 0$. Примитивность означает, что для любого k найдется такое n, что $a_{ik}^{(n)} > 0$ для всех i *. Эти понятия естественно и наглядно трактуются в терминах *графа* Γ_A *матрицы* A, определяемого следующим образом: его вершинами служат $1, \ldots, m$, а стрелки $i \to k$ соответствуют в точности тем парам (i, k), для которых $a_{ik} \neq 0$. Неразложимость матрицы A эквивалентна сильной связности графа Γ_A, т. е. существованию пути из любой вершины в любую. Примитивность эквивалентна существованию такого n, что из любой вершины в любую ведет путь длиной n. Любую матрицу $A \geqslant 0$ можно путем перестановки базисных векторов привести к блочному нижнетреугольному виду с неразложимыми (или одномерными нулевыми) диагональными блоками. Будем считать, что это уже осуществлено; диагональные блоки занумеруем сверху вниз: $A_1, \ldots, A_s$. Соответственно Q разбивается на классы $X_1, \ldots, X_s$. Комбинаторно это разбиение описывается следующим образом. Вершина графа Γ_A называется *возвратной*, если через нее проходит цикл, т. е. замкнутый путь. Множество возвратных вершин совпадает с объединением тех X_j, для которых $A_j \neq 0$. Эти классы называются *возвратными*. Две возвратные вершины i, k $(i \neq k)$ принадлежат одному классу, если и только если существует цикл, через них проходящий **.

Будем далее считать, что $r(A) = 1$, т. е. что граничный спектр оператора A непуст. Оказывается, эргодические классы — это в точности те возвратные классы X_j, для которых $r(A_j) = 1$, а соответствующие операторы A_j являются эргодическими компонентами оператора A.

Каждый эргодический класс X_j распадается на ν_j субэргодических классов $X_{j1}, \ldots, X_{j\nu_j}$ таким образом, что в графе мат-

---

* Легко видеть, что n можно выбрать не зависящим от k и тогда все $a_{ik}^{(n)} > 0$, т. е. $A^n > 0$.

** Отметим, что если $j < l$, то не существует путей, начинающихся в классе X_j и кончающихся в X_l.

рицы A_j все стрелки, исходящие из вершин класса X_{jl} ведут в вершины класса $X_{j,\,l+1}$ $(X_{j,\,\nu_j+1} \equiv X_{j1})$.

Граничный спектр эргодической компоненты A_j есть группа корней из единицы некоторой степени ν_j. Ядро Сушкевича является циклической группой порядка, равного наименьшему общему кратному чисел ν_j.

Список литературы: 1. *Любич М. Ю., Любич Ю. И.* Спектральная теория почти периодических представлений полугрупп.— Укр. мат. журн., 1984, **36**, № 5, с. 632—636. 2. *Любич М. Ю., Любич Ю. И.* Отщепление граничного спектра для почти периодических операторов и представлений полугрупп.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1986, вып. **45**, с. 47—55. 3. *Любич М. Ю., Любич Ю. И.* Общий вид неотрицательных проекторов в пространстве непрерывных функций на компакте. — Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1985, вып. 43, с. 87—93. 4. *Любич Ю. И.* Введение в теорию банаховых представлений групп. — Х.: Вища шк., 1985.—142 с. 5. *Rosenblatt M.* Equicontinuous Markov operators.— Теория вероятностей и ее применения, 1964, **9**, № 2, с. 205—222. 6. *Jamison B., Sine R.* Irreducible almost periodic Markov operators. — Journ. Math. Mech., 1969, **18**, p. 1043—1047. 7. *Jamison B.* Ergodic decomposition induced by certain Markov operators. — Trans. Amer. Math. Soc., 1965, **117**, № 5, p. 451—468. 8. *Jamison B.* Asymptotic behavior of succesive iterates of continuous functions under a Markov operator.— Journ. Math. Anal. Appl., 1964, **9**, p. 203—214. 9. *Walters P.* Invariant measures and equilibrium states far some mappings which expand distances.— Trans. Amer. Math. Soc., 1978, **236**, p. 121—153. 10. *Синай Я. Г.* Гиббсовские меры в эргодической теории.— Успехи мат. наук, 1972, **27**, вып. 4, с. 21—64.

Поступила в редколлегию 11.06.84.

УДК 517.9

А. А. МАКАРОВ

ОБЩАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В БЕСКОНЕЧНОМ СЛОЕ ДЛЯ СИСТЕМ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМИ СИМВОЛАМИ

Рассматривается следующая краевая задача:

$$\frac{\partial u(x,\,t)}{\partial t} = A(t,\,D_x)\,u(x,\,t) + \lambda R(x,\,t,\,D_x)\,u(x,\,t) + f(x,\,t); \quad (1)$$

$$\int_0^T dM(t)\,B(t,\,D_x)\,u(x,\,t) = 0; \; x \in R^n, \; t \in [0;\,T]. \quad (2)$$

Здесь псевдодифференциальные операторы $A(t,\,D_x)$ и $B(t,\,D_x)$ при каждом фиксированном t имеют символы из пространства $C_{-\infty}^{\infty}$, причем непрерывно зависящие от t, а символ оператора $R(x,\,t,\,D_x)$ либо принадлежит $\forall t \in [0;\,T]$ пространству бесконечно дифференцируемых функций со степенной оценкой по ζ и стабилизирующихся при $x \to \infty$, либо принадлежит классу S^m (см. [1]), т. е. удовлетворяет оценкам

$$\forall \alpha,\ \beta\colon\ |D_\zeta^\alpha D_x^\beta R_{ij}(x,\,t,\,\zeta)| < C_{\alpha\beta}(1 + |\zeta|)^{m-|\alpha|}.$$

Координаты вектор-функций $u(x, t)$ и $f(x, t)$ принадлежат пространствам

$$C^r([0; T], H^s) = \{u(x, t) \in H^s;\ \forall t \in [0; T]:$$
$$|||u||| = \sup_{t \in [0; T],\ \gamma < r} \| u_t^{(\gamma)}(x, t) \|^{(s)} < \infty\}.$$

Задача (1) — (2) называется корректно разрешимой из пространства $C^{r_1}([0; T]; H^{s_1})$ в пространство $C^{r_2}([0; T]; H^{s_2})$, если $\forall f(x, t) \in C^{r_1}([0; T]; H^{s_1})$ $\exists !\ u(x, t) \in C^{r_2}([0; T]; H^{s_2})$, являющаяся решением данной задачи, причем $|||u(x, t)|||_{(2)} \leqslant C|||f(x, t)|||_{(1)}$.

Важную роль играет матрица-функция $G(\zeta, t, \tau)$, являющаяся функцией Грина следующей задачи:

$$\frac{\partial v(\zeta, t)}{\partial t} = A(t, \zeta) v(\zeta, t) + g(\zeta, t); \quad \int_0^T dM(t) B(t, \zeta) v(\zeta, t) = 0,$$

где $A(t, \zeta)$ и $B(t, \zeta)$ — символы соответствующих операторов.

Если матрица $A(t, \zeta)$ не зависит от t, то для $G(\zeta, t, \tau)$ существует явная формула:

$$G(\zeta, t, \tau) = \begin{cases} \exp tA(\zeta) \cdot G^{-1}(\zeta) \int_T^\tau dM(\eta) B(\eta, \zeta) \exp(\eta - t) A(\zeta) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 < t < \tau \\ \exp tA(\zeta) \cdot G^{-1}(\zeta) \int_0^\tau dM(\eta) B(\eta, \zeta) \exp(\eta - t) A(\zeta) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \tau < t < T, \end{cases}$$

где $G(\zeta) = \int_0^T dM(t) B(t, \zeta) \exp tA(\zeta)$. Из этой формулы видно, что функция $G(\zeta, t, \tau)$ определена при всех значениях ζ, где $\Delta(\zeta) \equiv \det G(\zeta) \neq 0$.

Справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть символы ПДО удовлетворяют приведенным выше условиям, а $G(\zeta, t, \tau) \in C^\infty_{-\infty}$ $\forall t, \tau \in [0; T]$ и, кроме того, выполнено условие* (α):

$$\int_0^T \sup_\xi [(1 + |\zeta|^2)^{\frac{m}{2}} |G(\zeta, t, \tau)|] d\tau \leqslant C \ (|G| = \max_{i, j} |G_{ij}|).$$

Тогда при $|R(x, t, \zeta)| < C_1(1 + |\zeta|)^m$ задача (1) — (2) *корректно разрешима из $C^0([0; T]; H^s)$ в $C^1([0; T]; H^{s-q})$ при всех s, некотором q и достаточно малых λ.*

Теорема 2. *Если выполнены все условия теоремы 1, а также следующее условие* (β):

$$\int_0^T \sup_{\zeta} (1+|\zeta|^2)^{\frac{m}{2}} |G(\zeta, t_1, \tau) - G(\zeta, t_2, \tau)|\, d\tau < \varepsilon$$

при $|t_1 - t_2| < \delta_\varepsilon$, *то при* $|R(x, t, \zeta)| < C(1+|\zeta|)^{m-\delta}$ *и* $\lim\limits_{x\to\infty} |R(x, t, \zeta)| = 0$

задача (1) — (2) корректно разрешима в указанных пространствах при всех λ, *за исключением не более чем счетного множества* $\{\lambda_i\}$, *не имеющего конечных предельных точек.*

Доказательство теоремы 1. Покажем разрешимость данной задачи. Решение будем искать в виде

$$u(x, t) = \int_0^T G(D_x, t, \tau) v(x, \tau)\, d\tau \quad (v(x, t) \in C^0([0; T], H^{s_1})).$$

Подставив это выражение в (1), получим

$$v(x, t) = \int_0^T \left[\frac{dG}{dt} - A \cdot G\right] v\, d\tau =$$

$$= \lambda R(x, t, D_x) \int_0^T G(D_x, t, \tau) v(x, \tau)\, d\tau + f(x, t).$$

Или в операторном виде

$$v = \lambda \cdot Tv + f, \tag{3}$$

где $Tv \equiv R(x, t, D_x) \int_0^T G(D_x, t, \tau) v(x, \tau)\, d\tau$.

Покажем, что оператор T непрерывно действует в $C^0([0; T], H^s)$. Запишем этот оператор в таком виде:

$$Tv = R \cdot (1+D_x^2)^{-\frac{m}{2}} \int_0^T (1+D_x^2)^{\frac{m}{2}} G \cdot v\, d\tau = R_1 \int_0^T G_1 \cdot v\, d\tau$$

и покажем, что он непрерывен в $C^0([0; T]; L_2)$.

Зафиксируем t и рассмотрим норму образа оператора в L_2:

$$\left\| \int_0^T (1+D_x^2)^{\frac{m}{2}} G(D_x, t, \tau) v(x, \tau)\, d\tau \right\|_{L_2} = \left\| \int_0^T (1+\zeta^2)^{\frac{m}{2}} \times\right.$$

$$\left.\times G(\zeta, t, \tau) \tilde{v}(\zeta, \tau)\, d\tau \right\|_{L_2} \leqslant \int_0^T \| (1+\zeta^2)^{\frac{m}{2}} G(\zeta, t, \tau) \tilde{v}(\zeta, \tau) \|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T \sup_{\zeta} (1+\zeta^2)^{\frac{m}{2}} |G(\zeta, t, \tau)| \cdot \|\tilde{v}(\zeta, \tau)\|\, d\tau \leqslant \sup_{\tau} \|\tilde{v}(\zeta, \tau)\| \times$$

$$\times \int_0^T \sup_{\zeta} (1+\zeta^2)^{\frac{m}{2}} |G(\zeta, t, \tau)|\, d\tau \leqslant M \||v\||.$$

Здесь мы использовали равенство Парсеваля и то, что норма оператора умножения в L_2 равна $\sup\limits_{\zeta}(1+\zeta^2)^{\frac{m}{2}}|G(\zeta, t, \tau)|$. Взяв слева sup по t, получим $|||T_1 v||| \leq C_0 |||v|||$ при $s=0$. Но учитывая коммутацию оператора $T_1 = \int\limits_0^T (1+D_x^2)^{\frac{m}{2}} G\, d\tau$ с $(1+D_x^2)^{\frac{s}{2}}$, получим непрерывность этого оператора в пространстве $C^0([0; T], H^s)$.

Так как оператор $R\cdot(1+D_x^2)^{-\frac{m}{2}} = R_1(x, t, D_x)$ имеет символ, ограниченный по ζ и стабилизирующийся по x (или принадлежащий классу S^0), то при фиксированном t он непрерывен в H^s (см. [2] или [1]), а значит, и в $C^0([0; T]; H^s)$.

Таким образом, оператор T непрерывен в $C^0([0; T[; H^s)$ и при достаточно малых λ решение уравнения (3) дается рядом Неймана

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda T)^k f.$$

Тогда $u(x, t) = \int\limits_0^T G(D_x, t, \tau) v(x, \tau)\, d\tau$ является решением задачи (1) — (2) и принадлежит пространству $C^1([0; T], H^{s-q})$.

Докажем единственность решения. Пусть $u_0(x, t)$ — решение однородной краевой задачи. Тогда из результатов диссертации автора следует, что эта функция удовлетворяет такому уравнению:

$$u_0(x, t) = \lambda \int\limits_0^T G(D_x, t, \tau) R(x, \tau, D_x)\, u_0(x, \tau)\, d\tau. \qquad (4)$$

Но оператор, стоящий в правой части уравнения, является суперпозицией операторов $T_1 = \int\limits_0^T G(D_x, t, \tau)(1+D_x^2)^{\frac{m}{2}}\, d\tau$ и $(1+ D^2)^{-\frac{m}{2}} R$. Непрерывность оператора T_1 мы уже доказали раньше, а непрерывность второго оператора следует из [2] и [1], так как символ этого оператора ограничен. Так как спектр ограниченного оператора ограничен, то при достаточно малых λ $u_0(x, t) \equiv 0$.

Непрерывная зависимость следует из вида разрешающего оператора.

Доказательство теоремы 2. Покажем, что оператор T компактен в $C^0([0; T]; H^s)$. Для этого докажем равностепенную непрерывность семейства $\{Tu_\alpha\}_{\alpha\in A}$ при условии $|||u_\alpha||| < M$

$$\|Tu_\alpha(x, t_1) - Tu_\alpha(x, t_2)\|^{(s)} = \|R_1(t_1, x, D_x)\int\limits_0^T G_1(D_x, t_1, \tau) \times$$

$$\times u_\alpha(x, \tau)\,d\tau - R_1(t_2, x, D_x)\int_0^T G_1(D_x, t_2, \tau)\,u_\alpha(x, \tau)\,d\tau\,\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| R_1(t_1, x, D_x)\int_0^T \Delta G\cdot u_\alpha\,d\tau\right\| + \left\|\Delta R_1\int_0^T G_1(D_x, t_2, \tau)\times\right.$$

$$\times u_\alpha(x, \tau)\,d\tau\,\| \leqslant \varepsilon\cdot C_2M + \varepsilon\cdot C_1M = \varepsilon C_3 \text{ при } |t_1 - t_2| < \delta_\varepsilon.$$

Здесь мы использовали условие (β) и непрерывную зависимость $R(t, x, D_x)$ от t.

Докажем теперь существование конечной ε-сети для множества $\{Tu_\alpha\}_{\alpha\in A}$. По $\varepsilon>0$ выберем $\delta>0$ так, чтобы $\|Tu_\alpha(x, t_1) - Tu_\alpha(x, t_2)\|^{(s)} < \frac{\varepsilon}{3}$ при $|t_1-t_2|<\delta$ и возьмем $\{t_k\}_{k=1}^N$ так, чтобы расстояние между соседними не превосходило δ. Так как $\{Tu_\alpha(x, t_k)\}_{\alpha\in A}$ компактно в H^s (R_1 — компактен, а $\int_0^T G_1\,d\tau$ — непрерывен в H^s), то существует конечная ε-сеть в пространстве $H^s\otimes\ldots\otimes H^s$ такая, что $\forall\alpha$, $\exists\alpha_j: \|Tu_\alpha(x, t_k) - Tu_{\alpha_j}(x, t_k)\| < \frac{\varepsilon}{3}$: Тогда $\forall\alpha$, $\forall t$, $\exists\alpha_j$, t_k: $\|Tu_\alpha(x, t) - Tu_{\alpha_j}(x, t)\|^s \leqslant \|Tu_\alpha\times\times(x, t) - Tu_\alpha(x, t_k)\| + \|Tu_\alpha(x, t_k) - Tu_{\alpha_j}(x, t_k)\| + \|Tu_{\alpha_j}(x, t_k) - Tu_{\alpha_j}(x, t)\| < \varepsilon$, т. е. оператор T компактен в $C^0([0; T]; H^s)$. Отсюда следует разрешимость уравнения (3) при почти всех λ.

Аналогично доказывается компактность оператора, стоящего в правой части уравнения (4), и так как спектр его также счетный, то при почти всех λ уравнение (4) имеет только тривиальное решение, что и доказывает единственность решения исходной задачи. Теорема доказана.

Приведем примеры корректных задач.

1. $$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a\frac{\partial^{2k}u(x, t)}{\partial x^{2k}} + \lambda R(t, x, D_x)\,u(x, t) + f(x, t),$$

$$cu(x, 0) + bu(x, T) = 0 \quad (x\in R;\ a\in R;\ c,\ b>0).$$

Здесь

$$G(\zeta, t, \tau) = \begin{cases} \dfrac{-b\exp a(T-\tau+t)(-\zeta^2)^k}{c+b\exp aT(-\zeta^2)^k} & t<\tau, \\[2ex] \dfrac{c\exp a(t-\tau)(-\zeta^2)^k}{c+b\exp aT(-\zeta^2)^k} & t>\tau. \end{cases}$$

Так как $\int_0^T \sup_\zeta |G|(1+\zeta^2)^{k_1} < C\ \forall k_1<k$, то согласно теореме 1 при $|R(t, x, \zeta)| < M(1+\zeta^2)^{k_1}$ и достаточно малых λ эта задача корректно разрешима из $C^0([0; T]; H^s)$ в $C_1([0; T]; H^{s-k})$.

Можно также показать, что выполнено условие (β), а значит, можно применить и теорему 2.

$$2.\ \frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2} + \lambda R(t,\ x,\ D_x) + f(x,\ t),$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(x,\ t)\,dt = 0.$$

Здесь

$$G(\zeta,\ t,\ \tau) = \begin{cases} \dfrac{T - T\exp(\tau - T)\zeta^2}{\exp T\zeta^2 - 1} e^{(T-t)\varsigma^2} & t < \tau, \\ \dfrac{T\exp T\zeta^2 - T\exp(T+\tau)\zeta^2}{\exp T\zeta^2 - 1} e^{-t\varsigma^2} & t > \tau \end{cases}$$

и $\int\limits_0^T \sup|G|\,d\tau < C$. Поэтому данная задача корректно разрешима при $|R(t,\ x,\ \zeta)| < C_1$ при достаточно малых λ из пространства $C^0([0;\ T];\ H^s)$ в $C^0([0;\ T];\ H^{s-2})$. Здесь также можно применить теорему 2.

3. Задача Коши для параболических уравнений удовлетворяет условиям теоремы 1, если порядок $R(t,\ x,\ \zeta)$ меньше порядка главной части, так как $G(\zeta,\ t,\ \tau) = e^{(\tau-t)\varsigma^{2k}}$ и $\int\limits_0^T \sup\limits_{\varsigma}|G|(1 + \zeta^2)^{k-\varepsilon}\,d\tau < C$.

Аналогичные результаты можно получить в пространствах экспоненциально растущих функций $H^s_{[\gamma',\ \gamma'']}$, если потребовать выполнения аналогичных оценок в слое $\gamma' < \operatorname{Im}\zeta < \gamma''$.

Список литературы: 1. *Грушин В. В.* Псевдодифференциальные операторы в R^n с ограниченными символами.— Функцион. анализ и его прил., 1970, вып. 3, с. 37—50. 2. *Хермандер Л.* Псевдодифференциальные операторы и гипоэллиптические уравнения.— В кн.: Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1967, с. 297—367.

Поступила в редколлегию 24.12.84.

УДК 513.88

М. И. ОСТРОВСКИЙ

ОБЛАСТИ СУММ УСЛОВНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Ряд $\sum x_k \left(= \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k\right)$ в вещественном банаховом пространстве X будем называть сходящимся, если он сходится в сильной топологии. Сходящийся ряд называется условно сходящимся, если при некоторой перестановке его членов получается расходящийся

ряд. Областью сумм $\sigma\left(\sum x_k\right)$ условно сходящегося ряда называется множество сумм всех его сходящихся перестановок. Известная теорема Римана утверждает, что область сумм условно сходящегося ряда в $\boldsymbol{R}$ совпадает с $\boldsymbol{R}$. Описание областей сумм условно сходящихся рядов в $\boldsymbol{R}^n$ дает следующая теорема, доказанная Леви для $n=2$, а Штейницем — в общем случае.

Теорема А. (Леви—Штейниц). *Область сумм условно сходящегося ряда в $\boldsymbol{R}^n$ — смещенное подпространство (размерности от 1 до n).*

Пусть $\sum x_k$ — условно сходящийся ряд в X. Элемент $x^* \in X^*$ называется функционалом абсолютной сходимости [1], если сходится ряд $\sum |x^*(x_k)|$. Множество функционалов абсолютной сходимости обозначим $\Gamma\left(\sum x_k\right)$; это линейное, но в бесконечномерном случае не обязательно замкнутое подмножество в X^*. Через $A_\perp$ обозначим аннулятор множества $A \subset X^*$, то есть $A_\perp = \{x \in X : x^*(x) = 0,\ \forall x^* \in A\}$.

Теорема Б. (Штейниц). *Пусть $\sum x_k$ — условно сходящийся ряд в $\boldsymbol{R}^n$; x_0 — сумма ряда в его исходной перестановке. Тогда $\sigma\left(\sum x_k\right) = x_0 + \Gamma_\perp\left(\sum x_k\right)$.*

Заметим, что включение $\sigma\left(\sum x_k\right) \subset x_0 + \Gamma_\perp\left(\sum x_k\right)$ имеет место для всех условно сходящихся рядов. Это следует из того, что сумма абсолютно сходящегося ряда $\sum x^*(x_k)$ $\left(x^* \in \Gamma\left(\sum x_k\right)\right)$ не меняется при перестановке членов.

М. И. Кадец [2] доказал следующий аналог теоремы Леви—Штейница для рядов в пространствах L^p.

Теорема В [2]. *Пусть $\sum x_k$ — условно сходящийся ряд в L^p и пусть $\sum \|x_k\|^p < \infty$, если $1 \leqslant p \leqslant 2$; $\sum \|x_k\|^2 < \infty$, если $p > 2$. Тогда $\sigma\left(\sum x_k\right)$ — замкнутое смещенное подпространство в L^p.*

Пусть функция $\Phi : (\boldsymbol{R}^+)^N \to \tilde{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R}^+ \cup \{+\infty\}$ удовлетворяет условиям:

1) $a_i \leqslant b_i,\ \forall i \in \boldsymbol{N} \Rightarrow \Phi((a_i)) \leqslant \Phi((b_i))$;

2) $\Phi((a_i)) = \Phi((a_{\pi(i)}))$;

3) $\Phi((a_1, \ldots, a_n, \ldots)) < \infty \Rightarrow \Phi((a_n, a_{n+1}, \ldots)) \to 0$ при $n \to \infty$;

4) $\Phi((a \cdot a_i)) \leqslant a^{C_1}\Phi((a_i)),\ 0 < C_1 < \infty$;

5) $\Phi((a_i + b_i)) \leqslant C_2(\Phi((a_i)) + \Phi((b_i))),\ 0 < C_2 < \infty$.

Будем говорить, что Φ является функцией Штейница для банахова пространства X, если для любого набора $\{x_k\}_{k=1}^n \subset X$, $\sum x_k = 0$, найдется перестановка $\{x_{\pi(k)}\}_{k=1}^n$ такая, что

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left\| \sum_{k=1}^{j} x_{\pi(k)} \right\| \leqslant \Phi(\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|, 0, \ldots)$$

Анализируя доказательство теоремы В в [2], видим, что оно естественным образом распадается на две части. Первую часть можно рассматривать как доказательство существования величин $C_p < \infty$ $(1 \leqslant p < \infty)$ таких, что функции

$$\Phi_p((a_i)) = \begin{cases} C_p\left(\sum a_k^p\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p \leqslant 2, \\ C_p\left(\sum a_k^2\right)^{1/2}, & p > 2, \end{cases}$$

являются функциями Штейница пространств L^p. Во второй части по существу доказана следующая теорема.

Теорема В′. *Пусть* Φ *является функцией Штейница пространства* X, $\sum x_k$ — *условно сходящийся ряд в пространстве* X. *Если* $\Phi(\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots) < \infty$, *то* $\sigma\left(\sum x_k\right)$ — *замкнутое смещенное подпространство.*

Анализируя последующие работы [3, 4], посвященные обобщениям теоремы Леви—Штейница, видим, что в них, по существу, дело сводится к отысканию функций Штейница различных классов пространств и применению теоремы В′. В частности, основной результат работы [4] можно сформулировать так:

Теорема Г [4]. *Пространство* X *имеет инфратип* p *в том и только в том случае, когда существует постоянная* $C < \infty$ *такая, что* $C\left(\sum a_k^p\right)^{1/p}$ *является функцией Штейница пространства* X.

Напомним, что, по определению [5], банахово пространство X имеет инфратип p $(p \geqslant 1)$, если для некоторой постоянной $C < \infty$ и произвольного конечного набора $\{x_k\}_{k=1}^n \subset X$ существует набор $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^n$; $\varepsilon_k = \pm 1$, такой, что

$$\left\|\sum \varepsilon_k x_k\right\| \leqslant C\left(\sum \|x_k\|^p\right)^{1/p}.$$

Если пространство имеет инфратип $p > 1$, то он называется B-выпуклым.

Работы [1, 6] посвящены перенесению на бесконечномерный случай теоремы Штейница. Используя понятие функции Штейница и развивая методы этих работ, покажем, что такое перенесение возможно в следующей общей форме.

Теорема 1. *Пусть* Φ *является функцией Штейница пространства* X, $\sum x_k$ — *условно сходящийся ряд в* X, $x_0 = \sum x_k$. *Если* $\Phi(\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots) < \infty$, то $\sigma\left(\sum x_k\right) = x_0 + \Gamma_\perp\left(\sum x_k\right)$.

Доказательство. Поскольку включение $\sigma\left(\sum x_k\right) \subset x_0 + \Gamma_\perp\left(\sum x_k\right)$ имеет место для всех условно сходящихся рядов, то достаточно доказать включение в противоположную сторону. Введем обозначения: $s_m = \sum\limits_{k=1}^{m} x_k$; $s\left(\sum_m\right) = \{y : y = x_{k_1} + \cdots + x_{k_n},$ $m \leqslant k_1 < \cdots < k_n,\ 1 \leqslant n < \infty\}$. Очевидно, что доказываемое

включение $\sigma\left(\sum x_k\right) \supset x_0 + \Gamma_\perp\left(\sum x_k\right)$ непосредственно вытекает из следующих соотношений:

$$\overline{\operatorname{conv}}\left(s_m + s\left(\sum_{m+1}\right)\right) \supset x_0 + \Gamma_\perp\left(\sum x_k\right); \tag{1}$$

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\operatorname{conv}}\left(s_m + s\left(\sum_{m+1}\right)\right) = \sigma\left(\sum x_k\right). \tag{2}$$

Докажем (1). Пусть $y \in \Gamma_\perp\left(\sum x_k\right)$ таков, что $x_0 + y \notin \overline{\operatorname{conv}}(s_m + s\left(\sum_{m+1}\right))$. Тогда найдется функционал $f \in X^*$ такой, что $f(x_0 + y) > f(z)$ для любого z из $\overline{\operatorname{conv}}\left(s_m + s\left(\sum_{m+1}\right)\right)$. Полагая $z = x_0$, отсюда получаем $f(y) > 0$, следовательно, $f \notin \Gamma\left(\sum x_k\right)$. Это противоречит тому, что для любого конечного набора $x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}$, $m+1 \leqslant k_1 < \cdots < k_n$, выполняется $f(x_{k_1} + \cdots + x_{k_n}) < f(x_0 + y)$.

Чтобы получить (2) нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть Φ — функция Штейница банахова пространства X. Тогда для любого конечного набора векторов $\{h_i\}_{i=1}^n$ существует такой набор $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$; $\varepsilon_i = \pm 1$, что* $\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i h_i \right\| \leqslant 5C_2\Phi(\|h_1\|, \ldots, \|h_n\|, 0, \ldots)$.

Доказательство. Пусть $S = h_1 + \cdots + h_n$, а функционал $F \in X^*$ таков, что $F(S) = 1$; $\|F\| = 1/\|S\|$. Полагая $g_k = h_k - F(h_k)S$, имеем $\sum_{k=1}^n g_k = 0$; $\|g_k\| \leqslant 2\|h_k\|$. По определению функции Штейница найдется перестановка $\{k_i\}_{i=1}^n$ такая, что $\max\limits_{1 \leqslant r \leqslant n} \left\| \sum_{i=1}^r g_{k_i} \right\| \leqslant \Phi(2\|h_1\|, \ldots, 2\|h_n\|, 0, \ldots) \leqslant 2C_2\Phi(\|h_1\|, \ldots, \|h_n\|, 0, \ldots)$. Так как $\sum_{i=1}^n F(h_{k_i}) = 1$, то существует r такое, что $\left| \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^r F(h_{k_i}) \right| \leqslant \frac{1}{2} \max |F(h_k)| \leqslant \frac{1}{2} \max \|h_k\|/\|S\|$. Следовательно,

$$\left\| 2\sum_{i=1}^r h_{k_i} - \sum_{k=1}^n h_k \right\| = \left\| 2\sum_{i=1}^r g_{k_i} + 2\sum_{i=1}^r F(h_{k_i})S - \sum_{i=1}^n h_k \right\| \leqslant$$
$$\leqslant 2\left\| \sum_{i=1}^r g_{k_i} \right\| + \|S\| \cdot \left|2\sum_{i=1}^r F(h_{k_i}) - 1\right| \leqslant 4C_2\Phi(\|h_1\|, \ldots$$
$$\ldots, \|h_n\|, 0, \ldots) + \max \|h_k\| \leqslant 4C_2\Phi(\|h_1\|, \ldots, \|h_n\|, 0, \ldots) +$$
$$+ C_2\Phi(\|h_1\|, \ldots, \|h_n\|, 0, \ldots) = 5C_2\Phi(\|h_1\|, \ldots$$
$$\ldots, \|h_n\|, 0, \ldots).$$

Так как сумма $2\sum_{i=1}^{r} h_{k_i} - \sum_{k=1}^{n} h_k$ имеет требуемый вид, то лемма доказана.

Замечание. Из этой леммы и результатов работы [5] следует, что пространство, имеющее нетривиальную функцию Штейница (то есть, не удовлетворяющую неравенству $\Phi((a_1, \ldots, a_n, \ldots)) \geqslant C\sum_{i=1}^{n} a_i$ ни с каким $C > 0$) является B — выпуклым.

Перейдем к доказательству (2). Рассуждениями, аналогичными проведенным в [7], доказывается.

Лемма 2. *Пусть Φ — функция Штейница банахова пространства X; $\sum x_k$ — условно сходящийся ряд в X, x — предельная точка частичных сумм некоторой его перестановки. Если при этом $\Phi(\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|, \ldots) < \infty$, то $x \in \sigma\left(\sum x_k\right)$.*

Ясно, что для доказательства (2) нужно установить лишь включение $\bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\operatorname{conv}}\left(s_m + s\left(\sum_{m+1}\right)\right) \subset \sigma\left(\sum x_k\right)$. В силу леммы 2 для этого достаточно для произвольного $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\operatorname{conv}}\left(s_m + s\left(\sum_{m+1}\right)\right)$ найти перестановку ряда $\sum x_k$, для которой x был бы предельной точкой частичных сумм. Будем строить такую перестановку. Зададимся последовательностью $\varepsilon_i \downarrow 0$.

Выберем m_1 таким, чтобы $\Phi(\|x_{m_1+1}\|, \|x_{m_1+2}\|, \ldots) < \varepsilon_1/\left(10C_2\sum 2^{-kC_1}\right)$. Так как $x \in s_{m_1} + \overline{\operatorname{conv}}\left(s\left(\sum_{m_1+1}\right)\right)$, то существуют числа $\delta_1, \ldots, \delta_k \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{k}\delta_i = 1$, такие, что $\|x - s_{m_1} - \sum_{i=1}^{k}\delta_i x_{n_i}\| < \varepsilon_1/2$; $m_1 + 1 \leqslant n_1 < \cdots < n_k$. Ясно, что числа δ_i можем считать двоично-рациональными. Пусть r — максимальное количество знаков в двоичном разложении δ_i. В силу леммы 1 найдутся $0 \leqslant \delta_i^1 \leqslant 1$, имеющие не более $(r-1)$ двоичных знаков после запятой, и такие, что $\|\sum \delta_i x_{n_i} - \sum \delta_i^1 x_{n_i}\| \leqslant 5C_2\Phi(2^{-r} \times \|x_{m_1+1}\|, 2^{-r}\|x_{m_1+2}\|, \ldots) \leqslant 5C_2 2^{-rC_1}\Phi(\|x_{m_1+1}\|, \ldots)$. Применив лемму 1 еще раз, найдем числа $0 \leqslant \delta_i^2 \leqslant 1$, имеющие не более чем $(r-2)$ двоичных знаков после запятой и такие, что $\|\sum \delta_i^1 x_{n_i} - \sum \delta_i^2 x_{n_i}\| \leqslant 5C_2\Phi(2^{-r+1}\|x_{m_1+1}\|, \ldots) \leqslant 5C_2 2^{(-r+1)C_1}\Phi(\|x_{m_1+1}\|, \|x_{m_1+2}\|, \ldots)$ и т. д. Применив лемму еще $(r-2)$ раза, найдем набор $\{q_{11}, \ldots, q_{1l_1}\} \subset \{n_1, \ldots, n_k\}$ такой, что $\|\sum_{i=1}^{k}\delta_i x_{n_i} - \sum_{i=1}^{l_1} x_{q_{1i}}\| \leqslant$

$< 5C_2 \sum_{n=1}^{r} 2^{-nC_1} \Phi(\| x_{m_1+1} \|, \| x_{m_1+2} \|, \ldots)$, и, следовательно, $\| x - s_{m_1} - \sum_{i=1}^{l_1} x_{q_{1i}} \| < 5C_2 \sum_{n=1}^{r} 2^{-nC_1} \Phi(\| x_{m_1+1} \|, \ldots) + \frac{\varepsilon_1}{2} < \varepsilon_1$.

Выберем $m_2 > m_1$ так, чтобы $m_2 > q_{1l_1}$ и $\Phi(\| x_{m_2+1} \|, \| x_{m_2+2} \|, \ldots \ldots) < \varepsilon_2/(10C_2 \sum 2^{-kC_1})$. Проведя аналогичное рассуждение, найдем набор $\{q_{21}, \ldots, q_{2l_2}\} \subset \{m_2+1, m_2+2, \ldots\}$ такой, что $\| x - s_{m_2} - \sum_{i=1}^{l_2} x_{q_{2i}} \| < \varepsilon_2$ и т. д. Рассмотрим теперь следующую перестановку натурального ряда. Сначала поставим числа $1, 2, \ldots \ldots, m_1$, за ними числа $q_{11}, \ldots, q_{1l_1}$, далее числа из множества $\{m_1+1, \ldots, m_2\} \setminus \{q_{11}, \ldots, q_{1l_1}\}$, за ними числа $\{q_{21}, \ldots, q_{2l_2}\}$, далее числа из множества $\{m_2+1, \ldots, m_3\} \setminus \{q_{21}, \ldots, q_{2l_2}\}$, и т. д. Ясно, что для соответствующей перестановки ряда $\sum x_k$ точка x является предельной для частичных сумм. Теорема доказана.

Из теоремы 1 и теоремы Г непосредственно вытекает

Теорема 2. *Пусть банахово пространство X имеет инфратип p, а $\sum x_k$ — условно сходящийся ряд с суммой x_0. Если $\sum \| x_k \|^p < \infty$, то $\sigma(\sum x_k) = x_0 + \Gamma_\perp(\sum x_k)$.*

Теорема 1 показывает, что для рядов, удовлетворяющих условию $\Phi(\| x_1 \|, \ldots, \| x_n \|, \ldots) < \infty$, выполняется аналог не только теоремы Леви—Штейница, но и теоремы Штейница. В связи с этим возникает вопрос: существуют ли ряды, для которых имеет место утверждение теоремы Леви—Штейница, но не имеет места утверждение теоремы Штейница? Следующая теорема показывает, что такие ряды существуют.

Теорема 3. *В l_2 существует ряд, множество сумм которого одноточечно, но множество функционалов абсолютной сходимости не тотально.*

Доказательство. Обозначим через $e_0, e_1, \ldots, e_n, \ldots$ ортонормированный базис в l_2. Пусть $0 < \alpha < 1/2$. Рассмотрим ряд $\sum x_k$, где $x_{2n-1} = n^{-2\alpha} e_0 + n^{-\alpha} e_n$, $x_{2n} = -x_{2n-1}$. Покажем, что элемент $h = (h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots) \in l_2$ с $h_0 \neq 0$ не принадлежит $\Gamma(\sum x_k)$. В самом деле, имеем:

$$\sum_{k=1}^{2m} |(h, x_k)| \geqslant 2 \sum_{n=1}^{m} (|h_0| n^{-2\alpha} - |h_n| n^{-\alpha}) \geqslant$$

$$\geqslant 2 |h_0| \sum_{n=1}^{m} n^{-2\alpha} - 2 \left(\sum_{n=1}^{m} n^{-2\alpha} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{m} h_n^2 \right)^{1/2} \geqslant$$

$$\geqslant 2 \left(\sum_{n=1}^{m} n^{-2\alpha} \right)^{1/2} \left(|h_0| \left(\sum_{n=1}^{m} n^{-2\alpha} \right)^{1/2} - \| h \| \right) \to \infty$$

при $m\to\infty$. Отсюда следует, что множество $\Gamma\left(\sum x_k\right)$ не является тотальным.

Покажем, что $\sigma\left(\sum x_k\right)$ состоит из единственной точки 0. Так как при $i>0$ имеем $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(e_i,\ x_{\pi(k)})=0$, то сумма ряда $\sum x_{\pi(k)}$ должна иметь вид βe_0. Чтобы доказать, что при $\beta\neq 0$ будет $\beta e_0\notin\sigma\left(\sum x_k\right)$, предположим противное. Пусть $\sum x_{\pi(k)}=\beta e_0$. Найдем n такое, что для $S_n^\pi=\sum\limits_{i=1}^{n}x_{\pi(i)}$ имеем

$$\|S_n^\pi-\beta e_0\|<\varepsilon. \tag{3}$$

Ясно, что $S_n^\pi=\tilde S_n^\pi$, где $\tilde S_n^\pi$ — сумма тех векторов x из $\{x_{\pi(i)}\}_{i=1}^n$, для которых $(-x)\notin\{x_{\pi(i)}\}_{i=1}^n$. Разобьем $\tilde S_n^\pi$ на две суммы: $\tilde S_n^\pi=\sum\limits_{i\in M_1}x_{\pi(i)}+\sum\limits_{i\in M_2}x_{\pi(i)}$, где $i\in M_1$ при четном $\pi(i)$ и $i\in M_2$ при нечетном $\pi(i)$. Рассматривая проекцию $\tilde S_n^\pi$ на e_0, получаем:

$$\left|\sum_{i\in M_1}(\pi(i)/2)^{-2\alpha}-\sum_{i\in M_2}((\pi(i)+1)/2)^{-2\alpha}\right|>|\beta|-\varepsilon.$$

Рассмотрим ортопроектор P, проектирующий l_2 на подпространство, натянутое на $\{e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n,\ \ldots\}$. Имеем

$$\|P\tilde S_n^\pi\|=\Big(\sum_{i\in M_1}(\pi(i)/2)^{-2\alpha}+\sum_{i\in M_2}((\pi(i)+1)/2)^{-2\alpha}\Big)^{1/2}>(|\beta|-\varepsilon)^{1/2}.$$

Отсюда и из (3) получаем $(|\beta|-\varepsilon)^{1/2}<\varepsilon$. Выбирая ε достаточно малым, приходим к противоречию. Теорема доказана.

В работе [8] показано, что если не налагать никаких ограничений на условно сходящийся ряд в бесконечномерном пространстве, то область его сумм может не быть выпуклой. Оказывается, что при отсутствии ограничений, нельзя утверждать также и замкнутость $\sigma\left(\sum x_k\right)$. Модифицируя конструкцию работы [8], построим пример условно сходящегося ряда в $L^1([0,\ 1]\times[0,\ 1])$ с незамкнутой областью сумм.

Введем, следуя [8], в рассмотрение следующие функции из $L^1[0,\ 1]$: φ_{ik}^+, φ_{ik}^-; $i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$; $k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2^i$:

$$\varphi_{ik}^{\pm}(x)=\begin{cases}\pm 1 & \text{при } x\in((k-1)\,2^{-i},\ k2^{-i}),\\ 0 & \text{при } x\in[0,\ 1]\setminus((k-1)\,2^{-i},\ k2^{-i}).\end{cases}$$

Исходной перестановкой ряда назовем следующую:

$$\varphi_{01}^+ +\varphi_{01}^- +\varphi_{11}^+ +\varphi_{11}^- +\varphi_{12}^+ +\varphi_{12}^- +\varphi_{21}^+ +\varphi_{21}^- +\cdots$$

Ясно, что в исходной перестановке ряд сходится к нулю, а также, что любая сходящаяся перестановка этого ряда сходится к почти

всюду целозначной функции. Нам понадобится следующее замечание: для любого целого a существует перестановка с суммой $S(x) \equiv a$. Действительно, если $a > 0$, то искомая перестановка— следующая:

$$\varphi_{01}^{+} + (\varphi_{11}^{+} + \varphi_{12}^{+}) + (\varphi_{21}^{+} + \varphi_{22}^{+} + \varphi_{23}^{+} + \varphi_{24}^{+}) + \cdots +$$
$$+ (\varphi_{a-1,1}^{+} + \varphi_{a-1,2}^{+} + \cdots + \varphi_{a-1,2^{a-1}}^{+}) + \varphi_{01}^{-} + (\varphi_{a1}^{+} + \varphi_{a2}^{+} + \cdots +$$
$$+ \varphi_{a2^a}^{+}) + \varphi_{11}^{-} + (\varphi_{a+1,1}^{+} + \cdots + \varphi_{a+1,2^a}) + \varphi_{12}^{-} +$$
$$+ (\varphi_{a+1,\,2^a+1}^{+} + \cdots + \varphi_{a+1,\,2^{a+1}}^{+}) + \varphi_{21}^{-} + (\varphi_{a+2,1}^{+} + \cdots \qquad (4)$$

Чтобы получить перестановку с суммой $S(x) \equiv -a$, $a > 0$, нужно в (4) вместо $\varphi_{ik}^{\pm}$ писать $\varphi_{ik}^{\mp}$.

Введем теперь систему функций в $L^1([0, 1] \times [0, 1])$: $g_{ik}^{+}(s, t) = \varphi_{ik}^{+}(s)$, $h_{ik}^{+}(s, t) = \sqrt{2}\,\varphi_{ik}^{+}(t)$, $g_{ik}^{-}(s, t) = \varphi_{ik}^{-}(s)$, $h_{ik}^{-}(s, t) = \sqrt{2}\varphi_{ik}^{-}(t)$.

Так как $g_{ik}^{+} = -g_{ik}^{-}$, $h_{ik}^{+} = -h_{ik}^{-}$ и нормы $\| g_{ik}^{\pm} \|$, $\| h_{ik}^{\pm} \|$ стремятся к нулю при $i \to \infty$, то из функций $\{g_{ik}^{+}, g_{ik}^{-}, h_{ik}^{+}, h_{ik}^{-};\ i = 0, 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots, 2^i\}$ можно образовать условно сходящийся ряд.

Теорема 4. *Область сумм ряда, составленного из функций* $\{g_{ik}^{+}, g_{ik}^{-}, h_{ik}^{+}, h_{ik}^{-};\ i = 0, 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots, 2^i\}$ — *незамкнутое множество.*

Доказательство. Из замечания следует, что плотное в $\mathbf{R}$ множество $D = \{a + b\sqrt{2}\colon a, b \in \mathbf{Z}\}$ содержится в области сумм этого ряда. Поэтому теорема будет доказана, если установим, что функции $f(s, t) \equiv \alpha$ при $\alpha \notin D$ не принадлежат области сумм. Предположим, что удалось расположить функции $g_{ik}^{\pm}$ и $h_{ik}^{\pm}$ в последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ так, чтобы ряд $\sum x_k$ сходился к $f(s, t) \equiv \alpha \notin D$. Найдем натуральное N такое, что

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} x_k \right\| < \frac{1}{8} \text{ при любых } m \geqslant n \geqslant N. \qquad (5)$$

Значение функции $\sum\limits_{k=1}^{N} x_k$ в точке (s, t) имеет вид $a(s) + \sqrt{2}\,b(t)$, где $a(s)$ и $b(t)$ — целые числа, по модулю не превосходящие N. Пусть $\delta_1 = \min\limits_{1<|a|,\,|b|<N} |a + \sqrt{2}b - \alpha|$, N_1 таково, что $\left\| \sum\limits_{k=1}^{N_1} x_k - f \right\| < \delta_1/2$. Тогда мера множества тех точек квадрата, где $\left| \sum\limits_{k=1}^{N_1} x_k(s, t) - \alpha \right| \geqslant \delta_1$ меньше $1/2$. Следовательно, на мно-

жестве меры $>1/2$ значение функции $\sum_{k=1}^{N_1} x_k$ отличается от значения функции $\sum_{k=1}^{N} x_k$. Разобьем сумму $\sum_{k=N+1}^{N_1} x_k$ на две: S_1 — составленную из функций $g_{ik}^{\pm}$, и S_2 — составленную из функций $h_{ik}^{\pm}$. Хотя бы одна из этих сумм является ненулевой на множестве меры $>1/4$. Пусть это будет S_1. Запишем $S_1 = \sum_{j=1}^{l} x_{k_j}$, $N < k_1 < \cdots < k_l \leqslant N_1$. Функции $x_{k_j}(s,\ t)$ имеют вид $\varphi_{ik}^{\pm}(s)$, и из (5) следует, что их носители имеют меру $<1/8$. Поэтому в S_1 можно выделить часть $\tilde{S}_1 = \sum_{i=1}^{p} x_{k_i}$ такую, что ее носитель Δ будет иметь меру $m(\Delta)$, удовлетворяющую условию $1/8 < m(\Delta) < 3/8$. Отсюда, ввиду целозначности $\tilde{S}_1$ следует, что $\|\tilde{S}_1\| > 1/8$. Так как $\|\sum_{k=N+1}^{k_p} x_k\| = \|\tilde{S}_1 + \tau\|$, где τ зависит только от t, то, обозначая через χ_Δ индикатор Δ, имеем

$$\Big\|\sum_{k=N+1}^{k_p} x_k\Big\| \geqslant \|\tilde{S}_1\| - \|\tau\chi_\Delta\| + \|\tau\chi_{([0,\,1]\times[0,\,1])\setminus\Delta}\| \geqslant$$
$$\geqslant \|\tilde{S}_1\| + \|\tau\|\,(1 - 2m(\Delta)) \geqslant \|\tilde{S}_1\| > 1/8.$$

Полученное неравенство противоречит (5). Теорема доказана.

Замечание. Для построенного ряда множество предельных точек частичных сумм не совпадает с областью сумм.

Автор выражает благодарность М. И. Кадецу за ряд ценных советов.

Список литературы: 1. *Фонф В. П.* Об условно сходящихся рядах в равномерно гладком пространстве Банаха.— Мат. заметки, 1972, **11**, № 2, с. 209—214. 2. *Кадец М. И.* Об условно сходящихся рядах в пространстве L_p.— Успехи мат. наук, 1954, **9**, вып. 1, с. 107—109. 3. *Троянски С.* Об условно сходящихся рядах в некоторых пространствах.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1967, вып. 5, с. 102—107. 4. *Кадец В. М.* *B*-выпуклость и лемма Штейница.— Изв. СКНЦ ВШ, 1984, № **4**, с. 69—72. 5. *Maurey B.*, *Pisier G.* Series de variables aleatoires vectorielles independantes et proprietes geometriques des espaces de Banach.— Stud. math., 1976, **58**, p. 45—90. 6. *Печерский Д. В.* Теорема о проекциях переставленных рядов с членами из L_p.— Изв. АН СССР, 1977, **41**, № 1, с. 203—211. 7. *Кадец М. И.* Об одном свойстве ломаных в n-мерном пространстве.— Успехи мат. наук, 1953, **8**, вып. 1, с. 139—143. 8. *Корнилов П. А.* О перестановках условно сходящихся функциональных рядов.— Мат. сб., 1980, **113**, № 4. с. 598—616.

Поступила в редколлегию 30.01.85.

УДК 517. 98+519.2

Р. ПИШЕЛЬ, А. А. ЯНЦЕВИЧ

ДИЛАТАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Будем изучать линейные преобразования случайного процесса $x(t)$, рассматриваемого как кривая в гильбертовом пространстве $H_x = \text{л. з. о.} \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k x(t_k),\ t_k \in R_1,\ c_k \in \boldsymbol{C} \right\}$.

Случайный процесс $y(t)$ называется *дилатацией* r-го ранга случайного процесса $x(t)$, если существует оператор в H_x $B \in [H_x, H_x]$ такой, что

$$y(t) = Bx(t), \tag{1}$$

$$\dim (I - B^*B)\, H = r. \tag{2}$$

Если $x(t)$ — стационарный в широком смысле случайный процесс, а B — унитарный оператор, то дилатация $Bx(t)$ является дилатацией 0-го ранга и корреляционные функции $K_x(t-s)$ и $K_y(t-s)$ совпадают.

Дилатации случайных процессов рассматривались в работах [1, 2]. Однако вопрос о том, каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять корреляционная функция случайного процесса, чтобы процесс был дилатацией другого случайного процесса не изучался.

Теорема. *Для того чтобы случайный процесс $y(t)$ был дилатацией первого ранга стационарного в широком смысле случайного процесса $x(t)$, необходимо и достаточно, чтобы его корреляционная функция имела вид:*

$$K_y(t, s) = K_x(t-s) - \Phi(t)\overline{\Phi(s)}, \tag{3}$$

где $K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda} dF(\lambda)$, $dF(\lambda) = M\,|z(d\lambda)|^2$, $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} df(\lambda)$,

$$df(\lambda) = Mz(d\lambda)\,\overline{g} = (z(d\lambda), g)_{H_x};$$

здесь $z(d\lambda)$ — стандартная случайная мера, т. е. такая случайная функция, определенная на некотором полукольце $\boldsymbol{R}$ множеств $\Delta \in R_1$, которой выполняются следующие условия:

$$z(\Delta_1 U \Delta_2) = z(\Delta_1) + z(\Delta_2),\ \forall \Delta_1, \Delta_2 \in \boldsymbol{R},\ \Delta_1 \cap \Delta_2 = \Phi,$$

$$M\,|z(\Delta)|^2 < \infty,\ \forall \Delta \in \boldsymbol{R},$$

$$Mz(\Delta_1)\overline{z(\Delta_2)} = 0, \quad \forall \Delta_1, \Delta_2 \in \boldsymbol{R}, \quad \Delta_1 \cap \Delta_2 = \Phi,$$

$g \in H_x$ — фиксированный элемент (напомним, что $K_x(t, s) = M x(t)\overline{x(s)} = (x(t), x(s))_{H_x}$).

Доказательство. *Необходимость.* Случайный процесс является стационарным тогда и только тогда, когда он представим в виде $x(t) = U_t x(0)$, $t \in R_1$, где U_t — группа унитарных операторов. Если инфинитеземальный оператор группы A, то имеем представление для стационарного случайного процесса:

$$x(t) = e^{itA} x(0), \tag{4}$$

где

$$A = A^* \in [D(A),\ H_x].$$

Пусть

$$(I - B^*B) H_x = E, \text{ где } B \in [H_x,\ H_x], \tag{5}$$

по условию $\dim E = 1$, неунитарную часть оператора B представим в виде (см. [3])

$$I - B^*B = DD^*, \text{ где } H_x \overset{D^*}{\to} \mathrm{E} \overset{D}{\to} H_x, \tag{6}$$

так как $\dim E = 1, \Rightarrow \exists e \in \mathrm{E},\ \forall a \in \mathrm{E},\ \exists c \in \boldsymbol{C},\ a = ce,$

где $(e,\ e)_E = 1$ и $c = (a,\ e)_E$.

Обозначим

$$De = g \in H_x, \tag{7}$$

тогда имеем

$D^*h \in E \Rightarrow \exists c$: $D^*h = ce$ и $c = (D^*h,\ e)_E$ из (6), (7) $\forall h \in H_x$ получаем

$$(I - B^*B)\, h = DD^*h = D\,(D^*h,\ e)_E e = (h,\ De)_{H_x} De = (h,\ g)_{H_x} g. \tag{8}$$

Вычислим сейчас корреляционную функцию дилатации первого ранга, используя (1) и (8):

$$K_y(t,\ s) = (y(t),\ \ y(s)) = (Bx(t),\ \ Bx(s))_{H_x} = (B^*Bx(t),\ \ x(s))_{H_x} =$$
$$= ((I - DD^*)\, x(t),\ \ x(s))_{H_x} = K_x(t - s) - (x(t),\ g)_{H_x} (g,\ x(s))_{H_x},$$

обозначим

$$\Phi(t) = (x(t),\ g)_{H_x}, \tag{9}$$

тогда

$$K_y(t,\ s) = K_x(t - s) - \Phi(t)\, \overline{\Phi(s)}.$$

Стационарный процесс $x(t)$ можно представить с помощью его спектрального разложения:

$$x(t) = U_t x(0) = e^{itA} x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} z(d\lambda), \tag{4}$$

где $z(d\lambda)$ — случайная мера $z(d\lambda) = E(d\lambda)\, x(0)$, $E(\Delta)$ — спектральное семейство самосопряженного оператора A.

Поэтому

$$K_x(t - s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)\lambda} dF(\lambda); \tag{10}$$

где

$$dF(\lambda) = (z(d\lambda),\ z(d\lambda))_{H_x}$$

Тогда

$$\Phi(t)=\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} z(d\lambda),\ g\right)_{H_x}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} df(\lambda), \tag{9}$$

где

$$df(\lambda)=(z(d\lambda),\ g)_{H_x}.$$

Необходимость доказана, но можно еще уточнить вид $df(\lambda)$. Для этого воспользуемся спектральным представлением произвольного элемента из H_x с помощью его спектральной характеристики

$$g=\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, z(d\lambda), \tag{11}$$

$$\left(\forall g\in H_x\ \exists\varphi(\lambda)\in L^2(F),\ g=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda)\, z(d\lambda)\right).$$

Тогда получаем из (9):

$$\Phi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\left(z(d\lambda),\ \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\mu)\, z(d\mu)\right)_{H_x}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\overline{\varphi(\lambda)}\, dF(\lambda),\ \Rightarrow df(\lambda)=\overline{\varphi(\lambda)}\, dF(\lambda)=$$

$$=\overline{\varphi(\lambda)}\,(z(d\lambda),\ z(d\lambda))_{H_x}. \tag{12}$$

Достаточность. Ради простоты будем считать, что $F(\lambda)$ дифференцируемая функция $dF(\lambda)=F'(\lambda)\,d\lambda$. Тогда в (12) $\Phi(t)$ является преобразованием Фурье функции $\overline{\varphi(\lambda)}\,F'(\lambda)$ и тем самым с помощью формулы обращения можно восстановить $\varphi(\lambda)$ по $\Phi(t)$:

$$\begin{gathered}\Phi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\overline{\varphi(\lambda)}\,F'(\lambda)\,d\lambda,\\ \varphi(\lambda)=[2\pi F'(\lambda)]^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\overline{\Phi(t)}\,dt.\end{gathered} \tag{13}$$

По предположению корреляционная функция случайного процесса имеет вид (3), где

$$K_x(t-s)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)\lambda} dF(\lambda)=\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} z(d\lambda),\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu s} z(d\mu)\right)_{H_x} -$$

корреляционная функция некоторого стационарного процесса,

$$\Phi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}(z(d\lambda),\ g)_{H_x},$$

где g — некоторый фиксированный элемент из H_x.

Воспользуемся интегральным представлением (11) произвольного элемента из H_x и выражением (13) спектральной характеристики

$$g = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ [2\pi F'(\lambda)]^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \overline{\Phi(t)}\, dt \right\} z(d\lambda). \tag{14}$$

Рассматриваем произвольный ограниченный оператор $B \in [H_x, H_x]$, удовлетворяющий единственному условию:

$$(I - B^*B)\, h = (h, g)_{H_x} g, \tag{15}$$

где g — фиксированный элемент из H_x. (Таких операторов существует бесчисленное множество, о построении см. [3]).

Тогда из (3), (14), (15) имеем:

$$K_y(t, s) = K_x(t - s) - \Phi(t)\overline{\Phi(s)} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)} F(d\lambda) - \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\tau} z(d\tau),\ g \Big)_{H_x} \Big(g,\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\mu} z(d\mu) \Big) =$$

$$= \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} z(d\lambda),\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\xi} z(d\xi) \Big)_{Hx} - ((I - B^*B)\, x(t), x(s))_{H_x} =$$

$$= (x(t),\ x(s))_{H_x} - ((I - B^*B)\, x(t),\ x(s))_{Hx} = (Bx(t),\ Bx(s))_{Hx}.$$

$$y = UBx(t),$$

где U — унитарный оператор.

Замечание 1. Теорему можно обобщить на случай $1 < r < \infty$, т. е. для дилатации r-го ранга стационарного процесса $x(t)$. Тогда корреляционная функция имеет вид:

$$K_y(t, s) = K_x(t - s) - \sum_{\alpha=1}^{r} \Phi_\alpha(t)\overline{\Phi_\alpha(s)},$$

где

$$\Phi_\alpha(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} df_\alpha(\lambda).$$

Замечание 2. Можно изучать и дилатации нестационарных случайных процессов конечного ранга (см. [3]). В этом случае легко показать, что корреляционная функция дилатации r-го ранга нестационарного диссипативного случайного процесса ρ-го ранга имеет вид

$$K_y(t, s) = \int_0^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{\rho} \varphi_\alpha(t + \tau)\overline{\varphi_\alpha(s + \tau)}\, d\tau - \sum_{k=1}^{r} \Phi_k(t)\overline{\Phi_k(s)},$$

где $x(t) = e^{itA}x(0)$, $\dim 2\mathrm{Im}\, AH_x = \rho$, $y(t) = Bx(t)$, $\dim (I - B^*B)\, H_x = r$, $\varphi_\alpha(t) = (e^{itA}x(0), h_\alpha)$, h_α — каналовые элементы

локального комплекса, содержащего несамосопряженный оператор A, $\Phi_k(t) = (e^{itA}x(0), g_\alpha)$, g_α — каналовые элементы метрического комплекса, содержащего неунитарный оператор B.

Список литературы: 1. *Niemi N*. On the linear prediction problem of certain non — stationary stochastic processes. — Math. Scand., 1976, **39**, p. 146—160. 2. *Niemi N*. On stationary dilations and stochastic processes. — Commen. P.—M., 1975, **45**, p. 111—130. 3. *Лившиц М. С., Янцевич А. А.* Операторные узлы в гильбертовых пространствах. — Х.: Изд-во при ХГУ, 1971.—154 с.

Поступила в редколлегию 30. 01. 85.

УДК 517.5

О. Б. СКАСКИВ

ОБОБЩЕНИЕ МАЛОЙ ТЕОРЕМЫ ПИКАРА

Малая теорема Пикара утверждает, что целая функция, отличная от тождественной постоянной, принимает каждое конечное значение, за исключением быть может одного. Эту теорему Пикара можно получить (см., например, [1], с. 27—28), как следствие из невозможности тождества

$$e^{g_1(z)} + e^{g_2(z)} = F(z), \tag{1}$$

где g_j $(j = 1, 2)$ — произвольные целые функции, при этом $g_1(z) \not\equiv \not\equiv g_1(0)$, а $F(z) \equiv 1$.

На Всесоюзной конференции по теории функций и дифференциальных уравнений в г. Черноголовке в 1983 г. И. В. Островский поставил задачу, выяснить, при каких условиях на лакунарность степенного разложения функции F тождество (1) останется невозможным. При этом он высказал гипотезу, что тождество (1) невозможно, если степенное разложение функции F имеет адамаровские лакуны, т. е.

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\mu_k} \tag{2}$$

и $\mu_{k+1} \geqslant \theta\mu_k$ $(k \geqslant 1)$, $\theta > 1$. В этой статье доказывается теорема, указывающая на справедливость гипотезы И. В. Островского. Наш результат следующий.

Теорема 1. *Если целая функция F вида (2) удовлетворяет условию*

$$\frac{n}{\mu_n} \ln n (\ln\ln n)^{2+\varepsilon} = o(1) \ (n \to +\infty), \ \varepsilon > 0, \tag{3}$$

то тождество (1) невозможно, если только $F(z) \not\equiv 0$ и $g_1(z) \not\equiv \not\equiv g_1(0)$.

Логарифмической мерой $m_{\ln}(E)$ *измеримого множества* $E \subset [1, +\infty[$ *называем величину* $m_{\ln}(E) = \int\limits_E d\ln t$.

Теорему 1 мы получим при помощи одного результата У. Хеймана [2] из следующей теоремы.

Теорема 2. *Если целая функция* F *удовлетворяет соотношению* $\ln\min\{|F(z)|:|z|=r\} > \Delta\ln\max\{|F(z)|:|z|=r\}$, $\Delta>0$, *при* $r\in E$, $m_{\ln}(E)=+\infty$, *то тождество* (1) *невозможно, если только* $g_1(z)\not\equiv g_1(0)$.

Нам удобно будет перейти от степенных рядов к абсолютно сходящимся всюду в $\boldsymbol{C}$ рядам Дирихле вида

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n},\ 0\leqslant\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n\uparrow+\infty\ (n\to+\infty).$$

Через S будем обозначать класс всех целых функций, представленных такими рядами Дирихле, а через S_1 — класс экспоненциальных многочленов с неотрицательными показателями. Считаем, что $S_1\subset S$.

Обозначим $M(x, F)=\sup\{|F(x+iy)|:y\in\boldsymbol{R}\}$ и $m(x, F)=\inf\{|F(x+iy)|:y\in\boldsymbol{R}\}$. Мерой измеримого множества $E\subset[0, +\infty[$ называем величину $mE=\int\limits_E dt$. Через C и C_∞ обозначим, соответственно, класс всех множеств $E\subset[0, +\infty[$ конечной и бесконечной меры.

Рассмотрим следующий класс целых функций

$$S_2=\{F\in S:\ln m(x, F)>\Delta\ln M(x, F),\quad x\in E_\infty\in C_\infty,\ \Delta>0. \quad (4)$$

Легко видеть, что теорема 2 при помощи замены z на e^z следует из теоремы.

Теорема 3. *Пусть* $F\in S_2$, $g_j\in S$ $(j=1,\ 2)$. *Тогда тождество (1) невозможно, если только* $g_1(z)\not\equiv g_1(0)$.

Прежде, чем доказывать теорему 3 введем некоторые обозначения и рассмотрим несколько вспомогательных утверждений. Обозначим $A(x, F)=\inf\{\operatorname{Re}F(x+iy):y\in\boldsymbol{R}\}$ и $B(x, F)=\sup\{\operatorname{Re}F(x+iy):y\in\boldsymbol{R}\}$. Пусть дальше всюду $0\leqslant\varepsilon(x)<1$ — некоторая функция, определенная на $[0, +\infty[$ такая, что $\varepsilon(x)=0(1)\ (x\to+\infty)$. Обозначим

$$W_B(x, F, \varepsilon)=\{z:\operatorname{Re}z=x,\ \operatorname{Re}F(z)\geqslant(1-\varepsilon(x))\,B(x, F)\},$$

$$W_M(x, F, P-\varepsilon)=\{z:\operatorname{Re}z=x,\ |F(z)|\geqslant(P-\varepsilon(x))\,M(x, F)\}.$$

Поскольку для целой функции $F\in S$ функция $\ln M(x, F)$ — выпуклая, то она имеет всюду, за исключением счетного множества точек, производную и всюду — правостороннюю производную (возрастающую к $+\infty$ в случае $F\in S\setminus S_1$), которую мы обозначим через $L(x, F)$.

Следующая лемма в неявном виде содержится в [3] на с. 149—150.

Лемма 1. *Пусть* $F \in S \setminus S_1$. *Тогда для всех* $z \in W_M(x, F, P-\varepsilon)$ *и для всех* $x \geqslant 0$ *вне некоторого множества* E *из* C *имеет место равенство*

$$F(z+\eta) = F(z) \exp\{\eta L(x, F) + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \eta^j\}, \tag{5}$$

где $|\eta| < \frac{1}{k(x)}$,

$$|\psi_j| < 2(1 + \beta(x) \ln L(x, F))(k(x))^j, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

$$k(x) = k(x, F) = 4\{L(x, F)\}^{\frac{1}{2}+\beta(x)} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} L(x, F), \ \alpha > 0,$$

$$\beta(x) = -\frac{\ln(P-\varepsilon(x))}{\ln L(x, F)}, \quad 0 < P \leqslant 1, \quad \psi_j = \psi_j(F) \quad (j \geqslant 1),$$

а множество E *зависит от* F *и* $P-\varepsilon$, *т. е.* $E = E(P-\varepsilon, F)$.

Из леммы 1 мы получим следующую лемму.

Лемма 2. *Если в условиях леммы 1*

$$\eta = \eta(x) = O\left(\frac{1}{L(x, F)}\right)(x \to +\infty),$$

то для всех $z \in W_M(x, F, P-\varepsilon)$ *при* $x \to +\infty$ *вне некоторого множества* $E = E(P-\varepsilon, F)$ *из* C *имеет место соотношение*

$$F(z+\eta) = (1 + o(1)) F(z) \exp\{\eta L(x, F)\}. \tag{7}$$

Доказательство. Поскольку из условий леммы вытекает, что $|\eta| k(x, F) = o(1)$ $(x \to +\infty)$, то из неравенств (6) следует

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \eta^j\right| < 2(1 + \beta(x) \ln L(x, F)) \sum_{j=1}^{\infty} (|\eta| k(x))^j =$$

$$= 2(1 + \beta(x) \ln L(x, F)) \frac{|\eta| k(x)}{1 - |\eta| k(x)} = o(1) \ (x \to +\infty),$$

т. е. соотношение (7) немедленно следует из равенства (5).

Следствием леммы 2 является следующий аналог классической теоремы Вимана.

Лемма 3. *Пусть* $F \in S$ и $F(z) \not\equiv F(0)$. *Тогда соотношения* $(1 + o(1)) B(x, F) = M(x, F) = -(1 + o(1)) A(x, F)$ *выполняются при* $x \to +\infty$ *вне некоторого множества* $E_1(F) \in C$.

Доказательство. Пусть $F \in S \setminus S_1$ и $z \in W_M(x, F, 1-\varepsilon)$. Положим сначала $\eta = i(\pi - \arg F(z))/L(x, F)$. По лемме 2 при $x \to +\infty$ вне некоторого множества из C имеем

$$F(z+\eta) = (1 + o(1)) |F(z)| e^{i\pi} = -(1 + o(1)) |F(z)|, \tag{8}$$

т. е. $A(x, F) \leqslant \operatorname{Re} F(z+\eta) \leqslant -(1 + o(1)) M(x, F)$, что вместе с неравенством $|A(x, F)| \leqslant M(x, F)$ доказывает правое соотношение из леммы. Полагая теперь $\eta = -i \arg F(z)/L(x, F)$ и применяя лемму 2 получим $F(z+\eta) = (1 + o(1)) |F(z)|$ при $x \to +\infty$ вне

некоторого множества из C, т. е. $B(x, F) \geqslant \operatorname{Re} F(z+\eta) = (1 + o(1)) M(x, F)$. Последнее неравенство вместе с неравенством $B(x, F) \leqslant M(x, F)$ доказывает лемму 3 полностью, поскольку в случае $F \in S_1$, $F(z) \not\equiv F(0)$ утверждение леммы очевидно.

Лемма 4. *Пусть $g_j \in S$ $(j = 1, 2)$, $g_j(z) \not\equiv g_j(0)$. Тогда для каждого $x \geqslant 0$ вне некоторого множества $E_2(\tilde{g}_j) \in C$ существует точка $z_j = x + iy_j(x)$ такая, что*

$$g_j(z_j) = -(1 + o(1)) M(x, g_j) \tag{9}$$

при $x \to +\infty$ вне множества $E_2(g_j)$.

Утверждение леммы 4 в случае $g_j \in S \setminus S_1$ немедленно получаем из соотношения (8), принимая во внимание, что $\operatorname{Re}(z+\eta) = x$ и $|F(z)| = (1 + o(1)) M(x, F)$ $(x \to +\infty)$. В случае $g_j \in S_1$, $g_j(z) \not\equiv g_j(0)$ утверждение леммы 4 очевидно.

Лемма 5. *Пусть $F \in S_2$, $g_j \in S$ $(j = 1, 2)$, $g_1(z) \not\equiv g_1(0)$. Если выполняется тождество* (1), *то*

$$(\Delta + o(1)) M(x, g_1) \leqslant M(x, g_2) \leqslant \left(\frac{1}{\Delta} + o(1)\right) M(x, g_1) \tag{10}$$

при $x \to +\infty$ вдоль множества $E_3 \in C_\infty$, где

$$E_3 = E_\infty \setminus (E_1(g_1) \cup E_1(g_2) \cup E_2(g_1) \cup E_2(g_2)).$$

Доказательство. Применяя соотношения (9) к тождеству (1), при $x \to +\infty$ вне множества $E_2(g_1) \cup E_2(g_2)$ получаем

$$F(z_1) = e^{g_2(z_1)} + e^{-(1+o(1))M(x,\, g_1)} = e^{g_2(z_1)} + o(1) \tag{11}$$

и

$$F(z_2) = e^{g_1(z_2)} + o(1), \tag{12}$$

где $z_j = x + iy_j(x)$ $(j = 1, 2)$ — определены в лемме 4. Пусть $\varepsilon(x) \downarrow 0$ $(x \to +\infty)$, тогда для каждого $x \geqslant 0$ выберем произвольную точку $z_j^* = (x + iy_j^*) \in W_B(x, g_j, \varepsilon)$. Применяя лемму 3, при $x \to +\infty$ вне множества $E_1(g_j)$ имеем

$$\operatorname{Re} g_j(z_j^*) \geqslant (1 - \varepsilon(x)) B(x, g_j) = (1 + o(1)) M(x, g_j). \tag{13}$$

При помощи соотношения (4) из (11) имеем

$$\ln\left(e^{\operatorname{Re} g_2(z_1)} + o(1)\right) \geqslant \ln|F(z_1)| \geqslant \Delta \ln|F(z_1^*)| =$$
$$= \Delta \ln\left|e^{g_1(z_1^*)} + e^{g_2(z_1^*)}\right|$$

при $x \to +\infty$, $x \in E_3 \in C_\infty$, т. е.

$$\exp\left\{\left(\frac{1}{\Delta} + o(1)\right) \operatorname{Re} g_2(z_1)\right\} \geqslant e^{\operatorname{Re} g_1(z_1^*)} - e^{\operatorname{Re} g_2(z_1^*)}. \tag{14}$$

Если теперь предположить, что левое неравенство из (10) для некоторой последовательности $x_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$, $x_n \in E_3$, не вы-

полняется, т. е. при некотором $\delta \in]0, \Delta[$ имеет место неравенство $M(x_n, g_2) \leqslant (\Delta - \delta) M(x_n, g_1)$, то из (14) получим

$$\operatorname{Re} g_1(z_1^*) \leqslant \ln\left(\exp\left\{\left(1 - \frac{\delta}{\Delta} + o(1)\right) M(x_n, g_1)\right\} + \right.$$
$$\left. + \exp\{(\Delta - \delta) M(x_n, g_1)\}\right) \leqslant \left(1 - \frac{\delta}{\Delta} + o(1)\right) M(x_n, g_1) + \ln 2,$$

что противоречит неравенству (13). Следовательно, левое неравенство из (10) выполняется при $x \to +\infty$ $(x \in E_3)$.

Благодаря равноправию g_1 и g_2, при помощи аналогичных рассуждений доказывается справедливость при $x \to +\infty$ $(x \in E_3)$ правого неравенства из (10). Лемма 5 полностью доказана.

Доказательство теоремы 3. Прежде всего заметим, что если имеет место тождество (1), то по лемме 5 или $g_j \in S_1$ $(j = 1, 2)$, или же $g_j \in S \setminus S_1$ $(j = 1, 2)$.

Предположим сначала, что $g_j \in S_1$ $(j = 1, 2)$ и имеет место тождество (1). Поскольку

$$g_j(z) = \sum_{m=0}^{n_j} a_m^{(j)} e^{z\mu_m^{(j)}}, \quad 0 \leqslant \mu_0^{(j)} < \mu_1^{(j)} < \cdots < \mu_{n_j}^{(j)},$$

то

$$g_j(z) = (1 + o(1))\, a_{n_j}^{(j)} e^{z\mu_{n_j}^{(j)}}, \quad \operatorname{Re} z \to +\infty.$$

Положим $a_{n_j}^{(j)} = a_j$, $\mu_{n_j}^{(j)} = \mu_j$. По условию теоремы $g_1(z) \not\equiv g_1(0)$, поэтому по лемме 5 $\mu_1 = \mu_2 \overset{\text{def}}{=} \mu > 0$ и $0 < \Delta |a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \frac{1}{\Delta} |a_1|$. Обозначим $\alpha_j = \arg a_j$ $(j = 1, 2)$. Если $\alpha_1 = \alpha_2$, то полагая $y_0 = \frac{\pi - \alpha_1}{\mu}$ при $z_0 = x + iy_0$ получим

$$|F(z_0)| = |e^{g_1(z_0)} + e^{g_2(z_0)}| \leqslant \exp\{-(1 + o(1))|a_1| e^{\mu x}\} +$$
$$+ \exp\{-(1 + o(1))|a_2| e^{\mu x}\} = o(1) \quad (x \to +\infty),$$

что, благодаря соотношению (4), невозможно. Пусть теперь $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Если $|\alpha_2 - \alpha_1| \neq \pi$, то существует θ такое, что $\cos\theta < 0$ и $\cos(\theta + \alpha_2 - \alpha_1) < 0$. Тогда для правой части тождества (1) при $z = x + i\frac{(\theta - \alpha_1)}{\mu}$ снова имеем

$$|F(z)| = |e^{g_1(z)} + e^{g_2(z)}| \leqslant \exp\{(1 + o(1))|a_1| e^{\mu x} \cos\theta\} +$$
$$+ \exp\{(1 + o(1))|a_2| e^{\mu x} \cos(\theta + \alpha_2 - \alpha_1)\} = o(1) \quad (x \to +\infty),$$

что невозможно. Осталось рассмотреть случай $|\alpha_2 - \alpha_1| = \pi$. Тогда $\cos(\theta + \alpha_2 - \alpha_1) = -\cos\theta$ и из тождества (1) при $z = x + \frac{i(\theta - \alpha_1)}{\mu}$ для всех θ таких, что $\cos\theta > 0$, выводим

$$F\left(x + i\frac{\theta - \alpha_1}{\mu}\right) = \exp\{(1 + o(1))|a_1| e^{\mu x} \cos\theta\} + o(1) \quad (x \to +\infty).$$

Применяя соотношение (4), при $x \to +\infty$ $(x \in E_\infty)$ для θ_j таких, что $\cos\theta_j > 0$, отсюда получим

$$(1+o(1))\,|a_1|\,e^{\mu x}\cos\theta_1 = \ln\left|F\left(x+i\,\frac{\theta_1-\alpha_1}{\mu}\right)\right| \geqslant$$
$$\geqslant \Delta\ln\left|F\left(x+i\,\frac{\theta_2-\alpha_1}{\mu}\right)\right| = (\Delta+o(1))\,|a_1|\,e^{\mu x}\cos\theta_2.$$

Из последних соотношений для всех θ_1 и θ_2 таких, что $\cos\theta_j > 0$ $(j=1,2)$ имеем $\cos\theta_1 \geqslant \Delta\cos\theta_2$, что невозможно. Теорема 3 в случае $g_j \in S_1$ $(j=1,2)$ доказана.

Предположим теперь, что $g_j \in S \diagdown S_1$ $(j=1,2)$ и имеет место тождество (1). Покажем, что для каждого $x \in E_3$ существует точка $z^{(1)} = x + iy^{(1)}(x)$ такая, что

$$\operatorname{Re} g_j(z^{(1)}) \geqslant (\Delta^2 + o(1))\,B(x, g_j) \quad (j=1,2) \tag{15}$$

при $x \to +\infty$ $(x \in E_3)$.

Поскольку из (12) при $x \to +\infty$ $(x \in E_3)$ следует неравенство $\ln m(x, F) \leqslant B(x, g_1) + o(1)$, то

$$\max\{\ln m(x, F),\ B(x, g_1)\} - (M(x, g_1))^{0,5} < B(x, g_1) \tag{16}$$

для всех достаточно больших $x \in E_3$. Пусть

$$H_1 = \{x \in E_3 : M(x, F) \geqslant q\exp(B(x, g_1) - (M(x, g_1))^{0,5})\},$$
$$H_2 = E_3 \diagdown H_1,\ 0 < q < 1.$$

Положим

$$R(x) = \begin{cases} \ln m(x, F) - (M(x, g_1))^{0,5}, & x \in H_1, \\ B(x, g_1) - (M(x, g_1))^{0,5}, & x \in H_2. \end{cases}$$

Благодаря (16), для всех достаточно больших $x \in E_3$ имеет место неравенство $R(x) < B(x, g_1)$. Но по лемме 3 при $x \to +\infty$ $(x \in E_3)$ имеем

$$A(x, g_1) = -(1+o(1))\,M(x, g_1) < -(M(x, g_1))^{0,5} < R(x).$$

Поэтому $A(x, g_1) < R(x) < B(x, g_1)$ для всех достаточно больших $x \in E_3$. Отсюда следует, что для всех достаточно больших $x \in E_3$ существует точка $z^{(1)} = x + iy^{(1)}(x)$ такая, что

$$\operatorname{Re} g_1(z^{(1)}) = R(x). \tag{17}$$

Поэтому из тождества (1), благодаря соотношению (4), при $x \to +\infty$ $(x \in H_1)$ имеем

$$\exp\{\operatorname{Re} g_2(z^{(1)})\} \geqslant |F(z^{(1)})| - \exp\{\operatorname{Re} g_1(z^{(1)})\} \geqslant$$
$$\geqslant m(x, F)\,(1 - \exp\{R(x) - \ln m(x, F)\}) \geqslant$$
$$\geqslant \exp\{\Delta\ln M(x, F) + \ln(1 - \exp\{-(M(x, g_1))^{0,5}\})\} \geqslant$$
$$\geqslant \exp\{(\Delta + o(1))\,(B(x, g_1) - (M(x, g_1))^{0,5})\}. \tag{18}$$

При $x \to +\infty$ $(x \in H_2)$ из тождества (1) снова выводим

$$\exp\{\operatorname{Re} g_2(z^{(1)})\} \geqslant \exp\{\operatorname{Re} g_1(z^{(1)})\} - |F(z^{(1)})| \geqslant \geqslant (1 - M(x, F)e^{-R(x)})\, e^{R(x)} \geqslant (1-q)\, e^{R(x)} = = \exp\{(1+o(1))\,(B(x, g_1) - (M(x, g_1))^{0,5})\}. \tag{19}$$

Из (18) и (19) при помощи леммы 3 при $x \to +\infty$ $(x \in E_3)$ получим

$$\operatorname{Re} g_2(z^{(1)}) \geqslant (\Delta + o(1))\,(B(x, g_1) - (M(x, g_1))^{0,5}) = = (\Delta + o(1))\, B(x, g_1). \tag{20}$$

Поскольку при $x \to +\infty$ $(x \in E_3)$ выполняется соотношение (10), то по лемме 3 имеем

$$B(x, g_1) = (1 + o(1))\, M(x, g_1) \geqslant \geqslant (\Delta + o(1))\, M(x, g_2) = (\Delta + o(1))\, B(x, g_2) \tag{21}$$

при $x \to +\infty$ $(x \in E_3)$. Применяя (21), из (20) получаем соотношение (15) $(j = 2)$.

Заметим теперь, что при $x \to +\infty$ $(x \in H_1)$, благодаря соотношению (4), имеем

$$R(x) \geqslant \ln m(x, F) - (M(x, g_1))^{0,5} \geqslant \Delta \ln M(x, F) - - (M(x, g_1))^{0,5} \geqslant \Delta B(x, g_1) + \Delta \ln q - (1 + \Delta)\,(M(x, g_1))^{0,5} = = (\Delta + o(1))\, B(x, g_1).$$

Отсюда и из (17) следует соотношение (15) $(j = 1)$.

Из (15) по лемме 3 имеем

$$|g_j(z^{(1)})| \geqslant \operatorname{Re} g_j(z^{(1)}) \geqslant (\Delta^2 + o(1))\, B(x, g_j) = = (\Delta^2 + o(1))\, M(x, g_j) > \frac{\Delta^2}{2} M(x, g_j)$$

при $x \to +\infty$ $(x \in E_3)$. Значит, $z^{(1)} \in W_M\left(x, g_j, \frac{\Delta^2}{2}\right)$ для всех достаточно больших $x \in E_3$. Таким образом, утверждение леммы 2 выполняется для функций g_j $(j = 1, 2)$ в окрестностях точек $z^{(1)}$ для всех достаточно больших x из множества

$$E_4 = E_3 \setminus \left(E\left(\frac{\Delta^2}{2}, g_1\right) \cup E\left(\frac{\Delta^2}{2}, g_2\right)\right) \in C_\infty.$$

Покажем, что не существует последовательности (x_k), $x_k \to +\infty$ $(k \to +\infty)$ такой, что $x_k \in E_4$ и

$$h(x_k) \overset{\text{def}}{=} \frac{L(x_k, g_1)}{L(x_k, g_2)} \to h \in]0, +\infty[\quad (k \to +\infty). \tag{22}$$

Доказательство проведем, предположив, что имеет место противное. Предположим сначала, что такая последовательность

существует и $h = 1$. Тогда по лемме 2 при $\operatorname{Re} z^{(1)} = x_k \to +\infty$ и $\eta = i\pi/L(x_k, g_1)$ имеем

$$g_2(z^{(1)} + \eta) = (1 + o(1))\, e^{i\pi} g_2(z^{(1)}) \tag{23}$$

и

$$g_1(z^{(1)} + \eta) = (1 + o(1))\, g_1(z^{(1)}) \exp\{i\pi h(x_k)\}. \tag{24}$$

Из (23) и (24), применяя к (24) соотношение (22), а также вспоминная (15), получаем

$$\operatorname{Re} g_j(z^{(1)} + \eta) = -(1 + o(1)) \operatorname{Re} g_j(z^{(1)}) \leqslant -(\Delta^2 + o(1))\, B(x_k, g_j) \tag{25}$$

при $x_k \to +\infty$, где $\operatorname{Re} z^{(1)} = x_k$. Применим соотношения (25) к тождеству (1)

$$|F(z^{(1)} + \eta)| \leqslant e^{\operatorname{Re} g_1(z^{(1)}+\eta)} + e^{\operatorname{Re} g_2(z^{(1)}+\eta)} = o(1)\ (x_k \to +\infty).$$

Последнее соотношение невозможно, поскольку $x_k \in E_4 \subset E_\infty$, а из соотношения (4) следует $\ln|F(z^{(1)} + \eta)| \geqslant \Delta \ln M(x_k, F) \to +\infty$ $(x_k \to +\infty)$ в случае $F(z) \not\equiv F(0)$ и в противоположном случае $|F(z^{(1)} + \eta)| \equiv |F(0)| > 0$. Значит $h \neq 1$. Предположим теперь, что $h \in]0, 1[$. Выберем $\varepsilon_1 > 0$ из условия $h < (\pi - 2\varepsilon_1)/\pi < 1$. Положим $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} + (-1)^n \varepsilon_1 + \pi n$, где n — целое число, которое мы выберем так, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1 < (\alpha_1 - \theta_2) h + \theta_1 < \frac{3\pi}{2} - \varepsilon_1, \tag{26}$$

где $\theta_j = \arg g_j(z^{(1)})$. Покажем, что такой выбор числа n возможен. Система неравенств (26) равносильна следующей:

$$a(x, h) \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1 - \theta_1\right)\frac{1}{h} - \frac{\pi}{2} - \varepsilon_1(-1)^n < \pi n <$$
$$< \left(\frac{3\pi}{2} - \varepsilon_1 - \theta_1\right)\frac{1}{h} - \frac{\pi}{2} - \varepsilon_1(-1)^n \overset{\text{def}}{=} b(x, h).$$

Очевидно, что такое n возможно выбрать, если $b(x, h) - a(x, h) > \pi$, т. е., если $\pi - 2\varepsilon_1 > \pi h$. Но последнее неравенство выполняется по условию выбора ε_1. Заметим, что $n = O(1)$ $(x \to +\infty)$ и $\alpha_1 = O(1)$ $(x \to +\infty)$. Тогда по лемме 2 при $\operatorname{Re} z^{(1)} = x_k \to +\infty$ и $\eta = i(\alpha_1 - \theta_2)/L(x_k, g_2)$ имеем

$$\operatorname{Re} g_2(z^{(1)} + \eta) = |g_2(z^{(1)})|(1 + o(1)) \cos\alpha_1 \tag{27}$$

и

$$\operatorname{Re} g_1(z^{(1)} + \eta) = (1 + o(1))\, |g_1(z^{(1)})| \cos((\alpha_1 - \theta_2) h + \theta_1). \tag{28}$$

Поскольку $\cos\alpha_1 = -\sin\varepsilon_1$, а из неравенств (26) следует, что $\cos((\alpha_1 - \theta_2) h + \theta_1) < -\sin\varepsilon_1$, то из (27) и (28), применяя (15) при $x_k \to +\infty$ получаем

$$\operatorname{Re} g_j(z^{(1)} + \eta) \leqslant -(1 + o(1))\, |g_j(z^{(1)})| \sin\varepsilon_1 \leqslant$$
$$\leqslant -(\Delta^2 + o(1))\, B(x_k, g_j) \sin\varepsilon_1, \tag{29}$$

где $0<\varepsilon_1<1$. Таким образом, применяя (29) к тождеству (1), при $x_k\to+\infty$ выводим $|F(z^{(1)}+\eta)|=o(1)$, что, благодаря соотношению (4), невозможно, поскольку $x_k\in E_4\subset E_\infty$, а из соотношения (4) следует неравенство $\ln|F(z^{(1)}+\eta)|\geqslant\Delta\ln M(x_k, F)\geqslant\geqslant\delta>-\infty$. Значит $h\notin\,]0, 1[$. Аналогично доказывается, что $h\notin\,]1, +\infty[$. Таким образом, если существует (x_k) такая, что $x_k\in E_4$, $x_k\to+\infty$ $(k\to+\infty)$ и

$$h(x_k)=\frac{L(x_k, g_1)}{L(x_k, g_2)}\to h\ (k\to+\infty),$$

то или $h=0$, или $h=+\infty$. Обозначим

$$G_n^{(1)}=\left\{x\in E_4:\frac{1}{n+1}\leqslant h(x)<\frac{1}{n}\right\},\ G^{(1)}=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n^{(1)}$$

и

$$G_n^{(2)}=\{x\in E_4:n\leqslant h(x)<n+1\},\ G^{(2)}=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n^{(2)},$$

где $h(x)=L(x, g_1)/L(x, g_2)$.

Заметим, что для всех $n\geqslant1$ множества $G_n^{(j)}$ $(j=1, 2)$ измеримые, поскольку функция $h(x)$ измеримая, как частное двух измеримых функций $L(x, g_j)$ $(j=1, 2)$. Кроме того отметим, что для всех $n\geqslant1$ множества $G_n^{(1)}$ и $G_n^{(2)}$ имеют конечную меру и являются ограниченными множествами. Действительно, если бы некоторое множество $\{x\in E_4:a\leqslant h(x)<b\}$, $0<a<b<+\infty$, имело бесконечную меру или было бы неограниченным, то существовала бы последовательность (x_k), $x_k\in E_4$, $x_k\to+\infty$ $(k\to+\infty)$ такая, что $h(x_k)\to h\in[a, b]$ $(k\to+\infty)$, а это, по доказанному выше, невозможно.

Поскольку $G^{(1)}\cup G^{(2)}=E_4\in C_\infty$, то или $G^{(1)}\in C_\infty$, или $G^{(2)}\in C_\infty$. Предположим сначала, что $G^{(1)}\in C_\infty$ (случай $G^{(2)}\in C_\infty$ рассматривается аналогично, благодаря равноправию функций g_1 и g_2). Пусть теперь $x\in G^{(1)}$. Тогда существует $n=n(x)$ такое, что $x\in G_{n(x)}^{(1)}$ и $n(x)\to+\infty$ $(x\to+\infty)$, отсюда $h(x)=o(1)\,(x\to+\infty)$. Значит, по лемме 2 при $\eta=i\pi/L(x, g_2)$ и $x\to+\infty$ $(x\in G^{(1)})$ имеем

$$\operatorname{Re}g_2(z^{(1)}+\eta)=\operatorname{Re}((1+o(1))e^{i\pi}g_2(z^{(1)}))=-(1+o(1))\operatorname{Re}g_2(z^{(1)})$$

и

$$\operatorname{Re}g_1(z^{(1)}+\eta)=\operatorname{Re}((1+o(1))e^{i\pi h(x)}g_1(z^{(1)}))=(1+o(1))\operatorname{Re}g_1(z^{(1)}).$$

Из последних соотношений, а также из тождества (1) при $x\to+\infty$ $(x\in G^{(1)})$ получаем

$$M(x, F)\geqslant|F(z^{(1)}+\eta)|\geqslant\exp\{\operatorname{Re}g_1(z^{(1)}+\eta)\}-$$
$$-\exp\{\operatorname{Re}g_2(z^{(1)}+\eta)\}=\exp\{(1+o(1))\operatorname{Re}g_1(z^{(1)})\}-$$
$$-\exp\{-(1+o(1))\operatorname{Re}g_2(z^{(1)})\}.$$

Вспоминая неравенства (15), отсюда при $x \to +\infty$ $(x \in G^{(1)})$ получаем

$$\ln M(x, F) \geqslant \ln(\exp\{(\Delta^2 + o(1)) B(x, g_1)\} - \\ - \exp\{-(\Delta^2 + o(1)) B(x, g_2)\}) = (\Delta^2 + o(1)) B(x, g_1). \quad (30)$$

Поскольку $E_3(g_1) \cap E_4 = \varnothing$, то по лемме 4 для больших $x \in E_4$ существуют точка $z_1 = x + iy_1(x)$ и функция $\varepsilon(x) \to +0$ $(x \to +\infty)$ такие, что

$$\operatorname{Re} g_1(z_1) = -(1 - \varepsilon(x)) M(x, g_1). \quad (31)$$

Тогда из тождества (1), благодаря соотношению (4), следует, что при $x \to +\infty$ $(x \in G^{(1)})$

$$\operatorname{Re} g_2(z_1) \geqslant \ln(|F(z_1)| - \exp\{-(1 - \varepsilon(x)) M(x, g_1)\}) \geqslant \\ \geqslant (\Delta + o(1)) \ln M(x, F),$$

что вместе с соотношениями (30) и (21) при $x \to +\infty$ $(x \in G^{(1)})$ дает

$$\operatorname{Re} g_2(z_1) \geqslant (\Delta^3 + o(1)) B(x, g_1) \geqslant (\Delta^4 + o(1)) M(x, g_2). \quad (32)$$

Поэтому для всех достаточно больших $x \in G^{(1)}$ имеем $z_1 \in W_M \times \left(x, g_2, \frac{\Delta^4}{2}\right)$. Кроме того очевидно, что для достаточно больших $x \in G^{(1)}$ точка z_1 принадлежит множеству $W_M(x, g_1, 1 - \varepsilon)$. Значит утверждение леммы 2 имеет место для функций g_j $(j = 1, 2)$ в окрестностях точек z_1 для всех достаточно больших x из множества

$$E_5 = G^{(1)} \diagdown \left(E(1 - \varepsilon, g_1) \cup E\left(\frac{\Delta^4}{2}, g_2\right)\right), \; E_5 \in C_\infty.$$

Таким образом, по лемме 2 при $\eta = i\pi/L(x, g_2)$ и $x \to +\infty$ $(x \in E_5 \subset G^{(1)})$ получим $g_2(z_1 + \eta) = (1 + o(1)) e^{i\pi} g_2(z_1)$ и $g_1(z_1 + \eta) = (1 + o(1)) e^{i\pi h(x)} g_1(z_1)$. Отсюда, применяя (31) и (32), а также вспоминая, что $h(x) = o(1)$ $(x \to +\infty,\ x \in E_5 \subset G^{(1)})$, выводим

$$\operatorname{Re} g_2(z_1 + \eta) = -(1 + o(1)) \operatorname{Re} g_2(z_1) \leqslant -(\Delta^4 + o(1)) M(x, g_2)$$

и

$$\operatorname{Re} g_1(z_1 + \eta) = (1 + o(1)) \operatorname{Re} g_1(z_1) = -(1 + o(1)) M(x, g_1).$$

Применение последних соотношений к тождеству (1) дает хорошо знакомое противоречие $0 < \delta \leqslant |F(z_1 + \eta)| \leqslant \exp\{\operatorname{Re} g_1(z_1 + \eta)\} + \exp\{\operatorname{Re} g_2(z_1 + \eta)\} = o(1)$ при $x \to +\infty$ $(x \in E_5 \in C_\infty)$. Теорема 3 полностью доказана.

Доказательство теоремы 1. В работе [2] У. Хейман доказал, что если при некотором $\varepsilon > 0$ выполняется условие (3), то $\ln \min\{|F(z)| : |z| = r\} = (1 + o(1)) \ln \max\{|F(z)| : |z| = r\}$ при $r \to +\infty$ вне множества E_1 такого, что $m_{\ln}(E_1 \cap [1, r]) = o(\ln r)$ $(r \to +\infty)$. Ясно, что $m_{\ln}([1, +\infty[\diagdown E_1) = +\infty$. Поэтому, применяя теорему 2 получаем утверждение теоремы 1.

В заключение сформулируем несколько более общее утверждение, чем содержащееся в теореме 3.

Теорема 4. *Пусть* $F \in S_2$, $g_j \in S$, $P_j \in S_1$ $(j = 1, 2)$. *Тогда тождество* $P_1(z)e^{g_1(z)} + P_2(z)e^{g_2(z)} = F(z)$ *невозможно, если только* $g_1(z) \not\equiv g_1(0)$, $P_1(z) \not\equiv 0$.

Доказательство теоремы 4 совершенно аналогично доказательству теоремы 3.

Список литературы: 1. *Виттих Г.* Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям.— М.: Физматгиз, 1960.— 319 с. 2. *Hayman W. K.* Angular value distribution of power series with gaps.— Proc. London Math. Soc. (3), 1972, **24**, № 4, p. 590—624. 3. *Стрелиц Ш. И.* Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений.— Вильнюс: Минтис, 1972.— 467 с.

Поступила в редколлегию 24.11.84.

УДК 517.925.71

В. Р. СМИЛЯНСКИЙ

СВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РАНГА К СИСТЕМЕ ПЕРВОГО РАНГА. 1.

В работе рассматривается система $(r+1)$-го ранга

$$\frac{dW}{dz} = z^r B(z)\,w,\ w = \{w_1, w_2, \ \ldots\ , w_n\}, \tag{1}$$

где r — неотрицательное целое число, матрица $B(z)$ голоморфна в окрестности $z = \infty$, $B(\infty) \neq 0$ и все ее характеристические корни $\lambda_1, \ \ldots\ , \lambda_n$ различны. Система (1) имеет формальную матрицу — решение вида

$$\hat{\Phi}(z) = P(z)\, z^R \exp[Q];$$

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu z^{-\nu};\ \det P_0 \neq 0;\ R = \operatorname{diaq}\{r_1, \ \ldots\ , r_n\}, \tag{2}$$

$$Q(z) = \operatorname{diaq}\{q_1(z), \ \ldots\ , q_n(z)\};$$

$$q_j(z) = \sum_{\nu=1}^{r+1} \lambda_j^{(\nu)} z^\nu/\nu;\ \lambda_j^{(r+1)} \equiv \lambda_j,$$

где $P(z)$ — формальный ряд; R — постоянная матрица; $\lambda_j^{(\nu)}$ — константы. В теории асимптотических решений системы (1) существенную роль играют линии в комплексной z-плоскости, определяемые условием

$$\operatorname{Re} q_{j_1} = \operatorname{Re} q_{j_2} = \cdots = \operatorname{Re} q_{j_k};\ (2 \leqslant k \leqslant n), \tag{3}$$

которое при больших $|z|$ практически сводится к

$$\operatorname{Re} \lambda_{j_1} z^{r+1} = \operatorname{Re} \lambda_{j_2} z^{r+1} = \cdots = \operatorname{Re} \lambda_{j_k} z^{r+1};\ (2 \leqslant k \leqslant n). \tag{4}$$