ISSN 0321-4427

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

46

»ВИЩА ШКОЛА«

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ХАРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ И ОРДЕНА ДРУЖБЫ НАРОДОВ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени А. М. ГОРЬКОГО

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Республиканский
междуведомственный
научный
сборник

Основан в 1965 г.

ВЫПУСК 46

ХАРЬКОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ «ВИЩА ШКОЛА»

1986

УДК 513.33

Теория функций, функциональный анализ и их приложения: Респ. междувед. науч. сб.— X.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1986.— Вып. 46. 145 с.

Сборник содержит статьи по спектральному анализу линейных операторов, геометрии банаховых пространств, теории дифференциальных уравнений, аналитическим функциям одной и нескольких переменных, динамическим системам.

Для научных работников и специалистов.

Адрес редакционной коллегии: 310077, Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, университет, механико-математический факультет, тел. 40-14-27

Редакция естественнонаучной литературы

Т $\frac{1702050000-007}{М226(04)-86}$ 477-86

УДК 517.95

В. М. БОРОК, Я. И. ЖИТОМИРСКИЙ

УБЫВАЮЩИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПО ПАРАМЕТРУ

1. В данной статье исследуются линейные дифференциальные уравнения, коэффициенты которых зависят от вещественного параметра, а разные члены уравнения содержат искомую функцию (и ее производные) при различных значениях этого параметра, т. е. дифференциальные уравнения, функциональные по параметру. Оказывается, наличие такой зависимости существенно влияет на свойства решений дифференциального уравнения. В статье предпринято исследование качественных и количественных показателей этого влияния на вопросы единственности решения задачи Коши.

Исследование дифференциально-функциональных уравнений представляет актуальную задачу современной теории дифференциальных уравнений [1]. Если в линейном дифференциальном уравнении с постоянными коэффициентами лишь часть независимых переменных подвергнута линейному преобразованию, то образ Фурье (по той же части переменных) решения будет, в свою очередь, решением дифференциального уравнения, функционального по параметру (коэффициенты которого являются квазиполиномами). Результаты статьи относятся как к этому, так и к более общему случаю достаточно произвольной зависимости преобразования и коэффициентов уравнения от параметра. Ранее нами изучен [2] случай, когда коэффициенты уравнения постоянны, а преобразование параметра имеет специальный вид.

Рассматривается уравнение

$$D_t u(x,\ y,\ t) = P(D_x,\ y)\, u(x,\ \alpha(y),\ t) \tag{1}$$

в области $\Pi(a,\ b) = \boldsymbol{R}^n \times\,]a,\ b[\, \times [0,\ T]$, где $P(s,\ y)$ — произвольный полином относительно $s \in \boldsymbol{C}^n$, коэффициенты которого — непрерывные функции относительно $y \in\,]a,\ b[$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, $\alpha(y) :\,]a,\ b[\, \to\,]a,\ b[$. К уравнению (1) присоединяется начальное условие

$$u(x,\ y,\ 0) \equiv 0,\ (x,\ y) \in \boldsymbol{R}^n \times\,]a,\ b[, \tag{1_0}$$

и изучается вопрос о наличии нетривиальных решений задачи (1) — (1_0), удовлетворяющих как можно более жестким оценкам при $|x| \to \infty$ и $y \to a$ или $y \to b$.

При отсутствии зависимости от параметра задачи (1) — (1_0) (т. е. для уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами) полное решение вопроса содержится в [3 — 4] и состоит в том, что всякое нетривиальное решение этой задачи при $|x| \to \infty$ растет достаточно быстро.

Если в уравнении (1) $P(s, y) \equiv P(s)$, $\alpha(y) \equiv \alpha y$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, то задача (1) — (1_0) имеет нетривиальные решения, экспоненциально убывающие при $|x| \to \infty$ (с показателем, меньшим 1), которые достаточно быстро растут при $y \to +\infty$ (если $\alpha > 1$) или при $y \to +0$ (если $\alpha \in]0, 1[$) [2].

В данной статье показано, что если коэффициенты уравнения (1), рассматриваемого, например, в $\Pi(0, \infty)$, растут при $y \to \infty$, то задача (1) — (1_0) имеет нетривиальные решения, быстро убывающие как по x (при $|x| \to \infty$), так и по y (при $y \to \infty$ или при $y \to 0$), причем убывание по y тем сильнее, чем выше скорость роста коэффициентов; в то же время увеличение скорости роста функции $\alpha(y)$, наоборот, замедляет убывание решения.

2. *Основные предположения.* Обозначим символом $M^+(a, b)$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ класс функций $\alpha(y):]a, b[\to]a, b[$ со свойствами: 1) $\alpha(y) \in C(]a, b[)$; 2) $\alpha(y)$ строго возрастает на $]a, b[$; 3) $\alpha(y) > y$ при $y \in]a, b[$. Символ $M^-(a, b)$ обозначает класс функций $\alpha(y):]a, b[\to]a, b[$, обладающих свойствами 1) и 2), а вместо 3) — свойством $\alpha(y) < y$ при $y \in]a, b[$.

В уравнении (1) всегда предполагаем $\alpha(y) \in M^+(a, b)$ или $\alpha(y) \in M^-(a, b)$. Нетрудно видеть, что, не уменьшая общности, можно ограничиться изучением случая $\alpha(y) \in M^+(0, \infty)$, перейдя, если надо, к рассмотрению функции $v(x, y, t) \equiv u(x, \psi(y), t)$, где $\psi(y):]0, \infty[\to]a, b[$, $\psi(]0, \infty[) =]a, b[$, $\psi(y)$ — монотонная функция. Поэтому впредь изучаем уравнение (1) в $\Pi(0, \infty)$, $\alpha(y) \in M^+(0, \infty)$ и различаем случаи А: $\alpha(+0) = 0$ и Б: $\alpha(+0) > 0$.

В дальнейшем будем предполагать также выполненными следующие два условия.

Условие 1. $\exists y_0 > 0$, $\exists \delta > 0$, $\exists \sigma_0 \in \boldsymbol{R}^n$, $\exists \lambda(y)$ — возрастающая при $y > 0$ функция, $\lambda(y) \to \infty$ при $y \to \infty$ такие, что при $y \geqslant y_0$, $s \in U_\delta(\sigma_0) = \{s \in \boldsymbol{C}^n : |s - \sigma_0| < \delta\}$ справедливо неравенство

$$|P(is, y)| \geqslant \lambda(y). \tag{2}$$

Сразу же отметим, что в случае полиномиальной зависимости $P(s, y)$ от y (степени l) условие 1 выполняется с $\lambda(y) = a_0 y^l \equiv \lambda_1(y)$, $a_0 \in \boldsymbol{R}$.

Для формулировки условия 2 обозначим $\alpha_0(y) \equiv y$, $\alpha_k(y) = \alpha(\alpha_{k-1}(y))$ $(k \geqslant 1)$, $\alpha_{-k}(y) = \alpha^{-1}(\alpha_{-k+1}(y))$, где $\alpha^{-1}(y):]\alpha(+0), \infty[\to]0, \infty[$ — обратная функция. При $k \geqslant 0$, а в случае А и при $k < 0$ функции $\alpha_k(y)$ определены при всех $y > 0$; функция $\alpha_{-k}(y)$ $(k \geqslant 1)$ определена в случае Б при $y > \alpha_{k-1}(\alpha(+0))$.

Пусть выполнено условие 1. Положим $y_k = \alpha_k(y_0)$ $(k \geqslant 1)$, $y_{-k} = \alpha_{-k}(y_0)/k \in \{1, 2, \ldots, m_0\}$, где в случае А $m_0 = \infty$, а в случае Б величина m_0 определяется условиями $y_{-m_0+1} > \alpha(+0)$, $y_{-m_0} \leqslant \alpha(+0)$; кроме того, положим $y_{-m_0-1} = 0$. Тогда $]0, \infty[= \bigcup\limits_j]y_j, y_{j+1}]$. Обозначим еще $\Lambda(m) = \sum\limits_{l=0}^{m} \ln \lambda(y_l)$, $m(y) = \max\{m : y_m < y\}$.

Условие 2.

$$l_0 = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{m \ln m}{\Lambda(m)} < 1.$$

Условие 2, очевидно, выполняется при достаточно быстром росте коэффициентов уравнения (точнее, функции $\lambda(y)$ из условия 1) и функции $\alpha(y)$.

3. **Теорема 1.** *Пусть выполнены условия 1 и 2. Тогда при* $\forall a > 0$, $\forall h \in]0, 1[$ *и* $\forall b \in]0, 1 - l_0[$ *задача* (1) — (1_0) *имеет решение* $u(x, y, t) \not\equiv 0$, *удовлетворяющее условию*

$$\overline{\lim_{|x|+y\to\infty}} |u(x, y, t)| \exp\{a|x|^h + b\Lambda(m(y))\} < \infty. \quad (3)$$

Доказательство. Обозначим $\prod_m (s, y) = \prod_{j=0}^{m-1} P^{-1}(is, \alpha_{-j}(y))$, где $m \geqslant 1$, $y \geqslant y_m$, $s \in U_\delta(\sigma_0)$. Определение $\Pi_m(s, y)$ корректно в силу условия 1; кроме того, справедлива оценка:

$$\left|\prod_m (s, y)\right| \leqslant \prod_{j=0}^{m-1} \lambda^{-1}(\alpha_{-j}(y_m)) = \prod_{j=1}^{m} \lambda^{-1}(y_j).$$

Ясно также, что функции $\Pi_m(s, y)$ аналитичны при $s \in U_\delta(\sigma_0)$. Пусть $\gamma \in]1, h^{-1}[$, $a_\gamma(\sigma) \in C_0^\infty(U_{\frac{\delta}{2}}(\sigma_0))$, причем для любого мультииндекса β верна оценка $|D^\beta a_\gamma(\sigma)| \leqslant a_1^{|\beta|} |\beta|^{|\beta|\gamma}$. Обозначим $A_m(x, y)$ ($m \geqslant 0$) — (обратное) преобразование Фурье функции $\Pi_m(\sigma, y) a_\gamma(\sigma)$ ($\Pi_0(\sigma, y) \equiv 1$); такая функция определена при $y \geqslant y_m$, $x \in R^n$ и удовлетворяет при любом $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ оценке $|x^\beta A_m(x, y)| \leqslant$ $\leqslant C_1 \prod_{j=1}^{m} \lambda^{-1}(y_j) a_2^\beta |\beta|^{|\beta|\gamma}$ с некоторыми $C_1 > 0$ и $a_2 > 0$, откуда, с учетом того, что $\gamma < h^{-1}$, следуют оценки

$$|A_m(x, y)| \leqslant C_2 \prod_{j=1}^{m} \lambda^{-1}(y_j) \exp\{-a|x|^h\}, \quad (4)$$

справедливые при некоторых $C_2 > 0$ и $a > 0$ и всех значениях $x \in R^n$, $y \geqslant y_m$.

Построение требуемого решения $u(x, y, t) \not\equiv 0$ теперь осуществляется следующим образом: при $y \in]y_m, y_{m+1}]$ ($m \geqslant 0$) полагаем

$$u(x, y, t) = A_m(x, y)\, b(\alpha_{-m}(y))\, c^{(m)}(t), \quad (5)$$

где $c(t) \in C_0^\infty(0, T)$, $b(y) \in C_0(y_0, y_1)$ — любые функции. Формулой (5) функция $u(x, y, t)$ определена при $x \in R^n$, $y \geqslant y_0$, $t \in [0, T]$. Ее продолжение на $]0, y_0[$ осуществляется согласно формулам

$$u(x, y, t) = \prod_{j=0}^{m-1} P(D_x, \alpha_j(y))\, A_0(x)\, b(\alpha_m(y)) \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} c(\tau)\, d\tau \quad (6)$$

при $x \in \boldsymbol{R}^n$, $t \in [0, T]$, $y \in]y_{-m}, y_{-m+1}]$; здесь в случае А $m \geqslant 1$ — любое, а в случае Б $m = 1, 2, \ldots, m_0 + 1$. Нетрудно проверить, что определяемая в $\Pi(0, \infty)$ формулами (5) — (6) функция $u(x, y, t)$ является решением задачи (1) — (1_0). Оценим ее при $y \to +\infty$. Из (4) и (5) следует, что при $y_m < y \leqslant y_{m+1}$ ($m \geqslant 1$) и при некоторых $C_3 > 0$, $C_4 > 0$ и $h_1 > 1$ верны оценки

$$|u(x, y, t)| \leqslant C_3 C_4^m \exp\{-a|x|^h - \Lambda(m) + mh_1 \ln m\}. \qquad (7)$$

При этом число m в правой части (7) совпадает, очевидно, с $m(y)$. При заданном $b \in]0, 1 - l_0[$ подберем $h_1 > 1$ так, чтобы $h_1 l_0 < 1 - b$ и функцию $c(t) \in C_0^\infty(0, T)$ в (5) выберем удовлетворяющей условиям $|c^{(m)}(t)| \leqslant c_4^m (m!)^{h_1}$, $m \geqslant 0$. Тогда, учитывая условие 2, при достаточно больших значениях m, иначе говоря, при достаточно больших значениях y, приходим к справедливости оценки $|u(x, y, t)| \leqslant C \exp\{-a|x|^h - b\Lambda(m(y))\}$. Теорема доказана.

4. Те или иные конкретные предположения о поведении при $y \to \infty$ коэффициентов уравнения (1) и об асимптотическом поведении $\alpha(y)$ дают возможность получения соответствующих конкретных оценок решения. Как уже отмечалось, при условии полиномиальности коэффициентов уравнения (1) (по y) условие 1 выполнено с $\lambda(y) = \lambda_1(y) \equiv a_0 y^l$. Обозначим $\lambda_0(y) \equiv a_0 (\ln y)^l$, $\lambda_2(y) \equiv a_0 \exp\{ly\}$ ($a_0 > 0$), $\mu_{00}(y) = \ln y \ln\ln y$, $\mu_{01}(y) = (\ln\ln y)^2$, $\mu_{10}(y) = \ln^2 y$, $\mu_{11}(y) = \ln y$, $\mu_{20}(y) = y^\mu$, $\mu_{21}(y) = \exp\{(\ln y)^\nu\}$.

Относительно поведения $\alpha(y) \in M^+(0, \infty)$ сделаем одно из двух предположений:

a_0) при достаточно больших значениях y имеют место оценки: $\alpha_1 y \leqslant \alpha(y) \leqslant \alpha_2 y$, $1 < \alpha_1 \leqslant \alpha_2$;

a_1) при достаточно больших значениях y имеют место оценки: $A_1 y^\alpha \leqslant \alpha(y) \leqslant A_2 y^\alpha$, $0 < A_1 \leqslant A_2$, $\alpha > 1$.

Тогда применение теоремы 1 и непосредственный подсчет показывают, что справедливо следующее

Следствие 1. *Пусть выполнено условие 1 с* $\lambda(y) = \lambda_i(y)$ ($i = 0, 1, 2$) *и* $\alpha(y) \in M^+(0, \infty)$ *удовлетворяет условию* (a_j) ($j = 0, 1$). *Тогда, каковы бы ни были постоянные* $a > 0$, $h \in]0, 1[$, *а в случае* $i = 2$ *также* $\mu \in \left]0, \frac{\ln \alpha_1}{\ln \alpha_2}\right[$, $\nu \in]0, 1[$, $b_{2j} > 0$ ($j = 0, 1$), *найдется решение* $u_{ij}(x, y, t) \not\equiv 0$ *задачи* (1) — (1_0), *для которого (в случаях* $i = 0, 1$ *при некотором* $b_{ij} > 0$, $j = 0, 1$) *справедливо соотношение* $\overline{\lim\limits_{|x| + y \to \infty}} |u_{ij}(x, y, t)| \exp\{a|x|^h + b_{ij}\mu_{ij}(y)\} < \infty$.

Тем самым качественно результат состоит в том, что скорость возможного убывания (по y при $y \to \infty$) решения $u(x, y, t) \not\equiv 0$ задачи (1) — (1_0) возрастает с увеличением роста $\lambda(y)$ при $y \to +\infty$ и уменьшается с увеличением роста $\alpha(y)$.

5. Покажем, что существенное увеличение скорости убывания по y нетривиальных решений задачи (1) — (1_0) невозможно даже при весьма заметном ослаблении предположений о поведении решений при $|x| \to \infty$. Полином $P(s, y)$ запишем в виде $P(s, y) = \sum_{\gamma:|\gamma| \leqslant P} a_\gamma(y) s^\gamma$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие*

$$|a_\gamma(y)| \leqslant \lambda(y), \; y \geqslant y_0, \; \gamma : |\gamma| \leqslant p, \tag{8}$$

и $u(x, y, t)$ *— решение задачи* (1) — (1_0), *удовлетворяющее при некоторых* $a > 0$ *и* $h \in]0, 1[$ *оценке*

$$|u(x, y, t)| \leqslant C \exp\{a|x|^h - \Lambda(y)\}, \; (x, y, t) \in \Pi(0, \infty), \tag{9}$$

где $\Lambda(y) > 0$ *— возрастающая функция. Если при достаточно больших значениях* y *последовательность*

$$c_m(y) = \exp\left\{-\Lambda(\alpha_m(y)) + \sum_{j=0}^{m-1} \ln \lambda(\alpha_j(y))\right. \tag{10}$$

является квазианалитической, то $u(x, y, t) \equiv 0$.

Доказательство. Фиксируя достаточно большое $y > 0$, выберем произвольную функцию $\varphi(x) \in S_\beta^0$, где $\beta \in]1, h^{-1}[$ (см. [5]). Тогда при всех $x \in \boldsymbol{R}^n$ верны оценки:

$$|D^\gamma \varphi(x)| \leqslant A^\gamma \exp\{-B|x|^{1/\beta}\}, \; A = A_\varphi > 0, \; B = B_\varphi > 0, \tag{11}$$

$\gamma = (\gamma_1, \ldots \gamma_n)$ — любой мультииндекс.

Функция $F_{\varphi,y}(t) = \int u(x, y, t) \varphi(x)\, dx$, определенная в силу условий (9) и (11) корректно, является бесконечно дифференцируемой, причем

$$D_t^m F_{\varphi,y}(t) = \int u(x, \alpha_m(y), t) \prod_{j=0}^{m-1} P^*(D_x, \alpha_j(y)) \varphi(x)\, dx. \tag{12}$$

Формула (12) имеет два следствия: во-первых, $D_t^m F_{\varphi,y}(0) = 0$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ в силу (1_0); во-вторых,

$$|D_t^m F_{\varphi,y}(t)| \leqslant C \exp\left\{-\Lambda(\alpha_m(y))\right\} + \sum_{j=0}^{m-1} \ln \lambda(\alpha_j(y)) \times$$
$$\times A^m = CA^{mp} c_m(y).$$

На основании предположения теоремы о квазианалитичности последовательности $c_m(y)$ делаем вывод о том, что $F_{\varphi,y}(t) \equiv 0$. Отсюда, в силу достаточного запаса функций в пространстве S_β^0 [5], заключаем, что $u(x, y, t) \equiv 0$. Теорема доказана.

Применим доказанную теорему в предположениях относительно $\lambda(y)$ и $\alpha(y)$, аналогичных принятым при установлении следствия 1.

Следствие 2. *Пусть выполнено условие (8) с* $\lambda(y)=\lambda_i(y)$ $|i\in\{0, 1, 2\}|$ *и* $\alpha(y)\in M^{+(0,\infty)}$ *удовлетворяет условию* (a_j), $j\in\{0, 1\}$, *и пусть* $u_{ij}(x, y, t)$ — *решение задачи* (1) — (1_0), *удовлетворяющее при некоторых* $a>0$, $b_{20}>0$, $\mu>\frac{\ln\alpha_1}{\ln\alpha_2}$, $h\in]0, 1[$ *и* $\nu=1$ *и достаточно больших значениях* $y>0$ *оценкам*

$$|D^\gamma u(x, y, t)|\leqslant C\exp\{a|x|^h-b_{ij}\mu_{ij}(y)\},\ |\gamma|\leqslant p.$$

Тогда, если постоянная $b_{ij}>0$ $(i, j=0, 1;$ *или* $i=2,\ j=1)$ *достаточно велика, то* $u_{ij}(x, y, t)\equiv 0$.

Действительно, вычисления показывают, что во всех шести возникающих случаях последовательность $c_m(y)$, определяемая согласно (10), ограничена; применима теорема 2.

Список литературы; 1. *Мышкис А. Д.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— Успехи мат. наук, 1977, **32**, вып. 2, с. 172—202. 2. *Борок В. М., Житомирский Я. И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных, функциональных по параметру.— Дифференц. уравнения, 1982, **18**, №6, с. 1000—1005. 3. *Чаус Н. Н.* О единственности задачи Коши для дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.— Укр. мат. журн., 1964, **16**, №3, с. 417—421. 4. *Золотарев Г. Н.* Об оценках сверху классов единственности решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных.— Науч. докл. высш. шк., 1958, №2, с. 37—40. 5. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций.— М.: Физматгиз, 1958, с. 1—307.

Поступила в редколлегию 02.10.84.

УДК 517.9

А. М. БЛОХ

О ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ НА ОДНОМЕРНЫХ РАЗВЕТВЛЕННЫХ МНОГООБРАЗИЯХ. 1

В нашей работе некоторые результаты, относящиеся к отображениям отрезка, обобщены на отображениях одномерных разветвленных многообразий, т. е. компактов, локально представляющих собой точку с конечным числом выходящих из нее интервалов (многообразиями будем называть именно такие компакты).

Введем определения. Узел $\underset{\text{def}}{\equiv}$ точка многообразия, не имеющая окрестности, гомеоморфной интервалу; из определения следует, что у многообразия конечное число узлов. Дуга $\underset{\text{def}}{\equiv}$ подмножество многообразия, гомеоморфное интервалу. Если x — точка многообразия K, то под стороной R точки x будем понимать семейство открытых невырожденных, не содержащих узлов дуг $\{V_R(x)\}$ с одним из концов в x и таких, что если $V'_R(x)\in R$, $V''_R(x)\in R$, то либо $V_R(x)\subset V''_R(x)$, либо $V''_R(x)\subset V_R(x)$. Если $f: K\to K$ непрерывно, $x\in K$, R — сторона x, S — сторона fx, то скажем, что S принадлежит образу R, если для любой полуокрестности $V_R(x)\in R$ найдется полуокрестность $V_S(fx)\in S$ такая, что $fV_R(x)\supset V_S(fx)$.

Множество всех сторон x обозначим $\mathrm{Si}(x)$. Важным для нас будет следующее определение. Пусть $T: X \to X$, $\tilde{T}: \tilde{X} \to \tilde{X}$ — непрерывные отображения топологических пространств, $\Phi: X \to \tilde{X}$ — монотонная (т. е. $\Phi^{-1}(\tilde{X})$ связно для любого $\tilde{x} \in \tilde{X}$) непрерывная сюръекция, полусопрягающая T и $\tilde{T}$ (т. е. $\Phi \circ T = T \circ \Phi$). Пусть $F \subset X$ — T-инвариантное замкнутое множество, причем существует $N < \infty$ такое, что для любого $\tilde{x} \in \tilde{X}$ $1 \leqslant \operatorname{card}(\Phi^{-1}(x) \cap \cap F) \leqslant N$ и $\operatorname{int}(\Phi^{-1}(\tilde{x})) \cap F = \varnothing$ (т. е. $\Phi^{-1}(\tilde{x}) \cap F \subset \partial\Phi^{-1}(\tilde{x})$); тогда будем говорить, что Φ почти точно на F полусопрягает T и $\tilde{T}$. Если еще $\Phi^{-1}(\tilde{x}) \cap F = \partial\Phi^{-1}(\tilde{x})$, то назовем Φ полным. Ниже если не оговорено противное, рассматриваются непрерывные отображения многообразий.

Пусть K — многообразие, $f: K \to K$, M — инвариантное подмногообразие, $x \in M$. Обозначим $P_M(x, f)$ пролонгацию x относительно f/M, т. е. множество $\bigcap\limits_U \overline{\mathrm{orb}_f U}$, где U пробегает все окрестности x в M. Если ясно, о каком отображении идет речь, будем писать $P_M(x)$; если $M = K$, будем писать $P(x)$ или $P(x, f)$. Очевидно, что $P(x)$ — инвариантный компакт, и если $x \in \Omega(f)$, то $f/P(x)$ сюръективно.

Лемма 1. *Пусть $x \in \Omega(f)$. Тогда $x \in P(f^m x) (\forall m \geqslant 0)$, для $P(x)$ имеются такие возможности: 1) $P(x)$ — цикл; 2) $P(x) = \bigcup\limits_{i=1}^{k} P_i$ — инвариантный невырожденный компакт со связными компонентами $\{P_i\}_{i=1}^k$, причем $fP_1 = P_2$, $fP_2 = P_3$, ..., $fP_k = P_1$; 3) $P(x) = \bigcap\limits_{n>0} M_n$, где для любого n $M_n = \bigcup\limits_{i=1}^{k_n} M_n^{(i)}$ — инвариантный компакт со связными компонентами $\{M_n^{(i)}\}_{i=1}^{k_n}$, причем $fM_n^{(1)} \subset \subset M_n^{(2)}$, $fM_n^{(2)} \subset M_n^{(3)}$, ..., $fM_n^{(k_n)} \subset M_n^{(1)}$ и $k_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.*

Доказательство. Для любой окрестности $V \ni f_x^m$ в силу того, что $x \in \Omega(f)$, имеем: $\overline{\mathrm{orb}\, V} \ni x$, так что $x \in P(f^m x)$. Далее, $P(x) = \bigcap\limits_{n>0} \overline{\mathrm{orb}\, U_n}$, где $U_0 \supset U_1 \supset \ldots$ — связные окрестности x, $\bigcap\limits_{n>0} U_n = x$. При фиксированном n $\overline{\mathrm{orb}\, U_n} = M_n$ — инвариантный компакт, и если $M_n = \bigcup\limits_{i=1}^{k_n} M_n^{(i)}$ — разложение M_n на связные компоненты, то можно считать, что $fM_n^{(1)} \subset M_n^{(2)}$, $fM_n^{(2)} \subset M_n^{(3)}$, ... $fM_n^{(k_n)} \subset M_n^{(1)}$. Очевидно, k_n не убывает с ростом n. Если $k_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, то имеет место случай 3). Пусть $k_n \underset{n\to\infty}{\not\to} \infty$; можно считать, что все $k_n = k$. Тогда $P(x) = \bigcap\limits_{n>0} M_n$ — инвариантный компакт,

$P(x)=\bigcup_{i=1}^{k} P_i$, где $fP_1=P_2, \ldots fP_k=P_1$ (равенства следуют из сюръективности $f/P(x)$). Если $P(x)$ вырождено, то имеет место случай 1, если невырождено — случай 2.Ч.Т.Д.

Пусть $D=\{m_i\}_{i=0}^{\infty}$ — последовательность целых чисел такая, что $m_{i+1} \vdots m_i (\forall i)$. В $\mathbf{Z}_{m_0} \times \mathbf{Z}_{m_1} \times \ldots$, взятом с топологией произведения, рассмотрим подгруппу $H(D)$ (несколько неточно назовем ее «соленоидом»), состоящую из таких $(r_0, r_1 \ldots)$, что $r_{i+1} \equiv r_i (\mathrm{mod.}\ m_i)(\forall i)$. Пусть у отображения f многообразия K есть множество, описанное нами в третьем пункте леммы 1, т. е. семейство инвариантных компактов $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $M_n=\bigcup_{i=0}^{m_n-1} M_n^{(i)} (\forall n)$, причем $fM_n^{(0)} \subset M_n^{(1)}$, $fM_n^{(1)} \subset M_n^{(2)}, \ldots, fM_n^{(m_n-1)} \subset M_n^{(0)}$, все $M_n^{(i)}$ связны и $m_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$. Тогда $\bigcap_{n\geqslant 0} M_n=Q$ — инвариантный компакт. Назовем любое инвариантное $\Omega \subset Q$ сильно соленоидальным.

Теорема 1. *Пусть $Q=\bigcap_{n\geqslant 0} M_n$ — сильно соленоидальное множество. Найдутся минимальное множество $\Omega' \subset Q$, максимальное по включению среди ω-предельных множеств множество $\omega(z)=\Omega'' \subset Q$ и множество $\Omega'''=Q \cap \Omega(f)$ такие, что: 1) для любого $y \in Q$ $\omega(y)=\Omega''=Q \cap \overline{\mathrm{Per}\, f}$, $\Omega''' \diagdown \Omega'$ состоит из изолированных точек и Ω''/Ω' либо пусто, либо счетно; 2) для любого y' $\omega(y') \cap Q \neq \varnothing$ влечет $\Omega' \subset \omega(y') \subset \Omega'' \subset \Omega'''$, причем тогда f/Q с помощью одного и того же отображения φ почти точно на Ω''' и $\omega(y')$ полусопряжено со сдвигом τ на элемент $(1, 1, \ldots)$ в «соленоиде» $H(D)$, и на $\omega(y')$ полусопряжение φ не более, чем двукратно.*

Доказательство. Выберем n и i так, что $M_n^{(i)}$ — дуга, не содержащая узлов. Из результатов работ [1, 2], относящихся к отображениям отрезка, вытекает утверждение теоремы для отображений отрезка и тем самым для $f^{m_n}/M_n^{(i)}$. Пусть соответствующие множества для $f^{m_n}/M_n^{(i)}$ — это $\tilde{\Omega}''=\omega_{f^{m_n}}(z)$, где $z \in M_n^{(i)}$, $\tilde{\Omega}'=\omega_{f^{m_n}}(y)=Q \cap M_n^{(i)} \cap \overline{\mathrm{Per}\, f}$ для любого $y \in M_n^{(i)}$. Из свойств ω-предельных множеств следует, что для любого $y \in Q$ $\omega_f(y)=$
$=\bigcup_{j=0}^{m_n-1} \omega_{f^{m_n}}(f^j y)$, и так как для некоторого j' $f^{j'}y \in M_n^{(i)}$, то $\omega_f(y)=\bigcup_{j=0}^{m_n-1} f^j\tilde{\Omega}'=\Omega'=Q \cap \overline{\mathrm{Per}\, f}$. Пусть $\Omega''=\omega_f(z)$; тогда $\Omega''=$
$=\bigcup_{j=0}^{m_n-1} f^j\tilde{\Omega}''$. Из определений $\tilde{\Omega}'' \diagdown \tilde{\Omega}' \subset \Omega'' \diagdown \Omega' \subset \bigcup_{j=0}^{m_n-1} f^j(\tilde{\Omega}'' \diagdown \tilde{\Omega}')$, так что $\Omega'' \diagdown \Omega'$ либо пусто (если $\tilde{\Omega}'' \diagdown \tilde{\Omega}'$ пусто), либо счетно (в противном случае). Далее, если $\omega_f(y') \cap Q=\varnothing$, то можно

считать $y' \in M_n^{(i)}$, так что $\omega_{f^{m_n}}(y') \cap Q \cap M_n^{(i)} \neq \varnothing$, откуда по доказанному в [1] $\tilde{\Omega}' \subset \omega_{f^{m_n}}(y') \subset \tilde{\Omega}''$; значит, $\Omega' \subset \omega_f(y') \subset \Omega''$, что и требовалось.

Проверим, что если $\Omega' \subset \omega_f(y') \subset \Omega''$, то между f/Q и сдвигом τ на $(1, 1, \ldots)$ в $H(D)$ (где $D = \{m_n\}_{n=0}^{\infty}$), если полусопряжение φ, почти точное на $\omega_f(y')$. Выберем у каждого M_n связную компоненту $M_n^{(0)}$ так, чтобы они с ростом n убывали по включению. Каждому $x \in Q$ сопоставим последовательность $(r_0(x), r_1(x), \ldots) = \varphi(x)$, где $r_i(x)$ — такое, что $x \in M_i^{(r_i(x))}$ $(i = 0, 1, \ldots)$. Так как связные компоненты каждого M_i находятся на положительном расстоянии друг от друга, то φ непрерывно, а так как для любого n $fM_n^{(0)} \subset M_n^{(1)}$, $fM_n^{(1)} \subset M_n^{(2)}, \ldots fM_n^{(m_n-1)} \subset M_n^{(0)}$, то $\varphi(f(x)) = \tau(\varphi(x))$, т. е. f и τ полусопряжены с помощью φ (τ — сдвиг на $(1, 1, \ldots)$ в $H(D)$). Если $g = (r_0, r_1, \ldots) \in H(D)$, то $r_{n+1} \equiv r_n (\mathrm{mod.}\, m_n)(\forall n)$, так что $\varphi^{-1}(g) = \bigcap_{n \geq 0} f^{r_n} M_n^{(0)}$ — непустой связной компакт, что доказывает монотонность и сюръективность φ. Пусть $x \in \Omega(f) \cap Q$; тогда $x \in \varphi^{-1}(\varphi(x))$, причем если $x \in \mathrm{int}\{\varphi^{-1} \times (\varphi(x))\}$, то $\mathrm{int}\{\varphi^{-1}(\varphi(x))\}$ представляет собой даже сильно блуждающую окрестность x-противоречие с $x \in \Omega(f)$. Поэтому и так как существует $N < \infty$ такое, что для любого связного $D' \subset K$ $\mathrm{card}(\partial D') \leq N$, имеем: φ полусопрягает f/Q и τ почти точно на $\Omega(f) \cap Q = \Omega'''$, откуда, очевидно, следует, что то же самое φ полусопрягает f/Q и τ почти точно на $\omega_f(y')$ (так как $\Omega' \subset \omega_f(y') \subset \Omega''$). Наконец, $f/\omega_f(y')$ сюръективно и если $x \in \omega_f(y')$, то найдется натуральное t, не содержащая узлов замкнутая дуга Σ и $g \in H(D)$ такие, что $\varphi^{-1}(g) = \Sigma$, $f^t(\Sigma) \subset \varphi^{-1}(\tau^t(g)) = \varphi^{-1}(\varphi(x))$. Значит, $\varphi^{-1}(\varphi(x)) \cap \omega_f(y') = f^t(\Sigma \cap \omega_f(y')) \subset f^t(\partial\Sigma)$, откуда $\mathrm{card} \times \{\varphi^{-1}(\varphi(x)) \cap \omega_f(y')\} \leq 2$. Наконец, пусть в $\Omega''' \setminus \Omega'$ есть неизолированная точка ζ. Тогда в любой ее окрестности U есть бесконечно много отличных от ζ точек Ω'''. Значит, найдутся $k = k(U)$ и $r = r(U)$ такие, что $M_k^{(r)} \subset U$, и так как $M_k^{(r)} \cap \Omega' \neq \varnothing$, то $\zeta \in \Omega'$ — противоречие. Теорема доказана.

Лемма 2. *Пусть U — компактная неблуждающая окрестность, $\overline{\mathrm{orb}\, U} = K$. Тогда все точки $\bigcap_{n \geq 0} f^n K$, кроме, возможно, конечного числа, принадлежат $\bigcup_{n \geq 0} \mathrm{int}(f^n U)$.*

Доказательство. Пусть m — наименьшее натуральное такое, что $f^m U \cap U \neq \varnothing$. Тогда $f^{m+r} U \cap f^r U \neq \varnothing$ $(\forall r)$, так что $A_0 = \bigcup_{i \geq 0} f^{mi} U$, $A_1 = \bigcup_{i \geq 0} f^{mi}(fU), \ldots, A_{m-1} = \bigcup_{i \geq 0} f^{mi}(f^{m-1}U)$ — связные множества и $K = \bigcup_{j=0}^{m-1} \bar{A}_j$. Значит, $\{K \setminus \bigcup_{n \geq 0} f^n U\}$ конечно, а $F = \{K \setminus \bigcup_{n \geq 0} \mathrm{int}(f^n U)\}$ — не более, чем счетно и замкнуто, и достаточно рассмотреть случай, когда F — счетно. Для дуг, соеди-

няющих точки ζ, ζ', будем использовать, если не возникнет двусмысленностей, «интервальные» обозначения $[\zeta, \zeta']$, (ζ, ζ') и т. п.

Можно считать, что $m=1$, $\overline{A}_0=K$, $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность точек из F, $x_k \underset{k\to\infty}{\to} y$, все точки $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ лежат на дуге $[x_0, y]$, не содержащей узлов и соединяющей x_0 и y, $[x_0, y] \cap F = \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $x_{k+1} \in [x_k, y)$ $(\forall k)$ (x_k стремятся к y «монотонно»). Тогда при $s \geqslant 0$ $f^sU \cap [x_1, y] \neq \varnothing$ влечет существование $i_s \geqslant 1 : f^sU \subset [x_{i_s}, x_{i_s+1}]$, и так как $f^{s+1}U \cap U \neq \varnothing$, то $f^{s+1}U \subset [x_{i_s-1}, x_{i_s+2}]$ (иначе x_{i_s+2} или x_{i_s-1} принадлежат $\operatorname{int}(f^{s+1}U)$). Поэтому для $j \geqslant 1$ $f[x_j, x_{j+1}] \subset [x_{j-1}, x_{j+2}]$. Если $i_s \geqslant 1$, то $i_{s-1} \in \{i_s-1, i_s, i_s+1\}$, так как если $f^{s-1}U \not\subset [x_{i_s-1}, x_{i_s+1}]$, то $\operatorname{int}(f^sU)$ содержит x_{i_s-1} или x_{i_s+1} — противоречие.

Выберем наименьшее $s : i_s \geqslant 2$. Тогда по доказанному $i_s = 2$, $i_{s-1} = 1$. Покажем, что $i_r \nearrow \infty$ (нестрого). Иначе есть j и точки $\alpha, \beta \in [x_j, x_{j+1}]$ такие, что $f\alpha \in [x_{j+1}, x_{j+2}]$, $f\beta \in [x_{j-1}, x_j]$, $j \geqslant 2$. Значит, поскольку $f[x_j, x_{j+1}] \subset [x_{j-1}, x_{j+2}]$, т. е. точка $\gamma \in [x_j, x_{j+1}] : f\gamma = \gamma$. Выберем n так, что $f^nU \ni \gamma$ и k' так, что $\bigcup\limits_{i=0}^{n} f^iU \cap \cap \{x_k\}_{k\geqslant k'} = \varnothing$, а затем $m \geqslant n$ так, что $f^mU \ni x_{k_1}$, где $k_1 \geqslant k'+1$. Тогда ввиду связности либо $\operatorname{int}(f^mU) \ni x_{k'}$, либо $\operatorname{int}(f^mU) \ni x_{k_1+1}$ — противоречие, т. е. $i_r \nearrow \infty$ (нестрого). По доказанному множество $B = K \setminus A_0$ конечно. Тогда $f^nK = f^nB \cup (\bigcup\limits_{r=n}^{\infty} f^rU)$. Значит, для $n \geqslant s$, где s выбрано выше, имеем: $\bigcup\limits_{r=n}^{\infty} f^rU \subset [x_{i_n}, y]$, откуда ввиду связности и замкнутости f^nK следует, что $f^nK = [\zeta_n, y]$ — дуга и $[\zeta_n, y] \subset [x_{i_n}, y]$. Так как $i_n \underset{n\to\infty}{\nearrow} \infty$ (нестрого), то $\bigcap\limits_{n\geqslant 0} f^nK = y$, что доказывает лемму.

Теорема 2. *Пусть $E = E(K, f)$ бесконечно. Тогда E совершенно, f/E транзитивно, и если $\omega(z) \supset E$, то $\omega(z) = E$. При этом существует многообразие $\widetilde{K}$ и транзитивное отображение $g : \widetilde{K} \to \widetilde{K}$ такие, что f полно и почти точно на E полусопряжено с g.*

Доказательство. Докажем ряд утверждений.

Утверждение А. У любого $x \in E$ есть сторона $T : \overline{\operatorname{orb} V_T(x)} = K$ для любой $V_T(x)$.

Доказательство утверждения А. Пусть $T_1, \ldots, T_n$ — все стороны точки x, $V_{T_1}, \ldots, V_{T_n}$ — полуокрестности x с неплотными в K орбитами. Можно считать k таким, что для $1 \leqslant i \leqslant k$ любая $W_{T_i}(x)$ — неблуждающая, а $V_{T_{k+1}}, \ldots, V_{T_n}$ — блуждающие полуокрестности. Отсюда $\overline{\operatorname{orb} V_{T_i}} = M_i$ — инвариантное замкнутое многообразие $(1 \leqslant i \leqslant k)$; пусть $M = \bigcup\limits_{i=1}^{k} M_i$. Если M содержит

некоторую окрестность U точки x, то $M = K$. В противном случае можно считать, что $W_{T_{k+1}} \subset V_{T_{k+1}}, \ldots, W_{T_l} \subset V_{T_l}$ — полуокрестности x, взятые так, что $M \cap (\bigcup_{i=k+1}^{l} W_{T_i}) = \varnothing$, со всех возможных торон x. Можно считать также, что для i, $j \in \{k + 1, \ldots, l\}$ $\operatorname{orb} W_{T_j} \cap W_{T_i} \neq \varnothing$ влечет, что для некоторого $n \geqslant 1$ $f^n W_{T_j} \supset W_{T_i}$ или для любого $y \in W_{T_i}$ найдутся сколь угодно большие $n : f^n W_{T_j} \ni y$. В первом случае $\operatorname{orb}(f W_{T_j}) \supset W_{T_i}$, во втором то, что W_{T_i} — блуждающая влечет, что $f^n W_{T_j} \not\subset W_{T_i}$ $(\forall n)$ и снова $\operatorname{orb}(f W_{T_j}) \supset W_{T_i}$.

Так как $V = x \cup (\bigcup_{i=1}^{n} V_{T_i})$ — окрестность x, то $\overline{\operatorname{orb} V} = K$, и инвариантность M влечет, что для любого $i \in \{k + 1, \ldots, l\}$ есть $j = j(i) \in \{k + 1, \ldots, l\}$: $\operatorname{orb} W_{T_j} \cap W_{T_i} \neq \varnothing$, а значит, $\operatorname{orb}(f W_{T_j}) \supset W_{T_i}$. Поэтому есть числа $\{i_1, \ldots, i_r\} \subset \{k + 1, \ldots \ldots, l\}$ такие, что $\operatorname{orb}(f W_{T_{i_1}}) \supset W_{T_{i_2}}, \ldots, \operatorname{orb}(f W_{T_{i_2}}) \supset W_{T_{i_1}}$, откуда $\operatorname{orb}(f W_{T_{i_1}}) \supset W_{T_{i_1}}$ — противоречие с тем, что $W_{T_{i_1}}$ блуждает. Итак, $\bigcup_{i=1}^{k} \overline{\operatorname{orb} V_{T_i}} = \bigcup M_i = K$. В соответствии с леммой 2, $\{K \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{n>0} \operatorname{int}(f^n V_{T_i})\}$ конечно, и ввиду бесконечности E найдется $y \in E$, n и i такие, что $y \in \operatorname{int}(f^n V_{T_i})$, откуда $\overline{\operatorname{orb} V_{T_i}} = K$ — противоречие, доказывающее утверждение А.

Утверждение Б. Если C' связно и $y \in \operatorname{int}(f^n C') \cap E$ для некоторого n, то $y \in f^n (\operatorname{int}(C') \cap E)$ и $\operatorname{int}(C') \cap E \neq \varnothing$.

Доказательство утверждения Б. Выберем компакт $C \subset \operatorname{int} C'$ так, что $y \in \operatorname{int}(f^n C) \cap E$. Пусть S — сторона y, $\overline{\operatorname{orb} W_S(y)} = K$ для любой полуокрестности $W_S(y)$. Если в C есть точка z, для любой окрестности U которой найдется S-полуокрестность y, принадлежащая $f^n U$, то $f^n z = y$ и $z \in \operatorname{int}(C') \cap E$, что и требуется. Пусть такого z нет; тогда есть покрытие C окрестностями, образы которых не пересекаются с соответствующими S-полуокрестностями y'. Выбирая конечное подпокрытие, найдем $W_S(y) : W_S(y) \cap \cap f^n C = \varnothing$ — противоречие $y \in \operatorname{int}(f^n C)$.

Утверждение В. E совершенно.

Д о к а з а т е л ь с т в о утверждения В. Пусть $x \in E$, T — такая сторона, что $\overline{\operatorname{orb} W_T(x)} = K$ для любой T-полуокрестности x. Тогда по лемме 1, так как E бесконечно, для любой полуокрестности x $W_T(x)$ найдется $n : \operatorname{int}(f^n W_T(x)) \cap E \neq \varnothing$, откуда по утверждению Б $E \cap W_T(x) \neq \varnothing$.

Утверждение Г. $f|E$ транзитивно.

Д о к а з а т е л ь с т в о утверждения Г. Докажем, что если U открыто, $U \cap E \neq \varnothing$, то $\overline{\operatorname{orb}(U \cap E)} = E$. По лемме 1 для всех,

кроме конечного числа, точек $y \in E$ найдется $n : \operatorname{int}(f^n U) \ni y$. откуда по утверждению Б найдется $z \in U \cap E : f^n z = y$. Значит, $\overline{\operatorname{orb}(U \cap E)} = E$, что и требовалось.

Для дальнейшего рассмотрим множество $K \setminus E$. Если $K = E$, то оставшиеся недоказанными утверждения теоремы очевидны. Если $K \neq E$, то E не имеет внутренности и $K \setminus E$ состоит из счетного числа компонент $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$. Все они, кроме, возможно, конечного набора $\{D_i\}_{i=1}^{m}$, являются дугами, замыкания которых не содержат узлов K. Так как E совершенно, то отсюда $\bar{D}_i \cap \bar{D}_j = \varnothing$, если только $j > m$. Пусть $D = \bigcup_{i=1}^{m} \bar{D}_i$, $\{D^{(i)}\}_{i=1}^{m'}$ — связные компоненты D. Можно считать, что $D^{(1)} = \bigcup_{i=1}^{s_1} D_i, \ldots, D^{(m')} = \bigcup_{i=s_{m'-1}}^{m} D_i$, где $D^{(1)}, \ldots, D^{(m')}$ попарно не пересекаются. Т. к. E совершенно, то $\operatorname{int}(D^{(i)}) \cap E = \varnothing$ $(1 \leqslant i \leqslant m')$ и $D^{(i)} \cap E = \partial D^{(i)}$ конечно. Множества $\{D^{(j)}\}_{j=1}^{m'}$ вместе с множествами $\{\bar{D}_i\}_{i=m+1}^{\infty}$ образуют семейство попарно не пересекающихся множеств $\{D^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$.

Утверждение Д. Имеем: $\operatorname{int}(fD^{(i)}) \cap E = \varnothing$ $(\forall i)$, так что однозначно определено j такое, что $fD^{(i)} \subset D^{(j)}$.

Доказательство утверждения Д. Если $\operatorname{int}(fD^{(i)}) \cap E \neq \varnothing$, то по утверждению Б $\operatorname{int}(D^{(i)}) \cap E \neq \varnothing$ — противоречие.

Утверждение Е. Если $\omega(z) \supset E$, то $\omega(z) = E$.

Доказательство утверждения Е. Пусть $\omega(z) \supset E \cup y$, где $y \notin E$, для определенности $y \in \operatorname{int} D^{(1)}$. Можно считать, что $z \in \operatorname{int} D^{(1)}$ и для некоторого $n \geqslant 1$ $f^n z \in \operatorname{int} D^{(1)}$. Утверждение Д влечет, что $\operatorname{orb} z \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} f^i D^{(1)}$, откуда $E = \omega(z) \cap E \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} \{f^i D^{(1)} \cap E\}$ а последнее множество конечно по выбору множеств $D^{(i)}$ — противоречие.

Докажем оставшуюся часть теоремы. Нам понадобится такой факт: если Γ — дуга, Π — дуга, $F \subset \Gamma$ — совершенно, то существует стандартная монотонная сюръекция $\tilde{\varphi} : \Gamma \to \Pi$, склеивающая дополнительные к F дуги и только их; $\tilde{\varphi}$ однозначно определяется своим значением в одном из концов Γ, совпадающим с одним из концов Π. Пусть $K = \bigcup_{i=1}^{t} \Gamma_i$, где Γ_i — замкнутые дуги, пересекающиеся не более, чем в своих концах, и не содержащие внутри себя узлов. Отображение φ_i определим на каждой дуге Γ_i как «склеивающее» дополнительные к $\Gamma_i \cap E$ дуги и только их и переводящее Γ_i в некоторую дугу Π_i (точку при $\Gamma_i \cap E$ конечном). Считая при этом, что концы дуг Γ_i переходят для соответствующих φ_i в одну и ту же точку и что дополнительных точек пересечения между Π_i нет, получим, очевидно, непрерывную монотонную сюръекцию $\tilde{\varphi} : K \to \tilde{K}$, где $\tilde{K}$ — многообразие, причем для любого $x \in \tilde{K}$ $\varphi^{-1}(x)$ — это точка или одно из множеств $\{D^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ и $\tilde{\varphi}^{-1}(x) \cap E = \partial\{\tilde{\varphi}^{-1}(x)\}$, так что $\tilde{\varphi}$ обладает всеми свойствами

полного и почти точного на E полусопряжения. Проверим, что для некоторого транзитивного $g: \tilde{K} \to \tilde{K}$ $\tilde{\varphi} \circ f = g \circ \tilde{\varphi}$. Если $z \in \tilde{K}$, то из утверждения Д следует, что $\tilde{\varphi}(f(\tilde{\varphi}^{-1}(z))) \underset{\text{def}}{\equiv} g(z)$ — точка; определенное так отображение g обладает свойством $\varphi \circ f = g \circ \varphi$. Из построения φ следует, что если $z \in \tilde{K}$, то можно выбрать правое обратное $\tilde{\varphi}$ отображение $\psi: \tilde{K} \to K$ $(\tilde{\varphi} \circ \psi = \mathrm{id}/\tilde{K})$ непрерывным в точке z, т. е. так, что если $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$, то $g(z_n) = \tilde{\varphi}(f(\Psi(z_n))) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$ $\to g(z) = \tilde{\varphi}(f(\psi(z)))$, что доказывает непрерывность g. Далее, g транзитивно, так как f/E транзитивно. Теорема доказана.

Теорема S (см. [3]). *Транзитивное отображение связного многообразия без циклов есть иррациональный сдвиг в окружности.*

Если $f: K \to K$ — непрерывно, $K = \bigcup\limits_{j=1}^{d} K_j$ — многообразие со связными компонентами $\{K_j\}_{j=1}^{d}$, то ему соответствует отображение $\eta_f: \{1, \ldots, d\} \to \{1, \ldots, d\}$ такое, что $f(K_j) \subset K_{\eta_f}(j)$. Значит, существует множество $\{j_1, \ldots, j_r\} \subset \{1, \ldots, d\}$ и число $N = N(f)$ такие, что $\tilde{K} = \bigcup\limits_{i=1}^{r} K_{j_i}$ — f — инвариантный компакт, $f^N K \subset \tilde{K}$, для любого n $f^n K \cap K_{j_i} \neq \varnothing$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$, отображение $\eta_f/\{j_1, \ldots, j_r\}$ — подстановка, распадающаяся на несколько циклических подстановок, причем для сюръективных f $\{j_1, \ldots, j_r\} = \{1, \ldots, d\}$. Эти соображения позволяют сформулировать в большей общности следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть* $f: K \to K$, $\mathrm{Per}\, f = \varnothing$. *Тогда для некоторого* $\tilde{n}$ $f^{\tilde{n}} K = \bigcap\limits_{i>0} f^i K = \tilde{K}$, $f/\tilde{K}$ *циклически переставляет наборы компонент связности* $\tilde{K}$ $\{\tilde{K}_1, \ldots, \tilde{K}_{r_1}\}$, $\{\tilde{K}_{r_1+1}, \ldots, \tilde{K}_{r_2}\}, \ldots,$ $\{\tilde{K}_{r_{k-1}+1}, \ldots, \tilde{K}_{r_k}\}$ (*где* $\tilde{K} = \bigcup\limits_{i=1}^{r_k} \tilde{K}_i$), *причем* $f/\bigcup\limits_{i=1}^{r_1} \tilde{K}_i$ *обладает такими свойствами* (*аналогичными свойствам* $f/\bigcup\limits_{i=r_1+1}^{r_2} \tilde{K}_i, \ldots,$ $\ldots, f/\bigcup\limits_{i=r_{k-1}+1}^{r_k} \tilde{K}_i$).

1. *Существует бесконечное минимальное множество* $E_1 = E(\bigcup\limits_{i=1}^{r_1} \tilde{K}_i, f)$ *такое, что для любого* $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{r_1} \tilde{K}_i$ $\omega(x) = E_1$.

2. *Отображение* $f/\bigcup\limits_{i=1}^{r_1} \tilde{K}_i$ *полно и почти точно (не более, чем двукратно) на* E_1 *полусопряжено с отображением* g/S, где $S = \bigcup\limits_{i=1}^{r_1} S_i$ — *объединение непересекающихся окружностей, причем* $g(S_1) = S_2, \ldots, g(S_{r_1}) = S_1$, g^{r_1}/S_i *есть поворот на некоторый иррациональный угол* β_1.

Доказательство. Покажем, что есть $\tilde{n}: f^{\tilde{n}}K = \bigcap\limits_{i\geq 0} f^i K$. Пусть $\bigcap\limits_{i\geq 0} f^i K = \tilde{K}$; тогда $\tilde{K}$ — подмногообразие. Если $\tilde{K}$ открыто, то $(K\setminus\tilde{K}) \supset (K\setminus\tilde{K}) \cap fK \supset (K\setminus\tilde{K}) \cap f^2K \supset \ldots$ — убывающая последовательность компактов с пустым пересечением, так что найдется $\tilde{n}: (K\setminus\tilde{K}) \cap f^{\tilde{n}}K = \varnothing$, откуда $\tilde{K} = f^{\tilde{n}}K$. Пусть $\tilde{K}$ не открыто и $\partial\tilde{K} = \tilde{K}\setminus \operatorname{int}\tilde{K} \neq \varnothing$; ясно, что $\partial\tilde{K}$ конечно. Поскольку $\operatorname{Per} f = \varnothing$, т. е. $n': f^{n'}(\partial\tilde{K}) \subset \operatorname{int}\tilde{K}$. Значит, есть окрестность $\tilde{G} \supset \tilde{K}: f^{n'}\tilde{G} \subset \tilde{K}$. Если $f^iK\setminus\tilde{G} \neq \varnothing$ $(\forall i)$, то компактность влечет, что $\tilde{K}\setminus\tilde{G} \neq \varnothing$ — противоречие; значит, есть $i': f^{i'}K \subset \tilde{G}$, откуда $f^{i'+n'}K \subset \tilde{K}$ и $f^{i'+n'}K = \bigcap\limits_{i\geq 0} f^i K$.

Проведенные выше рассуждения влекут, что K связно и f сюръективно, т. е. $r_1 = 1$, $\tilde{K} = K$. Пусть $x \in \omega(x)$. Свойства пролонгации влекут, что $P(x) = M$ — инвариантное подмногообразие, а из определения следует, что если $y \in \operatorname{orb} x \cap \operatorname{int} M$, то $P_M(y) = M$, т. е. $\operatorname{orb} x \cap \operatorname{int} M \subset E(M, f)$; отсюда, очевидно, $\omega(x) \subset E(M, f)$. Значит, так как $\operatorname{Per} f = \varnothing$, то $E(M, f)$ бесконечно. Покажем, что $M = K$. Иначе пусть $\bigcup\limits_{n\geq 0} f^{-n}(\operatorname{int} M) = G$. Если $G = K$, то есть $N: K = \bigcup\limits_{n=0}^{N} f^{-n}(\operatorname{int} M)$ — противоречие с сюръективностью f, так что $G \neq K$. Если $\alpha \in \partial M$, т. е. $i = i(\alpha): f^i\alpha \in \operatorname{int} M$ (так как $\operatorname{Per} f = \varnothing$), откуда $M \subset G$, а G и $\bar{G}$ f — инвариантны. Пусть M' — связная компонента M, m — такое, что $f^m M' \subset M'$, $G' \supset M'$ — связная компонента G. Тогда, так как $\partial G' \cap G' = \varnothing$, $f^i\{\partial G'\} \cap G = \varnothing$ $(\forall i \geq 0)$, откуда $f^m(\partial G') \subset \partial G'$ — противоречие с $\operatorname{Per} f = \varnothing$.

Итак, $K = M$, $E = E(K, f)$ бесконечно. По теореме 2 есть полное почти точное на E полусопряжение φ f/K с транзитивным отображением $g/\tilde{K}$, где $\tilde{K}$ — связное (ввиду связности K) многообразие. Если у g есть цикл $\operatorname{orb}_g p$, то $\varphi^{-1}(p) \cap E$ — конечное f-инвариантное множество — противоречие с $\operatorname{Per} f = \varnothing$. Значит, по теореме S g — иррациональный сдвиг в окружности S^1. Пусть $y \in K$; тогда $\varphi(\omega_f(y)) = S^1$. Если $z \in E$, $U \ni z$ — окрестность z, то $\varphi(K\setminus U) \neq S^1$; значит, $\omega_f(y) \supset E$, а из рассуждений предыдущего абзаца $\omega_f(y) \subset E$, откуда $\omega_f(y) = E$. Осталось заметить, что так как f/E сюръективно, а сдвиг g — гомеоморфизм, то для любого $\zeta \in S^1$ и любого $n \geq 0$ имеем: $f(\partial(\varphi^{-1} \circ g^{-n}(\zeta))) = \partial(\varphi^{-1}(\zeta))$, так что все множества $\partial(\varphi^{-1}(\zeta)) \cap E$ равномощны и, значит, состоят из не более, чем двух точек (так как для любого ζ найдется n такое, что $\operatorname{card}(\partial(\varphi^{-1} \circ g^{-n}(\zeta))) \leq 2$). Теорема доказана.

Для непрерывных $f: K \to K$ рассмотрим бесконечные множества $F(M) = E(M, f/M)$, построенные по инвариантным подмногообразиям M. При $\operatorname{Per} f/M \neq \varnothing$ будем называть $F(M)$ базисными и обозначать $B(M)$; при $\operatorname{Per} f/M = \varnothing$ будем называть $F(M)$ окружностными и обозначать $S(M)$. Максимальные по включению среди

ω-предельных множеств циклы назовем множествами рода 0, их объединение для непрерывного f обозначим X_f. Пусть $\omega(f) \underset{\text{def}}{\equiv} \equiv \bigcup \omega_f(x)$; центр f обозначим $C(f)$.

Теорема 4. *Существуют не более, чем счетное семейство множеств $\{B(M_i)\}_{i=1}^{b}$, конечное семейство множеств $\{S(\tilde{M}_i\}_{i=1}^{s}$ и семейство пар сильно соленоидальных множеств $\{\Omega_\alpha \subset \Omega''_\alpha\}_{\alpha \in A}$, где $\Omega''_\alpha \neq \Omega_\alpha$ для не больше, чем счетного набора индексов, причем:* 1) $\overline{\operatorname{Per} f} = \bigcup_{i=1}^{b} B(M_i) \cup (\bigcup_{\alpha \in A} \Omega'_\alpha) \cup X_f \subset C(f) = \bigcup_{i=1}^{b} B(M_i) \cup (\bigcup_{\alpha \in A} \Omega'_\alpha) \cup (\bigcup_{i=1}^{s} S(\tilde{M}_i)) \cup \bigcup X_f \subset \omega(f) = \bigcup_{i=1}^{b} B(M_i) \cup (\bigcup_{\alpha \in A} \Omega''_\alpha) \cup (\bigcup_{i=1}^{s} S(\tilde{M}_i)) \cup X_f$; 2) s *не больше зависящего только от топологии K максимального числа попарно не пересекающихся замкнутых кривых в K.*

Доказательство. Пусть $\omega(x) \not\subset X_f$; по доказанному в [4] это влечет бесконечность $\omega(x)$. Если $\omega(x)$ сильно соленоидально, то есть максимальное ω — предельное сильно соленоидальное множество $\Omega''_\alpha \supset \omega(x)$. Пусть $\omega(x)$ не сильно соленоидально; рассмотрим семейство L f-инвариантных замкнутых подмногообразий $M \supset \omega(x)$: $: M = \bigcup_{i=1}^{l(M)} M_i$ — разложение M на компоненты связности, $fM_i \subset \subset M_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, l(M) - 1)$, $fM_{l(M)} \subset M_1$. Тогда, так как $\omega(x)$ не сильно соленоидально, $\max\limits_{M \in L} l(M) = l < \infty$ и L удовлетворяет условиям леммы Цорна, так что в L есть минимальный элемент $\hat{M}$, $l(\hat{M}) = \hat{l}$. Пусть $y \in \omega(x) \cap \operatorname{int} \hat{M}$, тогда $P(y) \subset \hat{M}$ — инвариантное подмногообразие и, очевидно, $P(y) \in L$. По выбору $\hat{M}$ $P(y) = \hat{M}$, откуда $\omega(x) \cap \operatorname{int} \hat{M} \subset F(\hat{M})$. Если $z \in (\omega(x) \cap \partial\hat{M}) \setminus \operatorname{Per} f$, то, очевидно, найдутся $n \geqslant 1$ и $z' \in \omega(x) \cap \operatorname{int} \hat{M}$: $f^n z' = z$, откуда $z \in F(\hat{M})$. В работе [4] доказано, что если Ω — ω — предельное множество, то любая точка цикла из Ω не изолирована в Ω ($\operatorname{Card} \Omega = \infty$).

Таким образом, $\omega(x) \cap \partial\hat{M} \cap \operatorname{Per} f \subset F(\hat{M})$, откуда $\omega(x) \subset F(\hat{M})$. Легко видеть, что третье из равенств, доказываемых в теореме, проверено.

В [4] для отображения отрезка f доказано, что $\omega(f) = \{x:$ у x есть сторона T такая, что для любой $V_T(x)$ есть $n: f^n V_T(x) \cap V_T(x)$ невырождено$\}$. Теми же методами легко доказать, что то же верно для отображений многообразий. Значит, у нас $\omega(f)$ замкнуто, так что $\overline{\operatorname{Per} f} \subset C(f) \subset \omega(f)$. Если есть множество $B(M_i)$, то f/M_i монотонно полусопряжено с транзитивным отображением $g: \hat{K} \to \hat{K}$ многообразия, $\operatorname{Per} g \neq \varnothing$, а для таких g в [3] доказано, что меры с носителями на циклах плотны во всех инвариантных мерах и что есть меры с носителем $\hat{K}$, откуда, очевидно, $\overline{\operatorname{Per} g} = \hat{K}$ и, значит, $B(M_i) \subset \overline{\operatorname{Per}} f$; $\Omega_\alpha \subset \overline{\operatorname{Per} f}$ $(\forall \alpha)$, $X_f \subset \overline{\operatorname{Per} f}$ по доказанному. Далее, если $z \in \overline{\operatorname{Per}} f$, т. е. $x: z \in \omega(x)$; но из доказанного $z \notin \Omega''_\alpha \setminus \Omega_\alpha$,

$z \notin S(\tilde{M}_j)$, что доказывает первое равенство. Наконец, если μ — инвариантная мера, $\operatorname{supp}\mu \subset \Omega''_\alpha$, то для $\zeta \in \Omega''_\alpha\ \omega(\zeta) = \Omega'_\alpha$, очевидно, $\operatorname{supp}\mu = \Omega'_\alpha$; ясно также, что у $f/S(\tilde{M}_j)$ — одна инвариантная мера (прообраз лебеговой при полусопряжении с иррациональным поворотом из теоремы 3), ее носитель — $S(\tilde{M}_j)$. Поэтому для проверки второго равенства достаточно проверить, что множеств $S(\tilde{M}_j)$ конечное число, откуда $\overline{\operatorname{Per} f} \cup (\bigcup_{j=1}^{s} S(\tilde{M}_j))$ замкнуто и, значит, совпадает с $C(f)$. Из теоремы 3 следует, очевидно, что если есть множество $S(\tilde{M})$, то в $\tilde{M}$ есть замкнутая кривая и что разным $S(\tilde{M})$ и $S(\tilde{M}')$ соответствуют непересекающиеся $\tilde{M}$ и $\tilde{M}'$, что и требовалось.

Осталось проверить счетность семейства $\{B(M_i)\}$. Ясно, что семейство $B(M_i)$ таких, что $B(M_i) = M_i$, не более, чем счетно. Для других $B(M_i)$ выберем из дуг, дополнительных в M_i к $B(M_i)$ какую-нибудь блуждающую и сопоставим $B(M_i)$ ее конец, принадлежащий $B(M_i)$ и являющийся концом одной из компонент $K \setminus \overline{\operatorname{Per} f}$. Так как по утверждению А из доказательства теоремы 2 у любой точки $x \in B(M_i)$ есть сторона $T : \overline{\operatorname{orb} V_T(x)} = M_i$ для всех малых $V_T(x)$, то в одной точке пересекается не более $b(K)$ множеств $B(M_i)$, где $b(K)$ — максимальное число сторон у точки из K. Поскольку концов компонент множества $K \setminus \overline{\operatorname{Per} f}$ не более, чем счетное число, то теорема доказана.

Список литературы: 1. *Шарковский А. Н.* Притягивающие множества, не содержащие циклов.— Укр. мат. журн., 1968, **20**, № 1, с. 136—142. 2. *Блох А. М.* О разложении динамических систем на отрезке.— Успехи мат. наук, 1983, 38, № 5, с. 179—180. 3. *Блох А. М.* О транзитивных отображениях одномерных разветвленных многообразий.— В кн.: Дифференциально-разностные уравнения и задачи математической физики. К., 1984, с. 3—11. 4. *Шарковский А. Н.* Об ω-предельных множествах дискретных динамических систем: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.—К., 1967.—9 с.

Поступила в редколлегию 14.06.84

УДК 517.968

Ю. В. ГАНДЕЛЬ, И. К. ЛИФАНОВ

О РЕШЕНИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАДАЧИ РОБЕНА

В настоящей заметке речь пойдет о новом подходе к решению основной задачи электростатики [1,2] в двумерном случае. Он основан на применении метода дискретных особенностей [3,4] к системе сингулярных интегральных уравнений рассматриваемой задачи, которая состоит в нахождении равновесного распределения зарядов на (бесконечных) цилиндрических проводниках (образующие цилиндров параллельны одному направлению — пусть это ось z декартовой системы координат), при котором поле внутри проводников отсутствует. Пусть линии пересечения цилиндров с плоскостью xOy —

гладкие кривые L_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, среди которых могут быть как замкнутые, так и разомкнутые. Обозначим q_k — полный заряд, приходящийся на единицу длины вдоль оси z соответствующего цилиндра, $\sigma_k = \sigma_k(x, y)$ — плотность распределения зарядов кривой L_k. Тогда

$$\int\limits_{L_k} \sigma_k \, ds = q_k. \tag{1}$$

Используя выражение напряженности электростатического поля в случае двумерного распределения зарядов и непрерывность тангенциальной составляющей напряженности [5], приходим к системе интегральных уравнений

$$\sum_{k=1}^{m} \int\limits_{L_k} \frac{\sigma_k \, ds \, (\vec{r}_0 - \vec{r}, \vec{\tau}_0)}{2\pi |\vec{r}_0 - \vec{r}|^2} \Bigg|_{(x_0, y_0) \in L_j} = 0, \tag{2}$$

$$j = 1, 2, \ldots, m.$$

где $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$ — радиусы-векторы точек $(x, y) \in L_k$ и (x_0, y_0), а $\vec{\tau}_0$ — единичный вектор, касательный к кривой L_j в точке (x_0, y_0). В случае, когда $k = j$, берется главное значение интеграла.

Пусть $L_1, \ldots, L_{m_1}$ — замкнутые кривые, а $L_{m_1+1}, \ldots, L_m$ — разомкнутые; пусть, далее, при $j = 1, 2, \ldots, m_1$ имеются взаимно однозначные гладкие отображения единичной окружности на замкнутые кривые L_j и $x = x_j(\varphi)$, $y = y_j(\varphi)$ — периодические функции с периодом 2π, а при $j = m_1 + 1, \ldots, m$ имеются взаимнооднозначные гладкие отображения отрезка $[-1; 1]$ на кривые $\overline{L}_j$: $x = x_j(t)$, $y = y_j(t)$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Обозначим $\sigma_j \frac{ds}{d\varphi} = u_j(\varphi)$, $j = 1, 2, \ldots, m_1$, и $\sigma_j \frac{ds}{dt} = \frac{u_j(t)}{\sqrt{1 - t^2}}$, $-1 < t < 1$ при $j = m_1 + 1, \ldots, m$.

Из (2) получаем систему сингулярных интегральных уравнений

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} u_j(\varphi) \, d\varphi + \sum_{k=1}^{m_1} \int\limits_0^{2\pi} K_{jk}(\varphi_0, \varphi) \, u_k(\varphi) \, d\varphi +$$

$$+ \sum_{k=m_1+1}^{m} \int\limits_{-1}^{1} K_{jk}(\varphi_0, t) \, u_k(t) \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = 0, \; j = 1, 2, \ldots, m_1, \tag{3}$$

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{u_j(t)}{t_0 - t} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} + \sum_{k=1}^{m_1} \int\limits_0^{2\pi} K_{jk}(t_0, \varphi) \, u_k(\varphi) \, d\varphi +$$

$$+ \sum_{k=m_1+1}^{m} \int\limits_{-1}^{1} K_{jk}(t_0, t) \, u_k(t) \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = 0, \; -1 < t < 1, \tag{4}$$

где все гладкие функции K_{jk} (2π-периодические по φ и φ_0) известны,

Искомые функции u_k в силу (1) удовлетворяют условиям

$$\int_0^{2\pi} u_k(\varphi)\,d\varphi = q_k,\ k = 1,\ \dots,\ m_1, \tag{5}$$

$$\int_{-1}^{1} u_k(t)\,\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = q_k,\ k = m_1+1,\ \dots,\ m. \tag{6}$$

Система сингулярных интегральных уравнений (3)—(4) с дополнительными условиями (5)—(6) эквивалентна исходной задаче Робена и имеет единственное решение.

Пусть

$$\varphi_{k,\,p} = \frac{2p\pi}{2n_k+1},\ \varphi_{k,\,op} = \frac{2p+1}{2n_k+1}\pi,\ p = 0,\ 1,\ \dots,\ 2n_k. \tag{7}$$

$$t_{k,\,p} = \cos\frac{2p-1}{2n_k}\pi,\ \ t_{k,\,os} = \cos\frac{s}{n_k}\pi, \tag{8}$$

$$p = 1,\ 2,\ \dots,\ n_k;\ s = 1,\ 2,\ \dots,\ n_k - 1.$$

Функции $K_{jk}(\varphi_0, \varphi)$, $1 \leqslant k,\ j \leqslant m_1$; $K_{jk}(\varphi_0, t)$, $1 \leqslant k \leqslant m_1$, $m_1 + 1 \leqslant j \leqslant m$; $K_{jk}(t_0, \varphi)$, $m_1 + 1 \leqslant k \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant m_1$; $K_{kj}(t_0, t)$, $m_1 + 1 \leqslant k,\ j \leqslant m$; 2π-периодические функции по φ_0 и φ; $-1 \leqslant t_0$, $t \leqslant +1$ имеют непрерывные производные до r-го порядка включительно, которые принадлежат гельдеровскому классу $H(\alpha)$. Используя методы, развитые в [3, 4], можно доказать следующий результат.

Теорема. *Если система уравнений (3), (4) при дополнительных условиях (5), (6) однозначно разрешима, то система линейных алгебраических уравнений*

$$\gamma_{j,\,n_j} + \sum_{p=0}^{2n_j} \operatorname{ctg}\frac{\varphi_{j,\,os} - \varphi_{j,\,p}}{2}\,u_{j,\,n_j}(\varphi_{j,\,p})\,\frac{1}{2n_j+1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m_1}\sum_{p=1}^{n_k} K_{jk}(\varphi_{j,\,os}, \varphi_{k,\,p})\,u_{k,\,n_k}(\varphi_{k,\,p})\,\frac{2\pi}{2n_k+1} +$$

$$+ \sum_{k=m_1+1}^{m_1}\ \sum_{p=1}^{n_k} K_{jk}(\varphi_{j,\,os}, t_{k,\,p})\,u_{k,\,n_k}(t_{k,\,p})\,\frac{\pi}{n_k} = 0,$$

$$s = 0,\ 1,\ \dots,\ 2n_j;\ j = 1,\ 2,\ \dots,\ m_1$$

$$\sum_{p=1}^{n_j} u_{j,\,n_j}(\varphi_{j,\,p})\,\frac{2\pi}{2n_j+1} = q_j,$$

$$j = 1,\ 2,\ \dots,\ m_1$$

$$\sum_{p=1}^{n_j} \frac{u_{j,n_j}(t_{j,p})}{t_{j,os}-t_{j,p}} \cdot \frac{1}{n_j} + \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{p=0}^{2n_k} K_{jk}(t_{j,os}, \varphi_{k,p}) u_{k,n_k}(\varphi_{k,p}) \frac{2\pi}{2n_k+1} +$$

$$+ \sum_{k=m_1+1}^{m} \sum_{p=1}^{n_k} K_{jk}(t_{j,os}, t_{k,p}) u_{k,n_k}(t_{k,p}) \frac{\pi}{n_k} = 0,$$

$$s = 1, \ldots, n_j - 1, \; j = m_1 + 1, \ldots, m$$

$$\sum_{p=1}^{n_j} u_{j,n_j}(t_{j,p}) \cdot \frac{\pi}{n_j} = q_j; \;\; (s = n_j), \; j = m_j + 1, \ldots, m,$$

относительно γ_{j,n_j}; $u_{j,n_j}(\varphi j, p), u_{k,n_k}(t_{k,p})$ *при достаточно больших* $n = \min\{n_1, \ldots, n_m\}$ *имеет единственное решение и выполняются следующие соотношения:*

$$\gamma_{j,n_j} \to 0, \; n \to \infty, \; j = 1, 2, \ldots, m_1,$$

$$u_j(\varphi_{j,p}) - u_{j,n_j}(\varphi_{j,p}) = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right), \; n \to \infty$$

$$p = 0, 1, \ldots, 2n_j; \; j = 1, 2, \ldots, m_1;$$

$$u_j(t_{j,s}) - u_{j,n_j}(t_{j,s}) = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right), \; n \to \infty$$

$$s = 1, 2, \ldots, n_j; \; j = m_1 + 1, \ldots, m.$$

Список литературы: 1. *Стеклов В. А.* Основные задачи математической физики/ Под ред. В. С. Владимирова.— 2-е изд.— М.: Наука, 1983.—432 с. 2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Наука, 1968.— 599 с. 3. *Лифанов И. К.* О некорректности и регуляризации численного решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. Докл. АН СССР, 1980, 255, № 5, с. 1046—1050. 4. *Лифанов И. К.*, Матвеев А. Ф. О сингулярном интегральном уравнении на системе отрезков.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1983, вып. 40, с. 104—110. 5. *Смайт В.* Электростатика и электродинамика.— М.: Изд-во иностр. лит., 1954.—604 с.

Поступила в редколлегию 13.04.84.

УДК 513.88

Л. В. ГЛАДУН

О СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ ЧИСЛОВЫМИ ОБЛАСТЯМИ ХАРАКТЕРИСТИКИ БАНАХОВА ПРОСТРАНСТВА И ЕГО ПОДПРОСТРАНСТВ

Пусть X — банахово пространство. Через X^* обозначим его сопряженное. Напомним, что характеристикой тотального линейного подпространства $F \subset X^*$ называется величина

$$r(F) = \inf_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \sup \{|f(x)| : f \in F, \; \|f\| \leq 1\}. \qquad (1)$$

Другие эквивалентные определения характеристики и простейшие ее свойства можно найти, например, в книге [1]. Если $r(F) > 0$. то говорят, что подпространство F нормирующее, или что F нормирует X.

Пусть Y — подпространство банахова пространства X. Рассмотрим оператор $R: X^* \to Y^*$, который ограничивает функционалы из X^* на Y. Если $G \subset Y^*$ — нормирующее подпространство, то по лемме 3 работы [2] подпространство $F = R^{-1}G$ нормирует X, причем $r(F) \geqslant \lambda r(G)$, $\lambda = \frac{1}{3}$. Покажем, что, когда подпространство Y хорошо дополняемо в X, эту оценку можно уточнить.

Теорема. *Пусть банахово пространство $X = Y \oplus Z$, оператор проектирования P пространства X на Y параллельно подпространству Z имеет единичную норму и норма проектора $Q = I - P$ также равна единице. Тогда для каждого нормирующего подпространства $G \subset Y^*$ $r(F) \geqslant \frac{1}{2} r(G)$.*

Доказательство. Так как $\|P\| = 1$ и $\|Q\| = 1$, то можно считать, что $Y^* = Z^{\perp}$, $Z^* = Y^{\perp}$ ($M^{\perp}$ — аннулятор подпространства $M \subset X$ в X^*). Возьмем произвольный элемент $x = y + z$, $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$, $\|x\| = 1$, и рассмотрим функционал $|||x||| = \sup\{|f(x)| : f \in F, \|f\| \leqslant 1\}$. Легко видеть, что каждый элемент $f \in F$ представляется в виде $f = g + u$, где $g \in G$, $u \in Y^{\perp}$. Поскольку $\|x\| = 1$, то отсюда следует, что или $\|y\| \geqslant \frac{1}{2}$, или $\|z\| \geqslant \frac{1}{2}$. В случае, когда $\|y\| \geqslant \frac{1}{2}$, имеем

$$|||x||| \geqslant \sup\{|g(y)| : g \in G, \|g\| \leqslant 1\} \geqslant \frac{1}{2} r(G). \qquad (2)$$

Если же $\|z\| \geqslant \frac{1}{2}$, то

$$|||x||| \geqslant \sup\{|u(z)| : u \in Y^{\perp}, \|u\| \leqslant 1\} = \|z\| \geqslant \frac{1}{2}. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) получаем $|||x||| \geqslant \frac{1}{2} r(G)$ для каждого $x \in X$, $\|x\| = 1$. А это и означает согласно определению (1), что $r(F) \geqslant \frac{1}{2} r(G)$.

Следующий пример показывает, что константу $\lambda = \frac{1}{3}$ в лемме 3 из работы [2] улучшить нельзя.

Пример 1. Пусть $0 \leqslant a \leqslant 1$ и X_a — подпространство $l_\infty(M)$, $M = N \cup \{-1, 0\}$, натянутое на $c_0(N)$ и элементы $e: e(m) = 1$, $m \in M$, и $e_a: e_a(0) = -a$, $e_a(-1) = 1$, $e_a(n) = 0$, $n \in N$, N — натуральные числа. Определение пространств $c_0(M)$, $l_1(M)$ и $l_\infty(M)$ можно найти, например, в [1, с. 7].

Поскольку пространству X_a принадлежит элемент $x = \frac{2}{a+1} e_a + \frac{a-1}{a+1} e$, то стандартным способом (см. [4], с. 186) показывается, что $X_a^* = l_1(M)$. Двойственность задается естественным образом:

$$f(x) = \sum_{m \in M} f(m)\, x(m), \ f \in X_a^*, \ x \in X_a.$$

Выберем в X_a подпространство $Y = c_0(N) \bigoplus [e]$ ($[A]$ обозначает линейную оболочку множества A). Сопряженное пространство Y^* отождествим с фактор-пространством $X_a^*/[f_{-1}]$, где $f_{-1} \in l_1(M)$: $: f_{-1}(-1) = 1$, $f_{-1}(0) = -1$, $f_{-1}(n) = 0$, $n \in N$. Возьмем в Y^* подпространство $H = l_1(N)/[f_{-1}]$. Заметим, что если $y \in Y$ и $\|y\| = 1$, то или $\exists k \in N \ |y(k)| = 1$, или $\lim\limits_{k \to \infty} |y(k)| = 1$. Но тогда для функционалов $f_k \in H : f_k(m) = 0, \ m \in M \setminus \{k\}, \ f_k(k) = 1$, с единичной нормой, имеем $|f_k(y)| = 1$ в первом и $\lim\limits_{k \to \infty} |f_k(y)| = 1$ во втором случаях. А это означает равенство единице характеристики подпространства H, т. е. $r(H) = 1$.

Пусть $F = R^{-1}H = l_1(N) \bigoplus [f_{-1}]$. Покажем, что $r(F) = \frac{1+a}{3+a}$. Сначала для произвольного элемента $x \in X_a$, $\|x\| = 1$, проверим справедливость неравенства $|||x||| \geqslant \frac{1+a}{3+a}$, где $|||x||| = \sup\{f(x)\,| : f \in F, \ \|f\| \leqslant 1\}$. Если $\|x\| = 1$ и $\sup\limits_{k \in N} |x(k)| \geqslant \frac{1+a}{3+a}$, то, как нетрудно убедиться, оно выполняется. Пусть теперь для некоторого элемента $x \in X_a$ $\|x\| = 1$, неравенство не выполняется, причем $\sup\limits_{k \in N} |x(k)| < \frac{1+a}{3+a}$. Каждый элемент $x \in X_a$ однозначно представляется в виде $x = \frac{x(-1) - x(0)}{1+a} e_a + \frac{x(0) + ax(-1)}{1+a} e + y$, где $y \in c_0(N)$. Отсюда следует $\lim\limits_{k \to \infty} x(k) = \frac{x(0) + ax(-1)}{1+a}$. Отметим также, что функционал $f = \frac{1}{2} f_{-1} \in F$ и $\|f\| = 1$. Поэтому для этого элемента x должны выполняться неравенства $|f(x)| = |(x(-1) - x(0))/2| < \frac{1+a}{3+a}$ и $\left|\frac{x(0) + ax(-1)}{1+a}\right| < \frac{1+a}{3+a}$. Объединяя их в систему и решая ее относительно $x(-1)$ и $x(0)$, находим $|x(-1)| < 1$ и $|x(0)| < \frac{3a+1}{3+a}$. Поскольку $\sup\limits_{k \in N} |x(k)| < \frac{1+a}{3+a}$, а $\|x\| = 1$, то или $|x(-1)| = 1$, или $|x(0)| = 1$. То есть получили противоречие. Итак, $|||x||| \geqslant \frac{1+a}{3+a}$ для каждого $x \in X_a$, $\|x\| = 1$. Но элемент

$x_0 \in X_a : x_0(-1) = 1,\ x_0(0) = \frac{1-a}{3+a},\ x(k) = \frac{1+a}{3+a},\ k \in N$, имеет, единичную норму и для всякого $f \in F,\ \|f\| = 1$, имеем

$$|f(x_0)| = |f(-1) + \frac{1-a}{3+a} f(0) + \frac{1+a}{3+a} \sum_{k \in N} f(k)| \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 - \frac{1-a}{3+a}\right) |f(0)| + \frac{1+a}{3+a} \sum_{k \in N} |f(k)| = \frac{1+a}{3+a},$$

так как $f(-1) = -f(0)$ и $\sum_{k \in N} |f(k)| = 1 - 2|f(0)|$. Отсюда следует $|||x_0||| = \frac{1+a}{3+a}$. Тем самым показали, что $r(F) = \frac{1+a}{3+a}$.

Замечание. Мы построили банаховы пространства $X_a,\ 0 \leqslant a \leqslant 1$, каждое из которых содержит подпространство Y такое, что для некоторого $H \subset Y^*$ с единичной характеристикой $r(R^{-1}(H)) = \frac{1+a}{3+a}$. То есть $\lambda = \frac{1+a}{3+a}$. При $a = 0$ получаем $\lambda = \frac{1}{3}$. По-видимому, для всякого $\frac{1}{3} \leqslant \lambda \leqslant 1$ можно привести такой пример пространства X_λ и его подпространства Y, что существует подпространство $H \subset Y^*$ с $r(H) = b$, а $r(R^{-1})(H)) = \lambda b$ для некоторого $0 < b \leqslant 1$.

Для банахова пространства X рассмотрим числовую область характеристики $\mathbf{R}(X) = \{\lambda : \exists F \subset X^*,\ r(F) = \lambda\}$, F — замкнутое по норме тотальное собственное подпространство X^*. Некоторые свойства множества $\mathbf{R}(X)$ изучались в [3]. Естественно поставить вопрос о соотношениях между числовыми областями характеристики пространства X и его подпространств (как известно [1, с. 40] всегда $\mathbf{R}(X) \supset \left(0, \frac{1}{2}\right)$, если X — нерефлексивно). Приведем примеры таких банаховых пространств $X_n,\ n \in N$, каждое из которых содержит некоторое подпространство Y с $\mathbf{R}(Y) = [0, 1]$, в то время как $\mathbf{R}(X_n) = \left[0, \frac{2n+1}{4n+1}\right]$.

Пример 2. Пусть $n \in N$ и X_n — подпространство $l_\infty(M)$, где $M = \{-n, -n+1, \ldots, 0\} \cup N$, натянутое на $c_0(N)$ и элементы $e_0, e_{-1}, \ldots, e_{-n} : e_{-i}(-i) = 1,\ e_{-i}(m) = 0,\ m \in \{0, \ldots, 1-i, -1-i, \ldots, -n\},\ e_{-i}(k) = 1/(n+1),\ k \in N,\ i = \overline{0, n}$.

Рассмотрим в X_n подпространство $Y = c_0(N) \oplus [\sum_{i=0}^{n} e_{-i}]$. Поскольку Y изометрично пространству сходящихся последовательностей (изометрия задается естественным образом), следовательно, $\mathbf{R}(Y) = [0, 1]$ (см. [3]). Покажем, что $\mathbf{R}(X_n) = \left[0, \frac{2n+1}{4n+1}\right]$.

Утверждение. Для каждого замкнутого по норме тотального собственного подпространства $F \subset X_n^*$ $r(F) \leqslant \frac{2n+1}{4n+1}$.

Доказательство. Как легко проверить, $X_n^* = l_1(M)$. Двойственность задается естественным образом. Так как тогда $X_n^{**} = l_\infty(M)$, то достаточно показать [1, с. 39], что для каждого элемента $\varphi \in l_\infty(M)$ выполняется неравенство

$$r(\varphi^\top) = \inf\{\|\lambda\varphi - x\| : x \in X_n,\ \|x\| = 1,\ \lambda \in R\} \leqslant \frac{2n+1}{4n+1} \qquad (4)$$

($\varphi^\top$ — аннулятор φ в пространстве X_n^*).

Пусть $\varphi \in l_\infty(M)$, $\|\varphi\| = 1$ и $a = \sup\limits_{k \in N} |x(k)|$. Если $a > \frac{n}{n+1}$, то $A\varepsilon > 0$ $\exists k_0 \in N$ $a - |\varphi(k_0)| < \varepsilon$. Элемент $x = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha \operatorname{sign} \varphi(-i) e_{-i} + \left(\operatorname{sign}\varphi(k_0) - \frac{\alpha}{n+1} \sum\limits_{i=0}^{n} \operatorname{sign}\varphi(-i)\right) e_{k_0}$, где $\alpha = \frac{(2n+1)(1-a)}{(4n+1)(1+a)}$ и e_{k_0}: $e_{k_0}(m) = 0$, $m \in M \setminus \{k_0\}$, $e_{k_0}(k_0) = 1$, имеет единичную норму и при значении $\lambda = \frac{2(2n+1)}{(4n+1)(1+a)}$ $\|\lambda\varphi - x\| \leqslant \frac{2n+1}{4n+1} + \varepsilon$. Ввиду произвольности ε, отсюда следует, что неравенство (4) в этом случае выполняется.

Если же $a \leqslant \frac{n}{n+1}$, то $\exists i \in \{-n, \ldots, 0\}$ $|\varphi(i)| = 1$, поскольку $\|\varphi\| = 1$. Тогда при $\lambda = \frac{2n}{4n+1}$ и для элемента $x = \operatorname{sign}\varphi(i) e_{-i} - \alpha \operatorname{sign}\varphi(i) \sum\limits_{\substack{k=-n \\ k \neq i}}^{0} e_k$, где $\alpha = \frac{1}{4n+1}$, с единичной нормой, получаем $\|\lambda\varphi - x\| \leqslant \frac{2n+1}{4n+1}$. Тем самым утверждение доказано.

Возьмем теперь $\varphi \in l_\infty(M) : \varphi(-n) = \ldots = \varphi(0) = 1$, $\varphi(k) = -\frac{n}{n+1}$, $k \in N$, и покажем, что $r(\varphi^T) = \frac{2n+1}{4n+1}$. Достаточно проверить справедливость неравенства $\|\lambda\varphi - x\| \geqslant \frac{2n+1}{4n+1}$ для произвольных элементов $x \in X_n$, $\|x\| = 1$, и чисел $\lambda \in R$, $\lambda > 0$.

Пусть существуют элемент $x \in X_n$ с единичной нормой и число $\lambda > 0$, для которых

$$\|\lambda\varphi - x\| < \frac{2n+1}{4n+1}. \qquad (5)$$

Если $\sup\limits_{k \in N} |x(k)| = 1$, то из (5) непосредственно следует $\lambda > \frac{2(n+1)}{4n+1}$ и $x(k) > \frac{1}{4n+1}$ для всех $k \in \{-n, \ldots, 0\}$. Из конструкции про-

странства X_n получаем равенство $\lim\limits_{k\to\infty} x(k) = \sum\limits_{i=0}^{n} x(-i)/(n+1)$. Тогда $\sup\limits_{k\in N} |(\lambda\varphi - x)(k)| \geqslant \lim\limits_{k\to\infty} |(\lambda\varphi - x)(k)| = \frac{\lambda n}{n+1} + \sum\limits_{k=0}^{n} x(-k)/(n+1) > \frac{2n+1}{4n+1}$, что противоречит (5). Если же $\sup\limits_{k\in N} |x(k)| < 1$, то существует $i \in \{-n, \ldots, 0\}$ $|x(i)| = 1$. В этом случае для выполнения (5) необходимо, чтобы $\lambda > \frac{2n}{4n+1}$ и $x(k) > -\frac{1}{4n+1}$ для каждого $k \in \{-n, \ldots, 0\} \setminus \{i\}$. Но при этих ограничениях имеем

$$\lambda\varphi - x\| \geqslant \lim_{k\to\infty} |(\lambda\varphi - x)(k)| = \frac{\lambda n}{n+1} + \sum_{k=0}^{n} x(-k)/(n+1) > \frac{2n}{4n+1}.$$

Снова получили противоречие с неравенством (5). Следовательно, неравенство (5) не может выполняться ни при каких $x \in X_n$, $\|x\| = 1$, и $\lambda > 0$. Тогда из утверждения следует $r(\varphi^T) = \frac{2n+1}{4n+1}$, т. е. $\frac{2n+1}{4n+1} \in \mathbf{R}(X_n)$. Поскольку $\dim l_\infty(M)/X_n = \infty$, то пространство X_n неквазирефлексивно, а, значит, число ноль принадлежит множеству $\mathbf{R}(X_n)$ [1, с. 78]. Чтобы завершить доказательство равенства $\mathbf{R}(X_n) = \left[0, \frac{2n+1}{4n+1}\right]$, осталось только воспользоваться утверждением и теоремой 1 из [1, с. 39].

Итак, мы построили банаховы пространства X_n, $n \in N$, для которых $\mathbf{R}(X_n) = \left[0, \frac{2n+1}{4n+1}\right]$. Причем каждое X_n содержит некоторое подпространство Y с числовой областью характеристики $\mathbf{R}(Y) = [0, 1]$.

Автор выражает глубокую признательность А. Н. Пличко за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы: 1. *Петунин Ю. И., Пличко А. Н.* Теория характеристик подпространств и ее приложения.— К.: Вища шк. 1980.—216 с. 2. *Davis W. J., Jonson W. B.* Basiq sequences and normin Subspaces in non-quasi-reflexive Banach spaces.—Israel J. Math., 1973, **14**, № 4, p. 353—367. 3. *Годун Б. В., Кадец М. И.* О множестве значений характеристики подпространств сопряженного пространства.—Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1978, вып. 29, с. 25—31. 4. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1981.—544 с.

Поступила в редколлегию 13.04.84.

УДК 519.2

Л. Б. ГОЛИНСКИЙ

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ, СУММА КОТОРЫХ ПРИБЛИЖЕННО НОРМАЛЬНА

В работе [1] Н. А. Сапогов получил оценку устойчивости теоремы Крамера о разложении нормального вектора для произвольной размерности $n \geqslant 1$. Позднее выяснилось, что оценка из [1], относящаяся к случаю $n = 1$, является точной в смысле порядка (см. [2], [3]). В настоящей работе устанавливается, что в случае $n \geqslant 2$ оценка из [1] может быть несколько улучшена, и приводится точная в смысле порядка оценка.

Пусть $X_1 = (X_1^k)_{k=1}^n$ и $X_2 = (X_2^k)_{k=1}^n$ — независимые случайные векторы, $X = X_1 + X_2$, а Y — стандартный нормальный случайный вектор. Предположим, что вектор X близок к Y в том смысле, что

$$\rho(X, Y) = \sup_{\{I\}} |P_X(I) - P_Y(I)| = \varepsilon < 1, \tag{1}$$

где $P_X(I)$ и $P_Y(I)$ — распределения векторов X и Y, $\{I\}$ — множество всех параллелепипедов, возможно бесконечных, рёбра которых параллельны координатным осям. Введём усечения $X_j^* = (X_j^{k*})_{k=1}^n$ векторов X_j по правилу

$$X_j^{k*} = \begin{cases} X_j^k, & |X_j^k| \leqslant M; \quad M = 1 + \left[2 \ln \frac{1}{\varepsilon}\right]^{1/2}, \\ 0, & |X_j^k| > M; \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \ j = 1, 2. \end{cases}$$

Пусть теперь $Y_j = (Y_j^k)_{k=1}^n$ — нормальные случайные векторы с теми же первыми и вторыми моментами, что и у векторов X_j^*:

$$E(Y_j^k) = E(X_j^{k*}), \ E(Y_j^p Y_j^q) = E(X_j^{p*} X_j^{q*}), \ 1 \leqslant k, \ p, \ q \leqslant n. \tag{2}$$

Полученный в [1] результат гласит, что если выполнено (1) и медианы

$$mX_1^k = 0, \ 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{3}$$

то справедливы оценки

$$\rho(X_1, Y_1) \leqslant \frac{C(1)}{\sigma_1^3 \left[\ln \frac{1}{\varepsilon}\right]^{1/2}} \ (n = 1);$$

$$\rho(X_1, Y_1) \leqslant \frac{C(n)}{\sigma_1^3 \left[\ln \frac{1}{\varepsilon}\right]^{1/2}} [\ln \ln (2 + \varepsilon^{-1})]^{\frac{3}{2}\, n-1} \ (n \geqslant 2),$$

где

$$\sigma_1^2=\min_{\|t\|=1}\sigma_1^2(t),\ \sigma_1^2(t)=\sum_{k,\,j=1}^{n}\operatorname{cov}(X_1^{k*},\ X_1^{j*})\,t_kt_j,\ t\in R^n,$$

$\|t\|^2=\sum_{j=1}^{n}t_j^2$; $C(n)$ зависит лишь от n.

Основной результат настоящей работы:

Теорема. *При условиях (1) и (3) справедлива оценка*

$$\rho(X_1,\ Y_1)\leqslant A5^n\sigma_1^{-3}\left[\ln\frac{1}{\varepsilon}\right]^{-1/2},\ n\geqslant 2 \tag{4}$$

A — абсолютная постоянная.

Приведенный в [2] пример показывает, что эта оценка неулучшаема в смысле порядка по ε. Будем считать в дальнейшем, что $\sigma_1>0$.

1. *Представление для характеристической функции* $\varphi(z,\ X_1^*)$

Пусть $X^*=X_1^*+X_2^*=(X^{k*})_{k=1}^n$. Как показано в [1],

$$\rho(X^*,\ Y)=\varepsilon_1\leqslant 16n\varepsilon,\ \rho(X_j^*,\ X_j)\leqslant 8n\varepsilon \tag{1.1}$$

Получим оценку (4) сначала для $\rho(X_1^*,\ Y_1)$.

Следующее утверждение при $n=1$ доказано Н. А. Сапоговым (см. [4, с. 345]).

Лемма 1. *При* $\varepsilon\leqslant\exp(-8n)$ *характеристические функции* $\varphi(z,\ X^*)$ *и* $\varphi(z,\ Y)$ *векторов* X^* *и* Y *удовлетворяют неравенствам*

$$1/2\,|\varphi(z,\ Y)|\leqslant|\varphi(z,\ X^*)|\leqslant 3/2\,|\varphi(z,\ Y)| \tag{1.2}$$

в поликруге $D(T_1)=\{|z_j|\leqslant T_1=(8n)^{-1}T,\ \ 1\leqslant j\leqslant n\}$, $T=\left[\ln\frac{1}{\varepsilon}\right]^{1/2}$.

Доказательство. Векторы X_1^* и X^* финитны, так что их х. ф. — целые функции n переменных. Введем сглаживающую плотность $Q_r(x)=\prod_{j=1}^{n}rq(rx_j)$, $r\geqslant 1$, где $q(u)$ — стандартная «треугольная» плотность: $q(u)=0$ при $|u|\geqslant 1$. Пусть $F^{(1)}(x)$ и $F^{(2)}(x)$ — функции распределения (ф. р.) векторов X^* и Y, $F_r^{(1)}(x)$ и $F_r^{(2)}(x)$ — «сглаженные» ф. р.

$$F_r^{(1)}(x)=\int_{R^n}F^{(1)}(x-y)\,Q_r(y)\,dy,\ F_r^{(2)}(x)=\int_{R^n}F^{(2)}(x-y)\,Q_r(y)\,dy$$

с плотностями $p_r^{(1)}(x)$ и $p_r^{(2)}(x)$ соответственно. Условие (1.1) влечет $|F^{(1)}(x)-F^{(2)}(x)|\leqslant\varepsilon_1$, а значит и

$$|H(x)|\leqslant\varepsilon_1,\ H(x)=F_r^{(1)}(x)-F_r^{(2)}(x). \tag{1.3}$$

Легко видеть, что $p_r^{(1)}(x)=0$ при $x \notin N_1=\{|x_j| \leqslant M_1=2M+1, 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Пусть $z \in D(T_1)$. Имеем

$$\varphi(z, F_r^{(1)})-\varphi(z, F_r^{(2)})=\int_{R^n} \exp\{i\langle z, x\rangle\}[p_r^{(1)}(x)-p_r^{(2)}(x)]\,dx=$$
$$=\int_{N_1} \exp\{i\langle z, x\rangle\} \frac{\partial^n H}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}(x)\,dx-\int_{CN_1} \exp\{i\langle z, x\rangle\} \times$$
$$\times p_r^{(2)}(x)\,dx=I^{(1)}-I^{(2)};\ \langle z, x\rangle=\sum_{j=1}^n z_j x_j,\ CN_1=R^n \setminus N_1.$$

Пусть

$$I_{p, q}=\int_{\{|y_j| \leqslant M_1,\ 1 \leqslant j \leqslant p\}} \exp\left\{i \sum_{j=1}^p z_j y_j\right\} \frac{\partial^q H}{\partial y_1 \ldots \partial y_q}(y)\,dy, \quad \begin{array}{l} 1 \leqslant p \leqslant n, \\ 1 \leqslant q \leqslant p. \end{array}$$

Интегрируя по частям и применяя индукцию, нетрудно показать, что

$$|I_{p, q}| \leqslant 2^{p+q} \varepsilon_1 \{\prod_{j=q+1}^p |z_j|\}^{-1} \exp\{M_1 \sum_{j=1}^p |z_j|\}$$

(если $p=q$, то произведение в правой части отсутствует). Поэтому

$$|I^{(1)}|=|I_{n, n}| \leqslant 4^{n+2} n \varepsilon \exp\{M_1 \sum_{j=1}^n |z_j|\}.$$

Так как $p_r^{(2)}(x)=\prod_{j=1}^n l(x_j)$, $\sqrt{2\pi}\, l(u)=\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}(u-v)^2\right\} rq(rv)\,dv$,

то для $I^{(2)}$ справедлива оценка

$$|I^{(2)}| \leqslant \int_{CN_1} \exp\left\{T_1 \sum_{j=1}^n |x_j|\right\} p_r^{(2)}(x)\,dx \leqslant n \int_{|u|>M_1} \exp\{T_1|u|\} \times$$
$$\times l(u)\,du \cdot \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(T_1|u|)\, l(u)\,du\right\}^{n-1}.$$

Для первого сомножителя имеем

$$\sqrt{2\pi}\, n \int_{|u|>M_1} \exp(T_1|u|)\, l(u)\,du=2n \int_{M_1}^{\infty} \exp(T_1 u)\,du \int_{-r^{-1}}^{r^{-1}} \exp \times$$
$$\times\left\{-\frac{(u-v)^2}{2}\right\} rq(rv)\,dv=2n \int_{-r^{-1}}^{r^{-1}} rq(rv)\, e^{T_1 v}\,dv \int_{M_1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}+T_1 t\right\} \times$$
$$\times\,dt \leqslant 2n e^{T_1} \int_{M_1-1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}+T_1 t\right\} dt \leqslant$$
$$\leqslant n \exp\{-2M^2+2MT_1+T_1\}.$$

Аналогично $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(T_1 |v|)\, l(v)\, dv \leqslant 2\exp\left\{T_1 + \frac{1}{2} T_1^2\right\}$. Следовательно, $|I^{(2)}| \leqslant (2\pi)^{-1/2} n 2^{n-1} \exp\left\{-2M^2 + 2MT_1 + nT_1 + \frac{n-1}{2} T_1^2\right\}$. Так как при $z \in D(T_1)$ выполняется $|\varphi(z, Y)| \geqslant \exp\left\{-\frac{1}{2} nT_1^2\right\}$, а при $T_1 = \frac{T}{8n}$ и $\varepsilon \leqslant e^{-8n}$ имеем $|I^{(j)}| < \frac{1}{4} \exp\left\{-\frac{1}{2} nT_1^2\right\}$, $j = 1, 2$. то $|\varphi(z, F_r^{(1)}) - \varphi(z, F_r^{(2)})| < \frac{1}{2} |\varphi(z, Y)|$, $z \in D(T_1)$. Учитывая, что

$$\varphi(z, F_r^{(1)}) - \varphi(z, F_r^{(2)}) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\sin z_j/(2r)}{z_j/(2r)}\right)^2 \cdot \{\varphi(z, X^*) - \varphi(r, Y)\}$$

и устремляя r к бесконечности, получаем $|\varphi(z, X^*) - \varphi(z, Y)| \leqslant \leqslant \frac{1}{2} |\varphi(z, Y)|$ откуда следует (1.2). Лемма доказана.

Нам понадобится утверждение, хорошо известное в случае $n = 1$.

Лемма 2. *Пусть функция $g(z)$ голоморфна в поликруге $D(R) = \{|z_j| \leqslant R_j\}$. Если $g(0) = 0$, и $\operatorname{Re} g(z) \leqslant A$, то для тейлоровских коэффициентов b_k*

$$g(z) = \sum_{|k|=1}^{\infty} b_k z^k,\ k = (k_1 \ldots k_n),\ |k| = k_1 + \cdots + k_n,$$

$$z^k = z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}$$

верна оценка $|b_k| \leqslant 2AR_1^{k_1} \ldots R_n^{k_n}$.

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать $R_1 = \cdots = R_n = 1$. К функции $g_1(z) - A - g(z)$ применим формулу Шварца (см., например [5]):

$$g_1(z) = \int\limits_{S^n} \operatorname{Re} g_1(w)\, H(z, w)\, dm_n(w),$$

где $S^n = \{|w_j| = 1\}$ — n-мерный тор; $m_n(w)$ — нормированная мера Лебега на S^n,

$$H(z, w) = 2 \prod_{j=1}^{n} (1 - z_j \bar{w}_j)^{-1} = 1 + 2 \sum_{|k|=1}^{\infty} \bar{w}^k z^k$$

— ядро Шварца для поликруга $D(1)$. Учитывая, что $\operatorname{Re} g_1(w) \geqslant 0$ имеем

$$|b_k| = 2 \left| \int\limits_{S^n} \operatorname{Re} g_1(w)\, \bar{w}^k\, dm_n(w) \right| \leqslant 2 \int\limits_{S^n} \operatorname{Re} g_1(w)\, dm_n(w) = 2A,$$

что и требовалось.

Лемма 3. *В поликруге* $D(T_2)=\{|z_j|<T_2=(2n)^{-1}T_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\}$ *х. ф.* $\varphi(z, X_1^*)$ *допускает представление*

$$\varphi(z, X_1^*)=\exp\left\{im_1(z)-\frac{1}{2}\sigma_1^2(z)+\theta(z)\right\}, \tag{1.4}$$

где $m_1(z)=\langle\mu, z\rangle$, $\mu=(\mu_1\ldots\mu_n)$, $\mu_j=E(X_j^{1*})$, *функция* $\theta(z)$ *голоморфна в* $D(T_2)$ *и*

$$|\theta(z)|\leqslant 64n^3\left[\ln\frac{1}{\varepsilon}\right]^{-1/2}|z|^3,\ |z|=\sum_{j=1}^{n}|z_j|. \tag{1.5}$$

Доказательство. Из (1.2) следует, что $\varphi(z, X^*)\neq 0$, а значит и $\varphi(z, X_1^*)\neq 0$ в поликруге $D(T_1)$. Поэтому х. ф. $\varphi(z, X_1^*)$ допускает представление (1.4). Для доказательства (1.5) воспользуемся таким фактом, полученным в [1]: существует $a=a(n)$, не зависящее от ε и такое, что

$$P\{|X_j^{k*}|\leqslant a\}\geqslant 1/2,\ j=1, 2,\ 1\leqslant k\leqslant n,\ \varepsilon<(16n)^{-2}. \tag{1.6}$$

Число a определяется из условия $1-\Phi(a-1)=(16n)^{-1}$, $\Phi(x)$ — стандартная одномерная нормальная ф. р.

В силу свойства «хребта» имеем

$$|\varphi(z_1, \ldots, z_n, X_1^*)|\leqslant\varphi(iv_1, \ldots, iv_n, X_1^*)=\frac{\varphi(iv_1, \ldots, iv_n, X^*)}{\varphi(iv_1, \ldots, iv_n, X_2^*)}$$

$$z_j=u_j+iv_j.$$

Условие (1.6) дает такую оценку снизу:

$$\varphi(iv_1, \ldots, iv_n, X_2^*)\geqslant\int\limits_{\{|X_j|\leqslant a,\ 1\leqslant j\leqslant n\}}\exp\{-\langle v, x\rangle\}P_{X_2^*}(dx)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\exp\left\{-a\sum_{j=1}^{n}|v_j|\right\}\geqslant\frac{\exp\{-naT_1\}}{2},$$

а из (1.2) вытекает $\varphi(iv_1, \ldots, iv_n, X^*)\leqslant 3/2\exp\{1/2\sum\limits_{j=1}^{n}v_j^2\}\leqslant 3/2\exp\{1/2nT_1^2\}$. Поэтому $|\varphi(z, X_1^*)|\leqslant 3\exp\{1/2nT_1^2+naT_1\}$.

Применим лемму 2 к голоморфной в поликруге $D(T_1)$ функции

$$g(z)=\ln\varphi(z, X_1^*)=im_1(z)-\frac{1}{2}\sigma_1^2(z)+\theta(z),\ \theta(z)=\sum_{|k|=3}^{\infty}b_kz^k.$$

Считая $\varepsilon\leqslant\exp(-10^3n^2)$, получим $\operatorname{Re}g(z)\leqslant\ln 3+naT_1+\frac{1}{2}nT_1^2<2n^2T_1^2$ и значит $|b_m|\leqslant 4n^2T_1^{2-|m|}$, $|m|\geqslant 3$. Отсюда уже следует

оценка (1.5) для функции $\theta(z)$ в меньшем поликруге $D(T_2)$:

$$|\theta(z)| = \left|\sum_{|k|=3}^{\infty} \sum_{k_1+\cdots+k_n=|k|} b_k z^k\right| < \sum_{|k|=3}^{\infty} \frac{4n^2}{T_1^{|k|-2}} |z|^{|k|} | < \frac{64n^3 |z|^3}{T}.$$

2. Оценка величины $\rho(X_1, Y_1)$.

Применим вновь метод сглаживания. Пусть Z — случайный вектор, независимый от X_1^* и Y_1, распределение которого имеет плотность

$$Q(x) = Q^{(n)}(x) = \prod_{j=1}^{n} q(x_j), \quad q(t) = \frac{3T_3}{8\pi}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{4}T_3 t\right)}{\frac{1}{4}T_3 t}\right)^4 \tag{2.1}$$

(параметр $T_3 < T_2$ выберем позднее). Заметим, что $\varphi(t, Z) = \prod_{j=1}^{n} \Psi(t_j) = 0$ при $t \notin N = \{|t_j| < T_3, \ 1 < j < n\}$. Пусть $X_{11}^* = X_1^* + Z$, $Y_{11} = Y_1 + Z$ — «сглаженные» векторы. Обозначим через I параллелепипед $\{a_j < x_j < a_j + h_j, \ h_j > 0, \ 1 < j < n\}$ и $a = (a_1, \ldots, a_n)$.

Согласно формуле обращения имеем $P\{X_{11}^* \in I\} - P\{Y_{11} \in I\} = (2\pi)^{-n} \int_N \prod_{j=1}^{n} \frac{1 - \exp(-ih_j t_j)}{it_j} \cdot \exp\{-i\langle a, t\rangle\} \varphi(t, Z) [\varphi(t, X_1^*) - \varphi(t, Y_1)]\, dt$. Учитывая равенства (2) и представление (1.4), получим

$$P\{X_{11}^* \in I\} - P\{Y_{11} \in I\} = \int_N K(t)[\exp\{\theta(t)\} - 1]\, dt =$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \int_N K(t)\, \theta^p(t)\, dt, \tag{2.2}$$

где $K(t) = (2\pi)^{-n} \prod_{j=1}^{n} \frac{1 - \exp(-ih_j t_j)}{it_j} \exp\{-i\langle a, t\rangle\} \varphi(t, Z) \cdot \varphi(t, Y_1)$.

Нашей ближайшей целью является получение оценки (4) для $\rho(X_{11}^*, Y_{11})$. Для этого разложим функцию $\theta^p(t)$ в степенной ряд, подставим в (2.2) и проинтегрируем почленно. Нам понадобятся оценки таких интегралов:

$$\int_N K(t)\, t_1^{k_1} \ldots t_n^{k_n}\, dt. \tag{2.3}$$

Пусть сначала все $k_j \geqslant 1$, $1 \leqslant j \leqslant n$. В этом случае нужная нам оценка получается просто:

$$\left|\int\limits_N K(t)\, t_1^{k_1} \dots t_n^{k_n}\, dt\right| \leqslant \pi^{-n} \int\limits_N \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 \sum_{j=1}^n t_j^2\right\} |\, t_1^{k_1-1} \dots t_n^{k_n-1}\, |\, dt.$$

Более сложным является тот случай, когда среди показателей k_j имеются нулевые. Не нарушая общности, рассмотрим интеграл

$$J_q = \int\limits_N K(t)\, t_{q+1}^{k_{q+1}} \dots t_n^{k_n}\, dt = (2\pi)^{-n} \int\limits_N \prod_{k=1}^n \frac{1 - \exp(-ih_k t_k)}{it_k} \times$$

$$\times \Psi(t_k) \exp\left\{-i\langle a - \mu,\ t\rangle - \frac{1}{2}\sigma_1^2(t)\right\} t_{q+1}^{k_{q+1}} \dots t_n^{k_n}\, dt,$$

$$1 \leqslant q \leqslant n-1,\ k_j \geqslant 1,\ q+1 \leqslant j \leqslant n. \tag{2.4}$$

Квадратичную форму $\sigma_1^2(t)$ можно привести к сумме квадратов по формуле Якоби (см. [6], с. 273)

$$\sigma_1^2(t) = \sum_{j=1}^n \gamma_j^2 y_j^2,\ y_j = t_j + \sum_{k=j+1}^n l_{jk} t_k,\ y_n = t_n. \tag{2.5}$$

Поскольку квадратичная форма $\sigma_1^2(t)$ положительно определена, то $\gamma_j^2 > 0$. Проинтегрируем в (2.4) сначала по «отсутствующим» переменным:

$$J_q = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\{|t_j| < T_3\}} \prod_{j=q+1}^n \frac{1 - \exp(-ih_j t_j)}{it_j} \Psi(t_j) \exp\left\{-i \sum_{j=q+1}^n \times\right.$$

$$\left.\times (a_j - \mu_j)\, t_j - \frac{1}{2} \sum_{j=q+1}^n \gamma_j^2 y_j^2\right\} t_{q+1}^{k_{q+1}} \dots t_n^{k_n}\, dt_{q+1} \dots$$

$$\dots dt_n \int\limits_{\{|t_j| < T_3\}} \prod_{j=1}^q \frac{1 - \exp(-ih_j t_j)}{it_j} \Psi(t_j) \times$$

$$\times \exp\left\{-i \sum_{j=1}^q (a_j - \mu_j)\, t_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^q \gamma_j^2 y_j^2\right\} dt_1 \dots dt_q. \tag{2.6}$$

Введем верхнетреугольную матрицу B и вектор $b^{(q)} \in R^q$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & l_{12} & \dots & l_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & l_{2n} \\ \cdot & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix},\ b^{(q)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_q \end{pmatrix},\quad b_p = \sum_{j=q+1}^n l_{pj} t_j,\ 1 \leqslant p \leqslant q.$$

Обозначим $t^{(q)}=(t_1, \ldots, t_q)'$, $R(t^{(q)})=\exp\{-1/2\sum_{j=1}^{q}\gamma_j^2 t_j^2\}$, $H(t^{(q)})=$ $=\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{q}\gamma_j^2 y_j^2\right\}=R(Bt^{(q)}+b^{(q)})$. Если

$$R(t^{(q)})=\int_{R^q}\exp\{i\langle t^{(q)}, u\rangle\}\, r(u)\,du,\ r(u)>0,$$

то, как легко видеть,

$$H(t^{(q)})=\int_{R^q}\exp\{i\langle t^{(q)}, u\rangle\}\, h(u)\,du,$$

$$h(u)=|B'|^{-1}\exp\{i\langle B^{-1}b^{(q)}, u\rangle\}\, r(B'^{-1}u),$$

(B'^{-1} — матрица, обратная к транспонированной), и значит

$$\int_{R^q}|h(u)|\,du\leqslant\int_{R^q}r(u)\,du=1.$$

Внутренний интеграл J_q' в (2.6) вычисляется по формуле обращения:

$$J_q'=(2\pi)^{-q}\int\limits_{\{|t_j|<T_3,\ 1\leqslant j\leqslant q\}}\prod_{j=1}^{q}\frac{1-\exp(-ih_jt_j)}{it_j}\exp\{-i(a_j-\mu_j)\,t_j\}\times$$

$$\times\left[H(t^{(q)})\prod_{j=1}^{q}\psi(t_j)\right]dt^{(q)}=\int_{I'}dx\int_{R^q}Q^{(q)}(x-v)\,h(v)\,dv,$$

$$I'=\{a_j-\mu_j\leqslant x_j<a_j-\mu_j+h_j\},\quad Q^{(q)}(x)=\prod_{j=1}^{q}q(x_j),$$

откуда следует, что

$$|J_q'|\leqslant\int_{R^q}|h(v)|\,dv\int_{I'}Q^{(q)}(x-v)\,dx\leqslant\int_{R^q}|h(v)|\,dv\leqslant 1.$$

Для оценки внешнего интеграла в (2.6) заметим, что из (2.5) вытекает при $t=t'=(0, \ldots, 0, t_{q+1}, \ldots, t_n)$, что $\sigma_1^2(t')=\sum_{j=q+1}^{n}\gamma_j^2y_j^2\geqslant$ $\geqslant\sigma_1^2\sum_{j=q+1}^{n}t_j^2$. Поэтому

$$|J_q|\leqslant\pi^{q-n}\int\limits_{\{|t_j|<T_3,\ q+1\leqslant j\leqslant n\}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_1^2\sum_{j=q+1}^{n}t_j^2\right\}\left|t_{q+1}^{k_{q+1}-1}\ldots\right.$$

$$\left.\ldots t_n^{k_n-1}\right|dt_{q+1}\ldots dt_n.$$

Общая оценка интеграла вида (2.3) такова: если $1 \leqslant r_1 < \cdots < r_q \leqslant n$ и $l_j \geqslant 1$, то

$$\left| \int\limits_N K(t)\, t_{r_1}^{l_1} \ldots t_{r_q}^{l_q} dt \right| \leqslant \pi^{-q} \int\limits_{N_q} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\sigma_1^2 \sum_{j=1}^{q} \tau_j^2 \right\} \times \\ \times |\tau_1^{l_1-1} \ldots \tau_q^{l_q-1}|\, d\tau, \tag{2.7}$$

$N_q = \{|\tau_j| \leqslant T_3,\ 1 \leqslant j \leqslant q\}$. Как видно, оценка зависит лишь от числа q множителей t_{r_j}, а не от их выбора.

Разложение $\theta^p(z) = \sum\limits_{|k|=3p}^{\infty} b_k^{(p)} z^k$ запишем в виде

$$\theta^p(t) = \sum_{\substack{1 \leqslant r_1 < \cdots < r_q \leqslant n \\ 1 \leqslant q \leqslant n}} \ \sum_{|j|=\max(3p,\, q)} \ \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_q=|j| \\ j_m \geqslant 1}} b_j^{(p)} z^j. \tag{2.8}$$

Обозначим для краткости внутреннюю сумму в (2.8) через $\sum'$, среднюю — $\sum''$. Подставим это выражение в (2.2). Поскольку число слагаемых во внешней сумме в (2.8) конечно (и равно $2^n - 1$), то достаточно произвести оценку части получающегося ряда, отвечающего фиксированному набору $\{r_1, \ldots, r_q\}$. В силу абсолютной и равномерной сходимости ряда (2.8) порядки суммирования и интегрирования можно менять.

Иными словами, достаточно оценить выражение

$$U(r_1, \ldots, r_q) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum{}' \sum{}'' b_j^{(p)} \int\limits_N K(t)\, t_{r_1}^{j_1} \ldots t_{r_q}^{j_q}\, dt.$$

Согласно (2.7)

$$\left| \sum{}' b_j^{(p)} \int\limits_N K(t)\, t_{r_1}^{j_1} \ldots t_{r_q}^{j_q}\, dt \right| \leqslant \pi^{-q} \sum{}' |b_j^{(p)}| \int\limits_{N_q} \exp \times \\ \times \left\{ -\frac{1}{2}\sigma_1^2 \|\tau\|^2 \right\} |\tau_1^{j_1-1} \ldots \tau_q^{j_q-1}|\, d\tau.$$

Соотношение (1.5) и неравенство Коши дают такую оценку для коэффициентов $b_j^{(p)} : |b_j^{(p)}| \leqslant n^{2p} (2n)^{|j|}\, T_1^{2p-|j|}$. Поэтому

$$\left| \sum{}' b_j^{(p)} \int\limits_N K(t)\, t_{r_1}^{j_1} \ldots t_{r_q}^{j_q}\, dt \right| \leqslant \pi^{-q} \frac{n^{2p}\, (2n)^{|j|}}{T_1^{|j|-2p}} \int\limits_{N_q} \exp \times \\ \times \left\{ -\frac{1}{2}\sigma_1^2 \|\tau\|^2 \right\} |\tau|^{|j|-q}\, d\tau$$

и

$$|U(r_1 \ldots r_q)| \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \frac{n^{2p}\, (2n)^{3p}}{T_1^p} \int\limits_{N_q} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\sigma_1^2 \|\tau\|^2 \right\} \sum{}'' \times \\ \times \left(\frac{2n}{T_1}\right)^{|j|-3p} |\tau|^{|j|-q}\, d\tau = V_q. \tag{2.9}$$

Пусть сначала $q > 3$ и натуральное p_1 таково, что $3p_1 < q \leqslant 3 \times (p_1 + 1)$. Очевидно $p_1 < \frac{1}{3} n$. В этом случае внешняя сумма в (2.9) разбивается на две:

$$V_q = \left\{\sum_{p=1}^{p_1} + \sum_{p=p_1+1}^{\infty}\right\} = V'_q + V''_q.$$

Если $1 \leqslant p \leqslant p_1$, то $q > 3p$, и так как $T_1 > 1$ при условии $\varepsilon \leqslant \exp(-10^3 n^2)$, то

$$\sum_{p=1}^{p_1} \frac{1}{p!} \frac{n^{2p} (2n)^{3p}}{T_1^p} \sum_{|j|=q}^{\infty} \left(\frac{2n}{T_1}\right)^{|j|-3p} |\tau|^{|j|-q} \leqslant \frac{n}{3} \cdot \frac{(2n)^{q+2p_1}}{T_1^{q-2p_1}} \sum_{m=q}^{\infty} \left(\frac{2n\,|\tau|}{T_1}\right)^{m-q}.$$

Выберем параметр T_3 так, чтобы $4n^2 T_3 < T_1$. Тогда получим

$$V'_q \leqslant \frac{(2n)^{2q}}{T_1^{q-2p_1}} \int_{R^q} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 \|\tau\|^2\right\} d\tau. \tag{2.10}$$

Если же $p > p_1$, то $3p \geqslant q$, и значит

$$\sum_{p=p_1+1}^{\infty} \frac{1}{p!} \frac{n^{2p} (2n)^{3p}}{T_1^p} \sum_{|j|=3p}^{\infty} \left(\frac{2n}{T_1}\right)^{|j|-3p} |\tau|^{|j|-q} \leqslant$$
$$\leqslant 2\left(\frac{8n^5}{T_1}\right)^{p_1+1} |\tau|^{3(p_1+1)-q} \exp\left(\frac{8n^5\,|\tau|^3}{T_1}\right),$$

так что

$$V''_q \leqslant 2\left(\frac{8n^5}{T_1}\right)^{p_1+1} \int_{N_q} |\tau|^{3(p_1+1)-q} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 \|\tau\|^2 + \frac{8n^5\,|\tau|^3}{T_1}\right\} \tau\,. \tag{2.11}$$

Легко видеть, что эта же оценка ($cp_1 = 0$) имеет место при $q \leqslant 3$. Выберем теперь T_3, полагая

$$T_3 = (16n^8)^{-1} T_1 \sigma_1^2. \tag{2.12}$$

Непосредственно проверяется, что при таком выборе T_3 и $\tau \in N_q$

$$-\frac{1}{2}\sigma_1^2 \|\tau\|^2 + \frac{8n^5}{T_1} |\tau|^3 \leqslant -\frac{1}{4}\sigma_1^2 \|\tau\|^2. \tag{2.13}$$

В [1] доказано, что $\sigma_1^2 \leqslant 16M^2\varepsilon_1 + 1 \leqslant (16M)^2 n\varepsilon + 1$, так что во всяком случае $\sigma_1^2 < 2$ при $\varepsilon \leqslant \exp(-10^3 n^2)$. Условие $4n^2 T_3 < T_1$ поэтому выполняется. Из (2.10) и (2.11) теперь следует, что при $q > 3$

$$V_q \leqslant \frac{(4\sqrt{2\pi}n^2)^q}{(T_1\sigma_1^3)^{q/3}} \left(\frac{1}{T_1}\right)^{\frac{2}{3}q-2p_1} + 2\left(\frac{8n^5}{T_1}\right)^{p_1+1} \int_{R^q} \left(\frac{n}{\sqrt{2}}\|\tau\|\right)^{3(p_1+1)-q} \exp \times$$
$$\times \left\{-\frac{1}{4}\sigma_1^2 \|\tau\|^2\right\} d\tau.$$

В силу выбора $p_1 2q/3 - 2p_1 > 0$, и, значит,

$$V_q \leqslant \left(\frac{C_1 n^6}{T_1 \sigma_1^3}\right)^{q/3} + \left(\frac{C_2 n^6}{T_1 \sigma_1^3}\right)^{p_1+1}. \tag{2.14}$$

Далее через C_j, $j = 1, 2, \ldots$ обозначаются абсолютные постоянные. Если $q \leqslant 3$, то оценка еще проще: $V_q \leqslant C_3 n^6 (T_1 \sigma_1^3)^{-1}$.

Предположим, что $T_1 \sigma_1^3 > C_4 n^6$, $C_4 = C_1 + C_2 + C_3$ (это предположение не нарушает общности, ибо в противном случае справедливость неравенства (4) достигается подходящим выбором постоянной A). Тогда поскольку в (2.14) $q/3 > 1$ и $p_1 + 1 > 1$, то при всех $q \geqslant 1$ имеем $V_q \leqslant C_4 n^6 (T_1 \sigma_1^3)^{-1}$. Таким образом, получена такая оценка:

$$\rho(X_{11}^*, Y_{11}) \leqslant C_4 n^6 2^n (T_1 \sigma_1^3)^{-1}. \tag{2.15}$$

Воспользуемся неравенством «сглаживания», доказанным в [7; 8]: пусть $F(x)$ и $G(x)$ — ф. р. в R^n, $H(x)$ — ф. р. с плотностью $Q(x)$ (2.1) и $F_1(x) = (F * H)(x)$, $G_1(x) = (G * H)(x)$. Тогда

$$\sup_x | F(x) - G(x) | \leqslant 2 \sup_x | F_1(x) - G_1(x) | + C_5 n^{1/3} \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i}{T_3};$$

$$A_i = \sup_{\substack{x \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} \frac{\partial G(x)}{\partial x_i}. \tag{2.16}$$

Применим это неравенство при $F(x) = F_{X_1^*}(x)$, $G(x) = F_{Y_1}(x)$. В наших обозначениях $F_1(x) = F_{X_{11}^*}(x)$, $G_1(x) = F_{Y_{11}}(x)$ и первое слагаемое в правой части (2.16) оценено в (2.15). Для оценки второго слагаемого используем следующее простое утверждение.

Лемма 4. *Пусть Φ — невырожденное нормальное распределение в R^n с ф. р. $G(x)$ и ковариационной матрицей S. Тогда*

$$\sup_x \frac{\partial G(x)}{\partial x_j} \leqslant (\sqrt{2\pi}\varkappa)^{-1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{2.17}$$

где $\varkappa^2$ — наименьшее собственное значение матрицы S.

Доказательство. Распределение Φ имеет плотность $p(x)$, причем

$$p(x + \mu) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |S|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle S^{-1}x, x\rangle\right\};$$

$$\mu = (\mu_1 \ldots \mu_n), \quad \mu_j = \int_{R^n} x_j \Phi(dx).$$

Применим снова формулу Якоби, согласно которой

$$\langle S^{-1}x,\ x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \delta_k^2 y_k^2;\ y_m = x_m + \sum_{j=m+1}^{n} d_{mj}x_j,\ y_n = x_n,$$

$$\delta_m^2 = \frac{|S_m^{(-1)}|}{|S_{m-1}^{(-1)}|},\ |S_0^{(-1)}| = 1,\ 1 \leqslant m \leqslant n, \tag{2.18}$$

где $|S_m^{(-1)}|$ — главный минор m-го порядка матрицы S^{-1}. Поэтому

$$A_n = \sup_x \frac{\partial G(x)}{\partial x_n} \leqslant \sup_{u_n} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} p(u_1, \ldots, u_{n-1},\ u_n)\, du_1 \ldots du_{n-1} =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |S|^{-1/2} \sup_{u_n} \exp\left\{-\frac{1}{2}\delta_n^2 u_n^2\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\delta_{n-1}^2 (u_{n-1} +\right.$$

$$\left. + d_{n-1,\,n}u_n)^2\right\} du_{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\delta_{n-2}^2 (u_{n-2} + d_{n-2,\,n-1}u_{n-1} +\right.$$

$$\left. + d_{n-2,\,n}u_n)^2\right\} du_{n-2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\delta_1^2\left(u_1 + \sum_{j=2}^{n} d_{1j}u_j\right)^2\right\} du_1 \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^{-1/2} |S|^{-1/2} (\delta_1 \ldots \delta_{n-1})^{-1}.$$

В силу (2.18) $(\delta_1 \ldots \delta_n)^2 = |S^{-1}| = |S|^{-1}$ так, что $A_n \leqslant (2\pi)^{-1/2}\delta_n$. Поскольку $\delta_n^2 x_n^2 \leqslant \langle S^{-1}x,\ x\rangle \leqslant \varkappa^{-2}\|x\|^2$, то, полагая $x = (0, \ldots, 0, x_n)$ получим $\delta_n \leqslant \varkappa^{-1}$, откуда и следует (2.17) с $j = n$. Для остальных j рассуждение аналогично.

Учитывая (2.17), получаем из (2.16) $\sup_x |F_{X_1^*}(x) - F_{Y_1}(x)| \leqslant$ $\leqslant (C_4 n^6 2^{n+1} + C_6 n^{10})(T_1\sigma_1^3)^{-1}$ и окончательно $\rho(X_1^*,\ Y_1) \leqslant$ $\leqslant 2^n \sup_x |F_{X_1^*}(x) - F_{Y_1}(x)| \leqslant C_7 5^n (T\sigma_1^3)^{-1}$, откуда $\rho(X_1,\ Y_1) \leqslant$ $\leqslant \rho(X_1^*,\ Y_1) + \rho(X_1,\ X_1^*) < A \cdot 5^n (T\sigma_1^3)^{-1}$. Теорема доказана.

Замечание 1. Предположение $\varepsilon \leqslant \exp(-10^3 n^2)$, используемое выше, не нарушает общности. Действительно, если $\varepsilon > \exp(-10^3 n^2)$, то $T_1 < C_8$, $\sigma_1^2 \leqslant (16M)^2 n\varepsilon + 1 < C_9 n$, и неравенство (4) выполнено при подходящем выборе постоянной A.

Замечание 2. Вместо стандартного нормального случайного вектора Y можно рассматривать невырожденный нормальный случайный вектор $Y_0 = (Y_0^k)_{k=1}^n$ нормированный и центрированный:

$$E(Y_0^k) = 0,\ D^2(Y_0^k) = 1,\ 1 \leqslant k \leqslant n.$$

В этом случае константа A в (4) зависит от

$$\sigma^2 = \min_{\|t\|=1} \sigma^2(t),\ \sigma^2(t) = \sum_{k,\,j=1}^{n} \operatorname{cov}(Y_0^k,\ Y_0^j)\, t_k t_j.$$

Список литературы: 1. *Сапогов Н. А.* О независимых слагаемых суммы случайных величин, распределенных приближенно нормально. — Вестн. ЛГУ, 1959,

№ 19, с. 78—105. 2. *Малошевский С. Г.* Неулучшаемость результата Н. А. Сапогова в проблеме устойчивости теоремы Г. Крамера. — Теория вероятностей и ее применение, 1968, **13**, № 3, с. 522 — 525. 3. *Чистяков Г. П.* О точных оценках устойчивости разложения нормального закона и закона Пуассона.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1975, вып. 26, с. 119 — 128. 4. *Линник Ю. В., Островский И. В.* Разложение случайных величин и векторов.— М.: Наука, 1972.—480 с. 5. *Айзенберг Л. А., Даутов Ш. А.* Голоморфные функции многих комплексных переменных с неотрицательной действительной частью.— Мат. сб., 1976, **99**(141), № 3 (11), с. 342 — 355. 6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М.: Наука, 1967.—57 с. 7. *Садикова С. М.* Двумерные аналоги неравенства Эссеена с применением к центральной предельной теореме.— Теория вероятностей и ее применение, 1966, **11**, № 3, с. 369—380. 8. *Гамкрелидзе Н. Г.* Неравенство Эссеена для многомерной функции распределения. — Теория вероятностей и ее применение, 1977, **22**, № 4, с. 897—900

Поступила в редколлегию 30.01.85.

УДК 517.982.2

С. А. КУЗНЕЦОВ

О СОВЕРШЕННО ПОЛНЫХ И B_r-ПОЛНЫХ ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ В ТЕРМИНАХ НАТУРАЛЬНОЙ ТОПОЛОГИИ

В статье дается описание совершенной полноты и B_r-полноты отделимых локально выпуклых пространств (далее ЛВП) в терминах полноты фактор-пространств по замкнутым подпространствам

Мы будем рассматривать ЛВП, заданные над полем действительных чисел. Не поясненные в тексте обозначения и терминология взяты из [1].

Линейный функционал f, определенный на подпространстве M из топологического сопряженного E' к ЛВП E, называется почти непрерывным, если для каждой окрестности нуля $v \subset E$ отображение $f|_{v^0 \cap M}$ непрерывно в топологии $\sigma(E', E)|_{v^0 \cap M}$ (v^0 — поляра v в E').

В работе [2] В. Птак показал, что если f — линейный функционал, определенный на подпространстве $M \subset E'$, то f почти непрерывен тогда и только тогда, когда для любой окрестности нуля $v \subset E$ множество $v^0 \cap \operatorname{Ker}(f)$ замкнуто в топологии $\sigma(E', E)|_M$.

Лемма 1. *Если L и M — подпространства в E', $M \subset L$, $\dim(L/M) < \infty$ и M почти замкнуто* в E', то и L почти замкнуто в E'.*

---

* Напомним, что подпространство M из E' называется почти замкнутым, если для каждой окрестности нуля v из E множество $v^0 \cap M$ замкнуто в слабой топологии $\sigma(E', E)$. ЛВП E называется совершенно полным, если в E со слабой топологией каждое почти замкнутое подпространство замкнуто. ЛВП E' называется B_r-полным, если в E' со слабой топологией не существует собственного всюду плотного почти замкнутого подпространства. ЛВП E называется наследственно полным, если для любого замкнутого подпространства $L \subset$ фактор-пространство E/L полно в фактор-топологии. Недавно М. Вальдивия [3] построил пример B_r-полного не наследственно полного (и, следовательно, не совершенно полного) пространства.

Доказательство. Достаточно показать, что если $x \notin M$, то $\boldsymbol{R}x + M = H$ почти замкнуто ($\boldsymbol{R}$ — поле действительных чисел).

Пусть v — окрестность нуля в E. Докажем, что $v^0 \cap H$ замкнутое в E' со слабой топологией $\sigma(E', E)$ (далее E'_σ) множество. Определим на H функционал p:

$$y \in H \Rightarrow p(y) = p(\lambda x + y') = \lambda \quad (\lambda \in \boldsymbol{R},\ y' \in M).$$

Очевидно, что M — нулевое подпространство функционала p. Так как M — почти замкнутое подпространство в E', то функционал p почти непрерывен. Множество $V = v^0 \cap H$ предкомпактно в E'_σ как подмножество компактного в E'_σ множества v^0. Так как p почти непрерывен, то p непрерывен на V в топологии $\sigma(E', E)|_V$. Поэтому множество $Ax = \{p(V)\}\, x$ предкомпактно в $\boldsymbol{R}x$ как образ предкомпакта при непрерывном линейном отображении. Так как V — выпуклое множество, то $\overline{Ax}$ — отрезок в $\boldsymbol{R}x$. Следовательно, Ax — равностепенно непрерывное множество. Обозначим через B проекцию множества V на подпространство M. Множество B равностепенно непрерывно, так как оно принадлежит множеству $V - Ax$, которое равностепенно непрерывно как сумма двух равностепенно непрерывных множеств. Следовательно, $\bar{B} \subset M$, так как M почти замкнуто. Поэтому $\{\overline{Ax} + \bar{B}\} \subset H$. Очевидно, что $v^0 \cap H \subset \overline{Ax} + \bar{B}$. $\overline{Ax} + \bar{B}$ — замкнутое в E'_σ множество, так как $\overline{Ax}$ и $\bar{B}$ — компакты в E'_σ. Следовательно, H — почти замкнутое подпространство в E'.

Теорема 1. *Для того чтобы ЛВП E было совершенно полным, необходимо и достаточно, чтобы каждый почти непрерывный линейный функционал, определенный на почти замкнутом подпространстве M из E', был непрерывен в топологии $\sigma(E', E)|_M$.*

Доказательство. Необходимость очевидна.

Докажем достаточность. Пусть M — почти замкнутое подпространство в E'. Предположим, что оно не замкнуто в E'_σ. Пусть $x \in \{E' \setminus M\}$. Из леммы 1 следует, что $\boldsymbol{R}x + M$ — почти замкнутое подпространство в E'. Определим на $\boldsymbol{R}x + M$ функционал $p: \{\boldsymbol{R}x + M\} \to \boldsymbol{R}$ следующим образом:

$$y \in \{\boldsymbol{R}x + M\} \Rightarrow p(y) = p(\lambda x + y') = \lambda \quad (\lambda \in \boldsymbol{R},\ y' \in M).$$

Очевидно, что $M = \operatorname{Ker}(p)$. Так как M и $\boldsymbol{R}x + M$ — почти замкнутые подпространства в E', то, по предположению, p — слабо непрерывный на $\boldsymbol{R}x + M$ функционал. Поэтому M — слабо замкнутое в $\boldsymbol{R}x + M$ подпространство. Так как это справедливо для любого $x \in \{E' \setminus M\}$, то M — замкнутое подпространство в E'_σ.

Известно, что если M — подпространство из E', то векторные пространства E/M^0 и M находятся в двойственности. Обозначим через $\nu(E/M^0, M)$ топологию в E/M^0 равномерной сходимости на множествах из M, равностепенно непрерывных на E (или, что эквивалентно, равностепенно непрерывных на E/M^0 в фактор-топологии).

Топологию $\nu(E/M^0, M)$ будем называть натуральной. В E/M^0 поляры равностепенно непрерывных на E подмножеств из M образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для натуральной топологии $\nu(E/M^0, M)$.

Теорема 2. *Натуральная топология $\nu(E/M^0, M)$ согласуется с двойственностью между E/M^0 и M тогда и только тогда, когда M — почти замкнутое подпространство в E'.*

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть A — равностепенно непрерывное множество из $M \subset E'$. Это означает, что в E найдется такая окрестность нуля v, что $|A(v)| \leqslant 1$. Следовательно, $A \subset v^0$. Так как $A \subset M$, то $A \subset \{v^0 \cap M\}$. Так как v^0 — выпуклое уравновешенное множество, то выпуклая уравновешенная оболочка $L(A)$ множества A принадлежит $\{v^0 \cap M\}$, замкнутое в E'_σ множество, так как M — почти замкнутое подпространство в E'. Следовательно, $\overline{L(A)} \subset \{v^0 \cap M\} \subset M$. Так как $A^0 = (\overline{L(A)})^0$, то натуральную топологию можно задать как топологию равномерной сходимости на выпуклых уравновешенных множествах из M, равностепенно непрерывных на E и замкнутых в E'_σ; $\overline{L(A)}$ —компактное в слабой топологии $\sigma(E', E)|_M$ множество. Таким образом, натуральная топология является S-топологией, где S — некоторое семейство выпуклых уравновешенных множеств из M, компактных в слабой топологии $\sigma(E/M^0, M) = \sigma(E', E)|_M$, покрывающее пространство M. Из теоремы Макки [1, с. 95, теор. 7] следует, что топология $\nu(E/M^0, M)$ согласуется с двойственностью между E/M^0 и M.

Докажем необходимость. Пусть u — окрестность нуля в E. Следовательно, $u^0 \cap M$ — равностепенно непрерывное на E множество. Так как натуральная топология согласуется с двойственностью между E/M^0 и M, то $(u^0 \cap M)^{00} \subset M$. $(u^0 \cap M)^{00}$ и u^0 — слабо замкнутые множества и $(u^0 \cap M) \subset (u^0 \cap M)^{00}$. Следовательно, $u^0 \cap M = u^0 \cap (u^0 \cap M)^{00}$ и $u^0 \cap M$ слабо замкнуто как пересечение слабо замкнутых множеств. Следовательно, M — почти замкнутое в E' подпространство.

Таким образом, при помощи натуральной топологии дается критерий почти замкнутости в терминах двойственности. Этим определяется важность натуральной топологии при изучении совершенной полноты.

Очевидно, что натуральная топология $\nu(E/M^0, M)$ совпадает с фактор-топологией пространства E/M^0, если M — замкнутое подпространство в E'_σ. Поэтому пространство E наследственно полно тогда и только тогда, когда для любого замкнутого в E'_σ подпространства M фактор-пространство E/M^0 полно в натуральной топологии $\nu(E/M^0, M)$. Дадим аналогичный критерий совершенной полноты и B_r-полноты.

Теорема 3. *Для того чтобы ЛВП E было совершенно полным (B_r-полным), необходимо и достаточно, чтобы для любого почти*

замкнутого подпространства M (всюду плотного почти замкнутого подпространства) в E'_σ фактор-пространство (пространство) E/M^0 $[E]$ было полным в натуральной топологии $\nu(E/M^0, M)$ $(\nu(E, M))$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть τ — исходная топология совершенно полного (B_r-полного) пространства E; $M \subset E'_\sigma$ — почти замкнутое (всюду плотное почти замкнутое) подпространство. Тогда M замкнуто в E'_σ $(E' = M)$ и, следовательно, $\tau/M^0 = \nu(E/M^0, M)$ $(\tau = \nu(E, M))$, где τ/M^0 — фактор-топология пространства E/M^0. Так как совершенно полное (B_r-полное) пространство наследственно полно (полно), то пространство E/M^0 (E) полно в топологии $\nu(E/M^0, M)$ $(\nu(E, M))$.

Докажем *достаточность*. Пусть для каждого почти замкнутого подпространства $M \subset E'$ фактор-пространство E/M^0 полно в топологии $\nu(E/M^0, M)$. Предположим, что E не является совершенно полным. Тогда существует почти замкнутое подпространство M в E' такое, что $\overline{M} \neq M$. Пусть $x \in \overline{M} \setminus M$. Из леммы 1 следует, что подпространство $Q_x = \boldsymbol{R}x + M$ почти замкнуто. Определим на Q_x линейный функционал f:

$$y \in Q_x \Rightarrow f(y) = f(\lambda x + y') = \lambda \ (y' \in M, \ \lambda \in \boldsymbol{R}).$$

Так как $M = \mathrm{Ker}(f)$ почти замкнуто, то функционал f почти непрерывен, т. е. f непрерывен на $v^0 \cap Q_x$ в топологии $\sigma(E', E)|_{Q_x}$ для каждой окрестности нуля v из E. Следовательно, f непрерывен на каждом равностепенно непрерывном на E подмножестве $A \subset Q_x$ в топологии $\sigma(Q_x, E/Q_x^0)$. Так как E/Q_x^0 полно в топологии $\nu(E/Q_x^0, Q_x)$, то из теоремы Гротендика [4, с. 189] вытекает, что f непрерывен в топологии $\sigma(Q_x, E/Q_x^0) = \sigma(E', E)|_{Q_x}$. Следовательно, подпространство M замкнуто в Q_x как ядро непрерывного линейного функционала. Так как это верно для любого $x \in \overline{M} \setminus M$, то M замкнуто в $\overline{M}$, что противоречит тому, что $M \neq \overline{M}$.

Достаточность для B_r-полноты доказывается заменой слов «почти замкнутое в E' подпространство» словами «всюду плотное почти замкнутое в E'_σ подпространство» в доказательстве достаточности для совершенной полноты.

Следствие. *Для того чтобы бочечное пространство E было совершенно полным, необходимо и достаточно, чтобы E/M^0 было полным в сильной топологии $\beta(E/M^0, M)$, где M — почти замкнутое подпространство в E'.*

Доказательство. Так как пространство E бочечно, то каждое ограниченное в E'_σ подмножество из M равностепенно непрерывно. Следовательно, $\beta(E/M^0, M) = \nu(E/M^0, M)$. Теперь следствие вытекает из теоремы 3.

Лемма 2. *Пусть E — бочечное пространство и M — всюду плотное почти замкнутое подпространство в E'_σ. Тогда E, наделенное топологией $\nu(E, M)$, — бочечное пространство.*

Доказательство. Пространство E с топологией $\nu(E, M)$ будем обозначать через E_M. Пусть u — бочка в E_M. Так как $\nu(E, M) \leqslant \nu(E, E')$, то u — бочка в E и, следовательно, u — окрестность нуля в E. Обозначим через u^* поляру множества u относительно двойственности между E и M. Очевидно, что $u^* = u^0 \cap M$. Так как M — почти замкнутое всюду плотное подпространство, то топология $\nu(E, M)$ согласуется с двойственностью между E и M и, следовательно, $u^{**} = u$. Из того, что $(u^*)^0 = u^{**}$ следует: $u = (u^0 \cap M)^0$. Следовательно, u — окрестность нуля в E_M. Поэтому E_M — бочечное пространство.

Так как бочечность пространства E наследуется при переходе к фактор-пространству по замкнутому подпространству с фактор-топологией, то лемма 2 допускает очевидное обобщение:

Лемма 3. *Пусть E — бочечное пространство и M — почти замкнутое подпространство в E'. Тогда E/M^0, наделенное топологией $\nu(E/M^0, M)$, — бочечное пространство.*

Пусть $\boldsymbol{B}$ — фундаментальная система окрестностей нуля в пространстве E/M^0 (M — почти замкнутое подпространство в E') для натуральной топологии $\nu(E/M^0, M)$; $v \in \boldsymbol{B}$. Обозначим через E'_{v^0} подпространство в M, порожденное множеством v^0 и наделенное нормированной топологией, заданной калибровочной функцией множества v^0. Далее через t будем обозначать топологию в M локально выпуклого индуктивного предела подпространств $\{E'_{v^0}\}_{v \in \boldsymbol{B}}$ относительно отображений тождественного вложения $\varphi_{v^0}: E'_{v^0} \to M$. Подпространство M с топологией t будем обозначать через M_t.

Лемма 4. *Для того чтобы E' (E — бочечное пространство) с топологией Макки $\tau(E', E)$ (далее E'_τ) было борнологическим, необходимо и достаточно, чтобы пространство E было полным и E'_t полурефлексивным.*

Докажем *необходимость.* Поскольку E — бочечное пространство, то E совпадает с сильным сопряженным к E'_τ. Следовательно, E — полное пространство, так как сильное сопряженное к борнологическому пространству полно [4, с. 188].

Пусть u — замкнутая выпуклая уравновешенная окрестность нуля в E' с сильной топологией $\beta(E', E)$ (далее E'_β), т. е. найдется такое ограниченное множество A в E, что $A^0 = u$. Пусть v — окрестность нуля в E. Так как A ограничено, то найдется такое число $\lambda \in \boldsymbol{R}$, что $A \subset \lambda v$ и, следовательно, $\frac{1}{\lambda} v^0 \subset A^0 = u$. Поэтому отображение тождественного вложения $\varphi_{v^0}: E'_{v^0} \to E'_\beta$ непрерывно. Следовательно,

$$\beta(E', E) \leqslant t. \tag{1}$$

Пусть B — замкнутое выпуклое уравновешенное ограниченное множество в E'_τ. Тогда $B = v^0$ для некоторой окрестности нуля $v \subset E$, так как E — бочечное пространство. Следовательно, B ограничено в E'_t, так как B ограничено в E'_{v^0}. Поэтому в E'_t и в E'_τ совпадают семейства неограниченных множеств. Так как E'_τ — борнологическое пространство, то $\tau(E', E) \geqslant t$ [1, с. 123]. Сравнивая последнее неравенство с неравенством (1), получаем

$$\tau(E', E) = t = \beta(E', E). \tag{2}$$

Из того, что $E = (E'_\tau)'_\beta$ (так как E — бочечное пространство) и из равенства (2) следует цепочка равенств:

$$((E'_t)'_\beta)'_\beta = ((E'_\tau)'_\beta)'_\beta = E'_\beta = E'_t.$$

Следовательно, E'_t рефлексивно (и тем более полурефлексивно).

Докажем *достаточность*. Калибровочная функция множества u^0 (u — окрестность нуля в E) — норма в пространстве E'_{u^0}, причем E'_{u^0}, наделенное нормированной топологией, банахово. Следовательно, пространство E'_t является борнологическим как индуктивный предел банаховых пространств.

Обозначим через F пространство $(E'_t)'$. Так как E — бочечное пространство, то в E' совпадают семейства всех $\tau(E', E)$-ограниченных подмножеств, всех $\beta(E', E)$-ограниченных подмножеств и, что следует из равенства (2), всех t-ограниченных подмножеств. Из неравенства (1) следует, что $E \subset F$. Следовательно, $\beta(F, E'_t)|_E = \beta(E, E')$. Так как E — бочечное пространство, то топология $\beta(E, E')$ совпадает с исходной топологией пространства E. Следовательно, E — полное подпространство пространства F с топологией $\beta(F, E'_t)$. Следовательно, E замкнуто в F_β. Так как E'_t полурефлексивно, то $(F'_\beta)' = E'$ и, следовательно, E всюду плотно в F_β. Поэтому $F_\beta = E$, т. е. топология t согласуется с двойственностью между E' и E. Следовательно, $t \leqslant \tau(E', E)$. Сравнивая последнее неравенство с неравенством (1), получаем, что $t = \tau(E', E)$ и, следовательно, E с топологией $\tau(E', E)$ — борнологическое пространство.

Установим теперь связь между совершенной полнотой (B_r — полнотой) бочечного пространства E, борнологичностью всякого почти замкнутого в E' (всюду плотного почти замкнутого в E'_σ) подпространства M с топологией $\tau(M, E/M^0)$ и полурефлексивностью пространства M_t.

Теорема 4. *Для того чтобы каждое почти замкнутое подпространство $M \subset E'$ (E — бочечное пространство) было борнологическим в топологии Макки $\tau(M, E/M^0)$, необходимо и достаточно, чтобы пространство E было совершенно полным и M_t — полурефлексивным.*

Докажем *необходимость*. Наделим E/M^0 натуральной топологией $\nu(E/M^0, M)$.Так как пространство E бочечно, то E/M^0 бочечно (лемма 3) и $(E/M^0)' = M$ (теорема 2). Так как M борнологично в топологии Макки $\tau(M, E/M^0)$, то M_t полурефлексивно и E/M^0 полно (лемма 4). Следовательно, E совершенно полно (теорема 3).

Докажем *достаточность*. Так как E совершенно полно, то M замкнуто в E'_σ, топология $\nu(E/M^0, M)$ совпадает с фактор-топологией пространства E/M^0 и, следовательно, E/M^0 — полное бочечное пространство в натуральной топологии (так как совершенно полное пространство наследственно полно и фактор-пространство бочечного пространства по замкнутому подпространству бочечно в фактор-топологии). Так как M_t полурефлексивно, то из леммы 4 следует, что M борнологично в топологии Макки $\tau(M, E/M^0)$.

Заменив в формулировке и доказательстве теоремы 4 слова «совершенно полное», «почти замкнутое» словами «B_r-полное», «всюду плотное почти замкнутое», получим необходимое и достаточное условие борнологичности всюду плотных почти замкнутых подпространств в E'_σ.

Доказанные теоремы о совершенной полноте бочечных пространств можно усилить при дополнительном предположении, что E — пространство Шварца. (Напомним несколько определений. Пусть E — векторное пространство и $M, N \subset E$. Множество M будем называть предкомпактным относительно N и писать $M < N$, если M содержится в линейной оболочке множества N и для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует конечное множество $K_\varepsilon \subset M$ такое, что $M \subset (K_\varepsilon + \varepsilon \cdot N)$. Отделимое ЛВП E называется пространством Шварца, если в E для каждой окрестности нуля u существует окрестность нуля v, предкомпактная относительно u).

Теорема 5. *Для того чтобы пространство Шварца E было полным, необходимо и достаточно, чтобы в E' совпадали топология t и топология Макки $\tau(E', E)$.*

Докажем *необходимость*. Так как E — полное пространство Шварца, то в E каждое ограниченное множество относительно компактно. Следовательно, E полурефлексивно. Поэтому достаточно показать, что $t = \beta(E', E)$. Так же, как в лемме 4, можно доказать, что $\beta \leqslant t$. Докажем обратное неравенство. Пусть u — произвольная окрестность нуля в E и v — окрестность нуля в E, предкомпактная относительно u. Следовательно, $u^0 < v^0$ [1, с. 244]. Очевидно, что справедливы следующие неравенства:

$$\sigma(E', E)|_{u^0} \leqslant t|_{u^0} \leqslant t_{v^0}|_{u^0}, \qquad (3)$$

где t_{v^0} — топология пространства E'_{v^0}.

Пусть ω — открытое множество в топологии $t_{v^0}|_{u^0}$; пусть $x \in \omega$. Тогда существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $\{(x + \varepsilon v^0) \cap u^0\} \subset \omega$. Окрестность нуля v выбрана так, что $v < u$. Это означает, что существует конечное множество $K = \{x_i\}_{i=1}^n$ такое, что $v \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i +$

$+\frac{\varepsilon}{3}u\}$. Пусть $x'\in(x+\frac{\varepsilon}{3}K^0)\cap u^0$. Тогда $x'=x+x''$, где $x''\in\in\frac{\varepsilon}{3}K^0$. Пусть $s\in v$. Следовательно, существует $x_j\in\{x_i\}_{i=1}^n$ такой, что $s=x_j+z\,(z\in\frac{\varepsilon}{3}u)$. Проведем следующую оценку:

$$|\langle s,\ x'-x\rangle|=|\langle x_j+z,\ x'-x\rangle|\leqslant|\langle x_j,\ x'-x\rangle|+$$
$$+|\langle z,\ x\rangle|+|\langle z,\ x'\rangle|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Следовательно, $(x-x')\in\varepsilon v^0$ и $x'\in x+\varepsilon v^0$. Таким образом доказано, что

$$\{(x+\frac{\varepsilon}{3}K^0)\cap u^0\}\subset\{(x+\varepsilon v^0)\cap u^0\}.$$

Так как K^0 — окрестность нуля в слабой топологии $\sigma(E', E)$, то последнее включение означает, что ω — открытое множество в топологии $\sigma(E', E)|_{u^0}$. Следовательно, $t_{v^0}|_{u^0}\leqslant\sigma(E', E)|_{u^0}$. Сравнивая последнее неравенство с неравенством (3), получаем

$$\sigma(E', E)|_{u^0}=t|_{u^0}=t_{v^0}|_{u^0}.$$

Из этого, в частности, следует, что поляра u^0 окрестности нуля u из E компактна в топологии t. Из полноты E и предкомпактности его ограниченных подмножеств (так как E — пространство Шварца) следует, что $\beta(E', E)$ — сильнейшая из локально выпуклых топологий в E', обладающих этим свойством [1, с. 155]. Следовательно, $t=\beta(E', E)=\tau(E', E)$.

Докажем *достаточность*. Пусть E — пространство Шварца и в E' совпадают топология t и топология Макки $\tau(E', E)$. Пусть f — почти непрерывный линейный функционал на E', т. е. f непрерывен в топологии $\sigma(E', E)$ на поляре u^0 для каждой окрестности нуля u из E. Так как u^0 — компактное в E'_σ множество, то f ограничен на u^0 и, следовательно, непрерывен на E_{u^0}. Так как $E_t=\varinjlim E'_{u^0}$ относительно отображений тождественного вложения, то f непрерывен на E'_t. Следовательно, f непрерывен в топологии Макки $\tau(E', E)$, а значит, и в топологии $\sigma(E', E)$. Следовательно, пространство E полно [2, теорема 3.8].

Следствие 1. *Если E — полное пространство Шварца, то $E'_\beta\,(=E'_\tau)$ — борнологическое пространство.*

Так как E'_{u^0} банахово, то E'_t — борнологическое пространство как индуктивный предел банаховых пространств. Поскольку E — полное пространство Шварца, то $t=\beta(E', E)=\tau(E', E)$.

Следствие 2. *Для того чтобы бочечное пространство Шварца E было полным, необходимо и достаточно, чтобы пространство E'_τ было борнологическим.*

Необходимость доказана следствием 1. Достаточность вытекает из того, что топология бочечного пространства E совпадает с топологией $\beta(E, E')$ и того, что сильное сопряженное к борнологическому пространству полно [4, с. 188].

Лемма 5. *Пусть E — пространство Шварца и M — всюду плотное почти замкнутое подпространство в E'_σ. Тогда E, наделенное натуральной топологией $\nu(E, M)$,— пространство Шварца.*

Доказательство. Пространство E с топологией $\nu(E, M)$ будем обозначать через E_M. Пусть u — окрестность нуля в E_M. Тогда u — окрестность нуля в E с исходной топологией. Поэтому в E существует окрестность нуля v в исходной топологии такая, что $v < u$ и, следовательно, $u^0 < v^0$ [1, с. 244]. Так как u — окрестность нуля в E_M, то $u^0 \subset M$. Следовательно, $u^0 (v^0 \cap M)$, а $(v^0 \cap M)^0 < u$ [5, лемма 3]. Но $(v^0 \cap M)^0$ — окрестность нуля в E_M. Поэтому E_M — пространство Шварца.

Так как фактор-пространство пространства Шварца по замкнутому подпространству с фактор-топологией является пространством Шварца, то лемма 5 допускает очевидное обобщение (свойство замкнутости класса пространств Шварца относительно перехода к натуральной топологии).

Лемма 6. *Пусть E — пространство Шварца и M — почти замкнутое подпространство в E'. Тогда E/M^0, наделенное натуральной топологией $\nu(E/M^0, M)$,— пространство Шварца.*

Теорема 6. *Пространство Шварца E совершенно полно тогда и только тогда, когда в каждом почти замкнутом подпространстве $M \subset E'$ совпадают топология Макки $\tau(M, E/M^0)$ и топология t.*

Докажем *необходимость*. Так как E — совершенно полное пространство, то почти замкнутое подпространство $M \subset E'$ замкнуто в E'_σ, топология $\nu(E/M^0, M)$ совпадает с фактор-топологией пространства E/M^0, $(E/M^0)' = M$ (E/M^0 взято с фактор-топологией) и E/M^0 полно в фактор-топологии. Так как E — пространство Шварца, то E/M^0 — пространство Шварца в фактор-топологии. Теперь из теоремы 5 следует, что в M совпадают топология t и топология $\tau(M, E/M^0)$.

Докажем *достаточность*. Пусть E — пространство Шварца, M — почти замкнутое подпространство в E'_σ. Тогда E/M^0 — пространство Шварца в топологии $\nu(E/M^0, M)$ (лемма 6). Так как топология $\nu(E/M^0, M)$ согласуется с двойственностью между E/M^0 и M и в M совпадают топология t и топология $\tau(M, E/M^0)$, то E/M^0 полно в топологии $\nu(E/M^0, M)$ (теорема 5). Теперь из критерия совершенной полноты (теорема 3) следует, что E — совершенно полное пространство.

В заключение докажем критерий совершенной полноты для бочечных пространств Шварца, который является усилением в частном случае теоремы 4.

Теорема 7. *Для того чтобы бочечное пространство Шварца E было совершенно полным, необходимо и достаточно, чтобы каждое почти замкнутое подпространство M в E' было борнологическим в топологии Макки $\tau(M, E/M^0)$.*

Достаточность сразу следует из теоремы 4.

Докажем *необходимость*. Так как E — совершенно полное

бочечное пространство Шварца, то почти замкнутое подпространство $M \subset E'$ замкнуто в E'_σ, E/M^0 — полное бочечное пространство Шварца в фактор-топологии и $(E/M^0)' = M(E/M^0$ взято с фактор-топологией). Следовательно, M борнологично в топологии $\tau(M, E/M^0)$ (следствие 2 после теоремы 5).

Заметим, что если в формулировках и доказательствах теорем 4, 6, 7 заменить слова «совершенно полное», «почти замкнутое в E», «критерий совершенной полноты» словами «B_r-полное», «всюду плотное почти замкнутое в E'_σ», «критерий B_r-полноты», то мы получим аналогичные результаты для B_r-полных пространств.

Список литературы: 1. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1967. — 257 с. 2. *Птак В.* О полных топологических линейных пространствах. — Чехословац. мат. журн., 1953, 3 (78), с. 301 — 364. 3. *Valdivia M.* B_r — Complete Spaces which are not B-complete. — Math. Z., 1984, 185, p. 253 — 259. 4. *Шефер X.* Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1971. — 359 с. 5. *Райков Д. А.* О вполне непрерывности сопряженного оператора. — Докл. АН СССР, 1958, 119 3, с. 446 — 449.

Поступила в редколлегию 14.01.85.

УДК 517.948 + 512.13

Л. П. КУЧКО

ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В [1] исследовано многомерное линейное уравнение

$$\varphi(Fx) - Q(x)\varphi(x) = \gamma(x), \tag{1}$$

где $F: R^n \to \boldsymbol{R}^n$ — линейный оператор, $Q: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}^{m^2}$ и $\gamma: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}^m$ — заданные C^∞-отображения. При таких условиях удается полностью выяснить вопрос о существовании и единственности локальных решений φ класса C^∞. Если отображение F нелинейно, то при исследовании аналогичных вопросов возникают дополнительные трудности, связанные с поведением итераций F. Настоящая работа посвящена изучению уравнения (1) в одномерном случае ($n = 1$).

Для разрешимости уравнения (1) в какой-нибудь окрестности начала координат необходима его формальная разрешимость, т. е. существование такого формального отображения $\varphi: \boldsymbol{R}^1 \to \boldsymbol{C}^m$, для которого

$$\hat\varphi(\hat F x) - \hat Q(x)\hat\varphi(x) = \hat\gamma(x).$$

Здесь $\hat F$, $\hat Q$, $\hat\gamma$ — формальные ряды Тейлора в нуле. Формальной разрешимости уравнения (1), однако, недостаточно для его локальной разрешимости (например, в случае, если $F(x) = x$, $Q(x) = E$). Обозначим через $h(x) = |\det Q(x)|$.

Теорема. *Пусть выполнено одно из следующих условий:*

a) $|F'(0)| \neq 1$, $h(0) \neq 0$;

в) $F^2(x) = x + f(x)$, $f \neq 0$, *матрица* $Q(x)$ *треугольна*, $h(0) \neq 0$;

c) $F'(0) = 0$, $h(x) > C|x|^k$ *при некоторых* k *и* $C > 0$.

Тогда для всякого формального решения $\hat{\varphi}$ *уравнения (1) существует такое его локальное* C^∞*-решение* φ, *ряд Тейлора которого в нуле равен* $\hat{\varphi}$.

Схема доказательства теоремы. Предположим сначала, что выполнено условие *a*). Пусть $\hat{\varphi}$ — формальное решение (1). Зафиксируем какое-нибудь C^∞-отображение $\varphi_0 : \boldsymbol{R}^1 \to \boldsymbol{C}^m$ с рядом Тейлора $\hat{\varphi}$. Будем искать решение уравнения (1) в виде $\varphi = \varphi_0 + \psi$, где $\hat{\psi} = 0$. Тогда для ψ получим уравнение

$$\psi(Fx) = Q(x)\,\psi(x) + \tau(x), \tag{2}$$

где $\tau(x) = \gamma(x) + Q(x)\,\varphi_0(x) - \varphi_0(Fx)$ имеет нулевой ряд Тейлора в начале координат. Пусть $|F'(0)| < 1$. Умножая (2) на $(Q(x))^{-1}$, получим уравнение

$$\psi(x) = (Q(x))^{-1}\psi(F(x)) - (Q(x))^{-1}\,\tau(x). \tag{3}$$

Ряд

$$\psi(x) = -\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{i=0}^{k}(Q(F^i x))^{-1}\,\tau(F^k x)$$

сходится в топологии пространства C^∞-отображений. Действительно, так как $\hat{\tau} = 0$, то $\|\tau^{(s)}(x)\| \leqslant C_{s\nu}|x|^\nu$ при $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ и некоторых $C_{s\nu} > 0$. Зафиксируем такое $\delta > 0$, что $|F(x)| \leqslant \alpha|x|$, $\alpha < 1$ при $|x| \leqslant \delta$, и положим $\beta = \max\limits_{|x| \leqslant \delta}\|(Q(x))^{-1}\|$. Тогда

$$\Big\|\prod_{i=0}^{k}(Q(F^i x))^{-1}\tau(F^k x)\Big\| \leqslant C_{0\nu}\,\beta^{k+1}\alpha^{k\nu}.$$

Выбрав ν достаточно большим, получим, что ряд ψ мажорируется сходящимся рядом. Аналогично оцениваются ряды, полученные почленным дифференцированием ряда ψ. Таким образом, $\psi(x)$ — C^∞-отображение, удовлетворяющее уравнению (2).

Если $|F'(0)| > 1$, то уравнение (2) сводится к уравнению

$$\psi(x) = Q(F^{-1}x)\,\psi(F^{-1}x) + \tau(F^{-1}x), \tag{4}$$

решение которого представляется рядом:

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{k}Q(F^{-i}x)\,\tau(F^{-k-1}x) + \tau(F^{-1}x).$$

Предположим теперь, что выполнено условие *b*). Так как матрица $Q(x)$ треугольна, достаточно доказать локальную C^∞-разрешимость уравнения вида (1) при $m = 1$. Пусть сначала $F'(0) = 1$.

Можно считать, что полуоси $\boldsymbol{R}_+$, $\boldsymbol{R}_-$ инвариантны относительно F, поэтому достаточно решить уравнение (2) для каждой полуоси. Пусть, для определенности, $x \geqslant 0$, и $F(x) = x + \alpha x^{k+1} + \ldots$, $\alpha \neq 0$, $|Q(x)| = q + r(x)$, $r(0) = 0$, $q \neq 0$. Пусть, кроме того, $q > 1$. Преобразуем уравнение (2) к виду (3). Рассмотрим два случая: $\alpha < 0$ и $\alpha > 0$. В первом случае отображение F является квазисжатием. Зафиксируем $\delta > 0$ и рассмотрим выпуклый компакт K таких C^∞-отображений $\psi: \boldsymbol{R}^1 \to \boldsymbol{C}^1$ с нулевым рядом Тейлора в нуле, для которых

$$|\psi^{(s)}(x)| \leqslant C_{s\nu} x^\nu, \ \nu \geqslant \nu_s, \ s = 0, 1, 2, \ldots, \ 0 \leqslant x \leqslant \delta. \qquad (5)$$

Так как $|Q^{-1}(x)| \leqslant \tilde{q} < 1$, $0 \leqslant x \leqslant \delta$, если δ достаточно мало, то можно подобрать константы $\{C_{s\nu}\}$, $\{\nu_s\}$ и δ таким образом, чтобы оператор, стоящий в правой части уравнения (3), отображал компакт K в себя. В сил принципа неподвижной точки [2], уравнение (3) имеет решение в этом компакте.

В случае $\alpha > 0$ отображение F является квазирастяжением. Рассмотрим выпуклый компакт K, определяемый неравенствами

$$|\psi^{(s)}(x)| \leqslant \begin{cases} C_{s\nu} x^\nu, & 0 \leqslant x \leqslant \delta_{s\nu}, \\ C_{s\nu} \varepsilon_{s\nu} x^{-\nu}, & \delta_{s\nu} < x \leqslant \delta, \end{cases} \ \nu \geqslant \nu_s, \ s = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (6)$$

и условием $\psi(x) = 0$, $x > \delta$. Учитывая, что $q^{-1} < 1$, можно подобрать числа $\{\delta_{s\nu}\}$, $\{\varepsilon_{s\nu}\}$, $\{C_{s\nu}\}$, $\{\nu_s\}$ и δ таким образом, чтобы компакт K переводился в себя оператором, стоящим в правой части уравнения (3). Следовательно, уравнение (3) имеет решение $\psi \in K$.

Если $q < 1$, то уравнение (2) преобразуется к виду (4), и дальнейшие рассуждения аналогичны.

Пусть теперь $q = 1$, $r'(0) = \ldots = r^{(l-1)}(0) = 0$, $r^{(l)}(0) \neq 0$. Если $l \geqslant k$ (в частности, $l = \infty$), то уравнение (2) преобразуется к виду (3) либо (4) в зависимости от того, является F или F^{-1} квазисжатием. После этого решение отыскивается в компакте вида (5). Если же $l < k$, то уравнение (2) преобразуется к виду (3) либо (4) в зависимости от того, будет ли $|Q(x)| < 1$ или $|Q(x)| > 1$ при малых $x \neq 0$. В этом случае решение ищется в компакте вида (6).

Пусть, наконец, $F'(0) = -1$. Тогда $F^2(x) = x + f(x)$. Согласно предыдущему, уравнение

$$\psi_0(F^2 x) = Q(Fx)\, Q(x)\, \psi_0(x) + Q(Fx)\, \tau(x) + \tau(Fx)$$

имеет локальное C^∞-решение ψ_0 с нулевым рядом Тейлора в нуле. Полагая

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_0(x), & x \geqslant 0, \\ Q(F^{-1}x)\, \psi_0(F^{-1}x) + \tau(F^{-1}x), & x < 0, \end{cases}$$

получим решение уравнения (2).

Если выполнено условие c), то преобразовываем уравнение (2) к виду (3). Повторяя оценки, аналогичные рассмотренным в случае a), доказываем сходимость ряда ψ в топологии пространства C^∞-отображений.

Замечание 1. Решение уравнения (1), вообще говоря, не единственно: из теоремы вытекает, что каждое формальное решение однородного уравнения (при $\gamma(x) = 0$) восстанавливается до локального C^∞-решения.

Замечание 2. Из доказательства теоремы следует, что при выполнении ее условий уравнение (1) имеет решение при любой правой части с нулевым рядом Тейлора в нуле.

Список литературы: 1. *Кучко Л. П.* Линейные функциональные уравнения. — Изв. АН СССР, 1978, **42**, № 2, с. 379—395. 2. *Tychonoff A. N.* Ein Fixpunktsatz. — Math. Ann., 1935, **111**, № 5, p. 767—776.

Поступила в редколлегию 11.12.84.

УДК 517. 982

М. В. ЛЕЙБОВ

О ПОДПРОСТРАНСТВАХ ПРОСТРАНСТВА VMO

Рассмотрим пространства BMO и VMO функций, заданных на отрезке $[0,1]$ или окружности S длины 1 (S — обозначим отрезок $[0, 1]$ с отождествленными концами, и соответственно будем использовать аддитивные обозначения, $\|\cdot\|_*$ — норма в пространстве BMO). Пусть $f \in$ BMO, I — подынтервал. Положим для $h \in (0,1/2)$ $S_h = S$ в случае BMO(S), и $S_h = [h, 1-h]$ в случае BMO $[0,1]$.

Введем следующие обозначения:

$$f_I = \frac{1}{|I|}\int\limits_I f;\ f_*(I) = \frac{1}{|I|}\int\limits_I |f - f_I|;\ f_h(x) = f_*[x-h,\ x+h];$$

$$f^*(h) = \sup_{x \in S_h} f_h(x);\ f_*(\varepsilon) = \sup_{0<h\leqslant\varepsilon} f^*(h).$$

Тогда $\|f\|_* = \sup\limits_h f^*(h)$. Известно, что $f \in$ VMO тогда и только тогда, когда $f_*(\varepsilon) \to 0\ (\varepsilon \to 0)$ [1], или, что то же самое, $f^*(h) \to 0\ (h \to 0)$.

Лемма 1. *Если $f \in$ VMO, то существует интервал I такой, что $\|f\|_* = f_*(I)$.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что для функции $f \in L_1$ функции $f_h(x)$ (при фиксированном $h > 0$) и $f^*(h)$ при $h \in (0,\ 1/2)$ непрерывны. Положим $f^*(0) = 0$. Тогда для $f \in$ VMO $f^*(h)$ непрерывна на $[0,\ 1/2]$ и, следовательно, достигает максимума в некоторой точке $h' > 0$.

Функция $f_{h'}(x)$ достигает максимума в некоторой точке $x' \in S_{h'}$. Тогда $\|f\|_* = \sup\limits_h f^*(h) = f^*(h') = \sup\limits_{x \in S_{h'}} f_{h'}(x) = f_{h'}(x') = f_*(I)$ для $I = [x'-h',\ x'+h']$, что и требовалось доказать.