УДК 517.5

В. С. ВИДЕНСКИЙ

О НЕКОТОРЫХ НОВЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ ПО ПРИБЛИЖЕНИЮ ЛИНЕЙНЫМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

1°. Путеводной нитью в исследованиях теории линейных положительных операторов (л. п. о.) была одна проблема С. Н. Бернштейна (см. п. 6°). Впрочем, общие рассмотрения далеко выходят за круг первоначального вопроса. Мы будем рассматривать л. п. о. A из $C[a, b]$ в $C[a, b]$; как правило, будем считать, что $[a, b] = [0, 1]$. Напомним, что линейный оператор A называется положительным, если для любой $f(x) \geqslant 0$ имеем $A(f(t), x) \geqslant 0$. Знаком $\|\cdot\|$ будем обозначать норму в C. Всегда будем дополнительно предполагать, что $A(1, x) = 1$.

В теории приближения при помощи л. п. о. играет роль функция

$$A((t-x)^2, x) = A(t^2, x) - 2xA(t, x) + x^2$$

и ее максимум $d(A) = \|A((t-x)^2, x\|$.

Справедлива следующая теорема типа Т. Поповичиу, которая для л. п. о. общего вида впервые была указана Р. Г. Мамедовым в 1959 г. [1].

Если $f \in C[0, 1]$, *то имеет место неравенство*

$$\|Af - f\| \leqslant 2\omega(f, \sqrt{d(A)}), \tag{1}$$

где $\omega(f, \delta)$ — *модуль непрерывности функции.*

Положим $\mathrm{Lip}_M 1 = \{f : |f(x') - f(x'')| \leqslant M|x' - x''|, x', x'' \in [0, 1]\}$.

Для $f \in \mathrm{Lip}_M 1$ вместо (1) удобнее неравенство

$$\|Af - f\| \leqslant M\sqrt{d(A)}, \tag{2}$$

которое легко проверяется. Так как

$$|A(f(t), x) - f(x)| \leqslant A(|f(t) - f(x)|, x) \leqslant MA(|t - x|, x),$$

то, применяя неравенство Коши—Буняковского, находим

$$A(|t - x|, x) \leqslant \sqrt{A((t-x)^2, x) A(1, x)} \leqslant \sqrt{d, (A)}.$$

Последовательность л. п. о. $\{A_n\}$ будем называть аппроксимирующей и писать $\{A_n\} \in \mathbf{A}$, если

$$\forall f \in C[0, 1] \lim_{n\to\infty} \|A_n f - f\| = 0.$$

П. П. Коровкину [2] принадлежит следующий критерий.

Для того чтобы $\{A_n\} \in \mathbf{A}$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} d(A_n) = 0. \tag{3}$$

Достаточность следует из (1). Для доказательства необходимости напишем

$$A_n((t-x)^2, x) = (A_n(t^2, x) - x^2) - 2x(A_n(t, x) - x),$$
$$d(A_n) \leqslant \| A_n(t^2, x) - x^2 \| + 2 \| A_n(t, x) - x \|.$$

Но если $\{A_n\} \in \mathbf{A}$, то, в частности, $\varliminf_{n\to\infty} \| A_n(t^\nu, x) - x^\nu \| = 0$.

2°. Из (1) следует, что последовательность л. п. о. $\{A_n\}$ обладает тем лучшими аппроксимационными свойствами, чем быстрее $d(A_n)$ стремится к нулю. Однако, если л. п. о. A_n — алгебраический или тригонометрический полином степени $\leqslant n$, то как указал П. П. Коровкин [2], $\lim_{n\to\infty} n^2 d(A_n) > 0$.

Доказательство, приведенное в [2], существенно опирается на то, что л. п. о. A_n являются полиномиальными. А именно: используется неравенство С. Н. Бернштейна $E_n(|x|) > cn^{-1}$, где $E_n(|x|)$ — наилучшее приближение функции $|x|$ на отрезке $[-1, 1]$ полиномами степени $\leqslant n$. Но, как мы покажем, имеет место более общее утверждение об оценке $d(A_n)$ снизу. Если только предположить, что л. п. о. A_n ранга n, т. е. A_n отображает $C[0, 1]$ в n-мерное подпространство, то справедливо неравенство $d(A_n) \geqslant \geqslant (2n)^{-2}$.

Часто встречаются л. п. о. следующего специального вида. Пусть

$$a_k \in C[0, 1], \ a_k(x) \geqslant 0, \ \sum_{k=0}^{n} a_k(x) = 1$$

и пусть $0 = \xi_0 < \xi < \ldots < \xi_n = 1$; л. п. о. определяется равенством

$$A(f, x) = \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k) a_k(x). \tag{4}$$

Семейство л. п. о. вида (4) при всевозможных $\{a_k\}$ и $\{\xi_k\}$ обозначим через $\mathbf{L}_n^*$, а через $\mathbf{L}_n$ обозначим семейство всех л. п. о. ранга $n+1$. К семейству $\mathbf{L}_n^*$ принадлежат, очевидно, классические многочлены Бернштейна:

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}. \tag{5}$$

Другой пример л. п. о. из $\mathbf{L}_n^*$ представляют интерполяционные ломаные:

$$\Lambda_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \lambda_{nk}(x), \tag{6}$$

где λ_{nk} — линейна на каждом отрезке $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ и $\lambda_{nk}\left(\frac{i}{n}\right) = \delta_{ki}$ ($\delta_{ki} = 0$ при $k \neq i$; $\delta_{ii} = 1$). Мы имеем $\Lambda_n(at+b, x) = ax + b$, в частности,

$$\Lambda_n(1, x) = 1, \ \Lambda_n(t, x) = x. \tag{7}$$

Вычислим $d(\Lambda_n)$. В силу (7) имеем

$$\rho_n(x) = \Lambda_n((t-x)^2, x) = \Lambda_n(t^2, x) - x^2.$$

На отрезке $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ очевидно, $\rho_n(x)$ — многочлен второй степени с нулями в точках $\frac{k}{n}$, $\frac{k+1}{n}$. Следовательно,

$$\rho_n(x) = \left(x - \frac{k}{n}\right)\left(\frac{k+1}{n} - x\right), \quad \frac{k}{n} \leqslant x \leqslant \frac{k+1}{n}.$$

Так как $\max \rho_n(x) = (2n)^{-2}$ при $kn^{-1} \leqslant x \leqslant (k+1)n^{-1}$, то

$$d(\Lambda_n) = (2n)^{-2}. \tag{8}$$

Если $\mathbf{F}$ — некоторое семейство л. п. о., то положим

$$\delta(\mathbf{F}) = \inf_{A \in \mathbf{F}} d(A).$$

Теорема 1. *Справедливы неравенства*

$$(2(n+1))^{-2} \leqslant \delta(\mathbf{L}_n^*) \leqslant \delta(\mathbf{L}_n^*) = (2n)^{-2} \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $A \in \mathbf{L}_n^*$, положим $\max(\xi_{i+1} - \xi_i) = \xi_{k+1} - \xi_k = 2\alpha$, $\xi_{k+1} + \xi_k = 2\beta$. Построим кусочно-линейную функцию g по условиям: $g(x) = 0$ на $[0, \xi_k]$ и $[\xi_{k+1}, 1]$, $g(\beta) = 1$, g — линейна на каждом из отрезков $[\xi_k, \beta]$, $[\beta, \xi_{k+1}]$. Очевидно, что $g \in \mathrm{Lip}_{1/\alpha} 1$, $\|g\| = 1$, $A(g, x) = 0$. Тогда, учитывая (2), имеем

$$1 = \|Ag - g\| \leqslant \alpha^{-1}\sqrt{d(A)},$$

т. е. $d(A) \geqslant \alpha^2$ и так как $2\alpha \geqslant n^{-1}$, то $d(A) \geqslant (2n)^{-2}$ и, благодаря (8), $\delta(\mathbf{L}_n^*) = (2n)^{-2}$. Так что л. п. о. Λ_n является экстремальным в задаче об оценке снизу $d(A)$ в семействе $\mathbf{L}_n^*$.

Пусть $A \in \mathbf{L}_n$ и пусть A отображает $C[0, 1]$ в $(n+1)$-мерное подпространство C_{n+1} с базисом $\{u_i\}_{i=0}^n$. Положим $z_k = k(n+1)^{-1}$ ($k = 0, 1, \ldots, n+1$) и рассмотрим матрицу $(u_i(z_k))$. В каждом ее столбце есть элементы, неравные нулю, так как $1 = A(1, x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i u_i(x)$. Строки нашей матрицы образуют $(n+2)$-мерные векторы $U_i = (u_i(z_0), u_i(z_1), \ldots, u_i(z_{n+1}))$ ($i = 0, 1, \ldots, n$). Существует ненулевой $(n+2)$-мерный вектор $(\delta_0, \ldots, \delta_{n+1})$, ортогональный каждому вектору U_i. Иными словами, существуют числа $\{\delta_k\}_{k=0}^{n+1}$ такие, что

$$\sum_{k=0}^{n+1} |\delta_k| = 1, \quad \sum_{k=0}^{n+1} \delta_k u_i(z_k) = 0 \ (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

Отсюда следует, что для любого $P \in C_{n+1}$ выполняется соотношение ортогональности

$$\sum_{k=0}^{n+1} \delta_k P(z_k) = 0.$$

Построим кусочно-линейную функцию h по условиям $h(z_k) = \operatorname{sign} \delta_k$, h — линейна на каждом из отрезков $[z_k, z_{k+1}]$. Очевидно, что $h \in \mathrm{Lip}_{2(n+1)} 1$, $\|h\| = 1$. Так как $A(h, x) \in C_{n+1}$, то

$$\textstyle\sum_{k=0}^{n+1} \delta_k A \times (h,\ z_k) = 0.$$

Отсюда, учитывая (2), получаем

$$1 = \sum_{k=0}^{n+1} |\delta_k| = \sum_{k=0}^{n+1} \delta_k h(z_k) = \sum_{k=0}^{n+1} \delta_k \{h(z_k) - A(h, z_k)\} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n+1} |\delta_k| \, |h(z_k) - A(h,\ z_k)| \leqslant \|Ah - h\| \sum_{k=0}^{n+1} |\delta_k| =$$
$$= \|Ah - h\| \leqslant 2(n+1) \sqrt{d(A)}.$$

Таким образом, если $A \in \mathbf{L}_n$, то $d(A) \geqslant (2(n+1))^{-2}$ и теорема 1 доказана.

Замечание. Легко показать, что множитель 2 в правой части неравенства (1) нельзя заменить числом, меньшим единицы. *Если $A \in \mathbf{L}_n^*$, то справедливо неравенство*

$$\sup_{f \in C[0,1]} \{\|Af - f\| / \omega(f,\ \sqrt{d(A)}\} \geqslant 1.$$

Пусть g — функция, которую мы применяли для доказательства правой части (9). Так как для любого $\gamma \geqslant \alpha$ мы имеем $\omega(g, \alpha) = \omega(g,\ \gamma) = 1$ и так как $\sqrt{d(A)} \geqslant \alpha$, то $\omega(g,\ \sqrt{d(A)}) = 1 = \|Ag - g\|$, что и доказывает наше утверждение.

3°. Покажем, что по любой полной в $C[0, 1]$ системе $\exists \{U_n\} \in \mathbf{A}$, $U_n \in \mathbf{L}_n^*$.

Теорема 2. *Если $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\varphi_0 = 1$ — полная в $C[0, 1]$ система функций, то существуют такие многочлены $\{u_{nk}\}_{k=0}^{n}$ по системе функций $\Phi_n = \{\varphi_k\}_{k=0}^{n}$, что*

$$u_{nk}(x) \geqslant 0, \ \sum_{k=0}^{n} u_{nk}(x) = 1,$$

и линейные положительные операторы

$$U_n(f,\ x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) u_{nk}(x) \tag{10}$$

образуют аппроксимирующую последовательность.

В классическом случае, когда $\varphi_k(x) = x^k$, роль U_n играют многочлены Бернштейна B_n.

Доказательство. Пусть Λ_n — л. п. о., определенный по формуле (6). Очевидно, $\{\Lambda_n\} \in A$. Для того чтобы приблизить λ_{nk} неотрицательными многочленами по системе Φ, сначала приблизим λ_{nk} строго положительными ломаными μ_{nk}. Пусть $\varepsilon_n \downarrow 0$; введем функции $\{\mu_{nk}\}_{k=0}^{n}$, линейные на каждом отрезке $\left[\frac{i-1}{n},\ \frac{i}{n}\right]$ и такие, что

$$\mu_{nk}\left(\frac{i}{n}\right) = \begin{cases} \varepsilon_n (3n^2)^{-1} & \text{при } i \neq k, \\ 1 - \varepsilon_n (3n)^{-1} & \text{при } i = k. \end{cases}$$

Так как μ_{nk} — ломаная с вершинами в точках i/n и так как

$$\sum_{k=0}^{n} \mu_{nk}\left(\frac{i}{n}\right) = 1, \text{ то } \sum_{k=0}^{n} \mu_{nk}(x) = 1.$$

Мы имеем $\| \lambda_{nk} - \mu_{nk} \| = \varepsilon_n (3n)^{-1}$ $(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n)$.

Выберем m_n столь большим, чтобы существовали многочлены $\{q_{nk}\}_{k=0}^{n-1}$ по системе $\Phi_{m_n} = \{\varphi_k\}_{k=0}^{m_n}$, которые удовлетворяют неравенствам

$$\| \mu_{nk} - q_{nk} \| < \varepsilon_n (6n^3)^{-1} \ (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

Положим $q_{nn}(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} q_{nk}(x)$; тогда

$$\| \mu_{nn} - q_{nn} \| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \| \mu_{nk} - q_{nk} \| < \varepsilon_n (6n^2)^{-1}.$$

Ясно, что все $q_{nk}(x) > 0$ и что

$$\| \lambda_{nk} - q_{nk} \| \leqslant \| \lambda_{nk} - \mu_{nk} \| + \| \mu_{nk} - q_{nk} \| < \varepsilon_n (2n)^{-1}$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n).$$

Построим л. п. о. Q_{m_n} по формуле

$$Q_{m_n}(f,\ x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) q_{nk}(x).$$

Мы имеем $Q_{m_n}(1,\ x) = 1$, и так как

$$\| Q_{m_n} f - \Lambda_n f \| \leqslant \| f \| \varepsilon_n,$$

то $\{Q_{m_n}\}\in \mathbf{A}$. Чтобы закончить доказательство, при $m_i \leqslant n < m_{i+1}$ определим многочлены $\{u_{nk}\}_{k=0}^{n}$ по системе Φ_{m_i} равенствами $u_{nk}(x) = Q_{m_i}(\lambda_{nk}, x)$, а л. п. о. U_n по формуле (10), тогда

$$U_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) Q_{m_i}(\lambda_{nk}, x) = Q_{m_i}(\Lambda_n f, x).$$

Мы имеем

$$\| U_n f - Q_{m_i} f \| = \| Q_{m_i}(\Lambda_n f - f) \| \leqslant \| \Lambda_n f - f \|.$$

И так как $\{Q_{m_i}\}\in \mathbf{A}$, $\{\Lambda_n\}\in \mathbf{A}$, то $\{U_n\}\in \mathbf{A}$.

Интересно заметить, что *если H — какой-нибудь л. п. о. и $G_n = H \circ \Lambda_n$, то справедливо неравенство*

$$d(G_n) \leqslant d(H) + d(\Lambda_n). \tag{11}$$

Так как $U_n = Q_{m_i} \circ \Lambda_n$, $\{Q_{m_i}\}\in \mathbf{A}$, $\{\Lambda_n\}\in \mathbf{A}$, то из (11) и (3) другим образом следует, что $\{U_n\}\in \mathbf{A}$. Выведем неравенство (11). Так как $\Lambda_n(1, x) = 1$ и $H(1, x) = 1$, то $G_n(1, x) = 1$. Благодаря (7)

$$G_n(t, x) = H(t, x),\ G_n(t^2, x) = H(t^2, x) + H(\rho_n, x),$$

где $\rho_n(x) = \Lambda_n(t^2, x) - x^2$.

Мы находим

$$G_n((t-x)^2, x) = H((t-x)^2, x) + H(\rho_n, x).$$

Отсюда следует (11), так как $0 \leqslant H(\rho_n, x) \leqslant \|\rho_n\| = d(\Lambda_n)$.

Замечание. Равноотстоящие узлы kn^{-1} в формуле (10) можно заменить любыми точками $0 = \xi_{n0} < \xi_{n1} < \ldots < \xi_{nn} = 1$, для которых $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(\xi_{nk} - \xi_{n,k-1})$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Для этого достаточно вместо $\Lambda_n f$ рассмотреть ломаные $\Lambda_n^* f$, интерполирующие функцию f в узлах $\{\xi_{nk}\}_{k=0}^{k}$.

4°. Введем в рассмотрение один широкий класс л. п. о., который обобщает многочлены (5) и который естественно назвать л. п. о. типа Бернштейна [3, 4]. Пусть $h_{ni}\in C[0, 1]$, $i = 1, \ldots, n$, $n \in N$, причем $0 \leqslant h_{ni}(x) \leqslant 1$, $h_{ni}(0) = 0$, $h_{ni}(1) = 1$ и, кроме того, функция

$$\varphi_n(x) = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} h_{ni}(x)$$

строго возрастает. Определим узлы τ_{nk} формулами

$$\varphi_n(\tau_{nk}) = kn^{-1}\ (k = 0, 1, \ldots, n),$$

так что $0 = \tau_{n0} < \tau_{n1} < \ldots < \tau_{nn} = 1$. Неотрицательные функции p_{nk} порождаются производящей функцией

$$g_n(x, y) = \prod_{i=1}^{n} (h_{ni}(x)\, y + 1 - h_{ni}(x)) = \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x)\, y^k.$$

Производящая функция g_n встречается в теории вероятностей, а также применялась Кингом в 1966 г. для построения л. п. о. Определим л. п. о. равенством

$$\mathbf{B}_n(f,\ x) = \sum_{k=0}^{n} f(\tau_{nk})\, p_{nk}(x). \tag{12}$$

Если, в частности, все $h_{ni}(x) = x$, то $\varphi_n(x) = x$, $\tau_{nk} = kn^{-1}$, $p_{nk}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ и л. п. о. $\mathbf{B}_n$ совпадает с многочленом Бернштейна (5).

Так как $p_{n0}(0) = 1$, $p_{n0}(1) = 0$, $p_{nn}(0) = 0$, $p_{nn}(1) = 1$, а при $1 \leqslant k \leqslant n-1$ $p_{nk}(0) = p_{nk}(1) = 0$, то $\mathbf{B}_n(f,\ 0) = f(0)$, $\mathbf{B}_n(f,\ 1) = f(1)$. Таким образом, мы интересуемся оценкой разности $\mathbf{B}_n(f, x) - f(x)$ при $0 < x < 1$, и в дальнейшем предположим, что x лежит в этом интервале. Если мы положим

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (\tau_{nk} - x)^2\, p_{nk}(x),$$

то, применяя обычную схему рассуждений Т. Поповичиу, получим неравенство, аналогичное неравенству (1):

$$|\mathbf{B}_n(f,\ x) - f(x)| \leqslant 2\omega(f,\ \sqrt{D_n(x)}). \tag{13}$$

Дадим оценку функции D_n. С этой целью введем функции

$$S_{n\nu}(x) = \sum_{k=0}^{n} [\varphi_n(\tau_{nk}) - \varphi_n(x)]^{\nu} p_{nk}(x),$$

которые при $\nu = 0,\ 1,\ 2$ легко вычисляются с помощью g_n. Действительно, полагая $y = 1$, находим $S_{n0}(x) = g_n(x,\ 1) = 1$. Дважды дифференцируя g_n по y и полагая $y = 1$, получаем

$$S_{n1}(x) = 0,\ S_{n2}(x) = n^{-2} \sum_{i=1}^{n} h_{ni}(x)(1 - h_{ni}(x)). \tag{14}$$

Далее обозначим

$$\gamma_n(x) = \inf_{0<y<1} [\varphi_n(y) - \varphi_n(x)](y-x)^{-1}.$$

Интерес представляет случай, когда $\gamma_n(x) > 0$ в $(0,1)$. При $\varphi_n(x) = x$ имеем $\gamma_n(x) = 1$, но обычно не удается вычислить функцию γ_n, а находится ее оценка снизу. Так как $\gamma_n^2(x)(\tau_{nk} - x)^2 \leqslant [\varphi_n(\tau_{nk}) - \varphi_n(x)]^2$, то $\gamma_n^2(x)\, D_n(x) \leqslant S_{n2}(x)$. Это дает, благодаря (13), такую общую теорему.

Теорема 3. *Если* $\gamma_n(x) > 0$ *при* $0 < x < 1$ *и* $f \in C[0,\ 1]$, *то*

$$|\mathbf{B}_n(f,\ x) - f(x)| \leqslant 2\omega(f,\ \gamma_n^{-1}(x)\sqrt{S_{n2}(x)}). \tag{15}$$

Таким образом, $\{\mathbf{B}_n\} \in \mathbf{A}$, если

$$\lim_{n\to\infty} \| \gamma_n^{-2}(x) S_{n2}(x) \| = 0.$$

Это достаточное условие, вообще говоря, не может быть ослаблено, так как при некотором специальном выборе h_{ni}, который будет указан в п. 6°, оно оказывается необходимым.

5°. В качестве примера применения теоремы 3 приведем л. п. о., которые имеют фиксированные алгебраические особенности. Пусть $(x_{ni})_{i=1}^n$, $(\alpha_{ni})_{i=1}^n$, $n \in N$ — данные матрицы; $x_{ni} \in \mathbf{R} \setminus [0, 1]$, $\alpha_{ni} \in [0, 1]$; ρ_{ni} — расстояние от x_{ni} до $[0, 1]$. Положим

$$h_{ni}(x) = x\,[(1 - x_{ni})(x - x_{ni})^{-1}]^{\alpha_{ni}}; \tag{16}$$

$$s_n(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} [\rho_{ni}(1 + \rho_{ni})^{-1}]^{\alpha_{ni}}.$$

Заметим, что если все $\alpha_{ni} = 0$, то $h_{ni}(x) = x$ и (12) приводит к многочленам Бернштейна (5). Теорема 3 приводит к следующему результату [4].

Теорема 4. *Если л. п. о.* (12) *построены по функциям* (16), *то для* $f \in C[0, 1]$ *справедливо неравенство*

$$\| \mathbf{B}_n f - f \| \leqslant 2\omega(f,\ s_n^{-1/2}(\alpha)). \tag{17}$$

Таким образом, для того, чтобы построенная по функциям (16) последовательность л. п. о. $\{\mathbf{B}_n\} \in \mathbf{A}$, достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} s_n(\alpha) = \infty. \tag{18}$$

Доказательство. Как правило, индекс n будем опускать. Будем считать, что $x_i < 0$ при $i = 1, \ldots, r$ и что $x_i > 1$ при $i = r + 1, \ldots, n$. Для того чтобы оценить S_{n2} сверху, а γ снизу, введем функцию

$$\theta(x) = n^{-1}\{(1 - x)^{-1} \sum_{i=1}^{r} (1 - h_{ni}(x)) + x^{-1} \sum_{i=r+1}^{n} h_{ni}(x)\}.$$

Из (14) следует, что $nS_{n2}(x) \leqslant \theta(x)$. Докажем, что

$$n^{-1} s_n(\alpha) \leqslant \theta(x) \leqslant \gamma(x). \tag{19}$$

При $i = 1, \ldots, r$ мы имеем $x_i = -\rho_i$ и

$$1 - h_i(x) = [(x + \rho_i)^{\alpha_i} - x(1 + \rho_i)^{\alpha_i}](x + \rho_i)^{-\alpha_i} \geqslant$$
$$\geqslant \rho_i^{\alpha_i}(1 + \rho_i)^{-\alpha_i}(1 - x),$$

так как благодаря выпуклости функции $(t + \rho)^\alpha$ имеем $(x + \rho)^\alpha \geqslant$ $\geqslant (1 - x)\rho^\alpha + x(1 + \rho)^\alpha$. При $i = r + 1, \ldots, n$ мы имеем $x_i =$ $= 1 + \rho_i$ и

$$h_i(x) = x\rho_i^{\alpha_i}(x_i - x)^{-\alpha_i} \geqslant x\rho_i^{\alpha_i}(1 + \rho_i)^{-\alpha_i},$$

откуда вытекает первое из неравенств (19). Для того чтобы доказать второе из них, замечаем, что $h_i''(x) < 0$ при $i = 1, \ldots, r$; следовательно, $h_i'(x)$ убывает, и при $0 \leqslant x < y < 1$ справедливы неравенства

$$[h_i(y) - h_i(x)](y - x)^{-1} = (y - x)^{-1} \int_x^y h_i'(t)\,dt \geqslant$$

$$\geqslant (1 - x)^{-1} \int_x^1 h_i'(t)\,dt = [1 - h_i(x)](1 - x)^{-1}.$$

Аналогично, так как $h_i''(x) > 0$ при $i = r + 1, \ldots, n$, то при $0 < x < y \leqslant 1$ получаем

$$[h_i(y) - h_i(x)](y - x)^{-1} = (y - x)^{-1} \int_x^y h_i'(t)\,dt \geqslant$$

$$\geqslant x^{-1} \int_0^x h_i'(t)\,dt = x^{-1} h_i(x).$$

Это дает второе из неравенств (19), и мы получаем окончательно

$$D_n(x) \leqslant \gamma^{-2}(x) S_{n2}(x) \leqslant \theta^{-2}(x) S_{n2}(x) \leqslant \theta^{-1}(x) n^{-1} \leqslant s_n^{-1}(\alpha), \quad (20)$$

и неравенство (17) следует из (15). Из (20) следует неравенство

$$d(\mathbf{B}_n) \leqslant s_n^{-1}(\alpha). \quad (21)$$

В [3] рассмотрены также h_{ni} с логарифмическими особенностями в x_{ni}.

6°. Предположим теперь, что в (16) все $\alpha_{ni} = 1$, соответствующее $s_n(\alpha)$, будем обозначать через s_n, так что

$$h_{ni}(x) = x(1 - x_{ni})(x - x_{ni})^{-1}, \quad s_n = \sum_{i=1}^{n} \rho_{ni}(1 + \rho_{ni})^{-1}. \quad (22)$$

При этом л. п. о. (12) будут рациональными дробями с полюсами x_{ni}. Покажем, что в этом случае условие (18) является не только достаточным, но и необходимым для того чтобы $\{\mathbf{B}_n\} \in \mathbf{A}$.

Теорема 5. *Пусть* $0 = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_n = 1$, p_{nk} *порождаются производящей функцией* g_n, *в которой* h_{ni} *определены формулами* (22). *Если л. п. о.*

$$H_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k) p_{nk}(x),$$

то справедливо неравенство

$$d(H_n) \geqslant \frac{1}{16} e^{-3s_n}. \quad (23)$$

Так как $H_n \in \mathbf{L}_n^*$, то из (9) следует также $d(H_n) \geqslant (2n)^{-2}$. Мы имеем, в частности, для л. п. о. $\mathbf{B}_n$, для которых $\xi_k = \tau_{nk}$, из (21) и (23) двусторонние неравенства

$$\frac{1}{16} e^{-3s_n} \leqslant d(\mathbf{B}_n) \leqslant s_n^{-1}. \tag{24}$$

Таким образом, из (3) и (24) вытекает

Теорема 6. *Если л. п. о.* (12) *построены по функциям* (22), *то для того чтобы* $\{\mathbf{B}_n\} \in \mathbf{A}$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty. \tag{25}$$

Доказательство теоремы 5. Пусть $x_{ni} < 0$ при $i \leqslant r$; $x_{ni} > 1$ при $i > r$. Из конструкции g_n ясно, что

$$p_{nr}(x) \geqslant h_{n1}(x) \ldots h_{nr}(x)(1 - h_{n,r+1}(x)) \ldots (1 - h_{nn}(x)).$$

В случае $i \leqslant r$ имеем $\rho_{ni} = |x_{ni}|$,

$$\frac{1}{h_{ni}(x)} = 1 + \frac{1-x}{x}\frac{\rho_{ni}}{1+\rho_{ni}} \leqslant 1 + 3\frac{\rho_{ni}}{1+\rho_{ni}}, \ \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4};$$

при $i > r$ имеем $\rho_{ni} = x_{ni} - 1$,

$$\frac{1}{1-h_{ni}(x)} = 1 + \frac{x}{1-x} \frac{\rho_{ni}}{1+\rho_{ni}} \leqslant 1 + 3\frac{\rho_{ni}}{1+\rho_{ni}}, \ \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}.$$

Применяя неравенство $1 + t < e^t$, находим

$$p_{nr}(x) \geqslant e^{-3s_n} \text{ при } \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}.$$

Выбирая точку η по условиям

$$|\xi_{nr} - \eta| = \frac{1}{4}, \ \frac{1}{4} \leqslant \eta \leqslant \frac{3}{4},$$

получаем окончательно

$$d(H_n) \geqslant (\xi_{nr} - \eta)^2 p_{nr}(\eta) \geqslant \frac{1}{16} e^{-3s_n}.$$

В 1948 г. С. Н. Бернштейн, ссылаясь на теоретико-вероятностную интуицию, поставил вопрос, касающийся возможного обобщения многочленов (5). Пусть $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\varphi_0 = 1$ — полная в пространстве $C[0, 1]$ система Маркова такая, что при любом n по системе $\{\varphi_k\}_{k=0}^{n}$ можно построить линейно независимую систему многочленов $\{\psi_{nk}\}_{k=0}$, удовлетворяющую условиям*

$$\psi_{nk}(x) \geqslant 0, \ \lim_{x\to\infty} \frac{\psi_{nk}(x)}{\psi_{n,k-1}(x)} = 0, \ \lim_{x\to 1} \frac{\psi_{nk}(x)}{\psi_{n,k-1}(x)} = \infty.$$

* Такая система $\{\psi_{nk}\}_{k=0}^{n}$ называется D^*-базисом для $\{\psi_k\}_{k=0}^{n}$. Нормирующим условием $\sum_{k=0}^{n} \psi_{nk}(x) = 1$ D^*-базис определяется однозначно.

Нельзя ли утверждать, что существуют такие точки $\zeta_{nk} \in [0, 1]$, что последовательность л. п. о.

$$A_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} f(\zeta_{nk}) \psi_{nk}(x)$$

будет аппроксимирующей?

Напомним, что система $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ называется системой Маркова, если при любом n функции $\{\varphi_k\}_{k=0}^{n}$ образуют систему Чебышева.

Вначале гипотеза С. Н. Бернштейна казалась достаточно правдоподобной. Однако, как мы покажем, из теоремы 5 следует отрицательный ответ на этот вопрос. В самом деле, если p_{nk} порождены функцией $g_n(x, y)$, когда h_{ni} определены по формуле (22), то

$$p_{nk}(x) = \pi_{nk} x^k (1-x)^{n-k} \prod_{i=1}^{k} |x - x_{ni}|^{-1}, \ \pi_{nk} > 0,$$

кроме того, $\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) = 1$. Ясно, что система $\{p_{nk}\}_{k=0}^{n}$ является D^*-базисом системы рациональных дробей с фиксированной матрицей полюсов

$$\{1, (x - x_{ni})^{-1}\}_{i=1}^{n}, \ n \in N, \ x \in \mathbf{R} \setminus [0, 1]. \tag{26}$$

Но, как известно, для того чтобы система (26) была полна в $C[0, 1]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \rho_{ni}^{1/2} = \infty. \tag{27}$$

Мы видим, что если система (26) полна в $C[0, 1]$, но не удовлетворяет условию (25), то из неравенства (23) следует, что $\{H_n\}$ не является аппроксимирующей ни при каком выборе $\{\xi_{ni}\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$.

Таким образом, если бы в теореме 2 мы допустили, что полная система Φ является системой Маркова, то указанные в ней многочлены $\{u_{nk}\}_{k=0}^{n}$, вообще говоря, не образуют D^*-базиса системы $\{\varphi_k\}_{k=0}^{n}$.

Автором был рассмотрен также и вопрос о приближении гладких функций при помощи л. п. о. $\mathbf{B}_n$, соответствующих $\{h_{ni}\}_{i=1}^{n}$, определяемым по (22).

7°. В п. 7° и 8° будет удобнее выбрать отрезок $[-1, 1]$. Оператор A_n называется алгебраическим полиномиальным степени $\leqslant n$, если он отображает пространство $C[-1, 1]$ в подпространство алгебраических полиномов степени $\leqslant n$. Множество всех алгебраических полиномиальных л. п. о. степени $\leqslant n$ мы будем обозначать через $\mathbf{P}_n$, а через $\mathbf{P}_n^*$ — его подмножество, состоящее из всех л. п. о. вида (4), т. е. $\mathbf{P}_n^* = \mathbf{P}_n \cap Z_n^*$.

В 1968 г. на международной конференции по теории приближений в Обервольфахе Т. Поповичу выдвинул проблему — найти

$\delta(\mathbf{P}_n^*)$. Так как $\mathbf{P}_n \subset Z_n$, $\mathbf{P}_n^* \subset Z_n^*$, то $\delta(Z_n) \leqslant \delta(\mathbf{P}_n)$, $\delta(Z_n^*) \leqslant \delta(\mathbf{P}_n^*)$, и оценки снизу следуют из теоремы 1. Неравенство (9) написано для отрезка [0, 1]. Но из доказательства легко видеть, что для произвольного отрезка $[a, b]$ появляется множитель $(b-a)^2$, т. е.

$$(b-a)^2 (2n+2)^{-2} \leqslant \delta(\mathbf{L}_n) \leqslant \delta(\mathbf{L}_n^*) = d(\Lambda_n) = (b-a)^2 (2n)^{-2}.$$

Мы укажем л.п.о. $L_n \in \mathbf{P}_n$ и $G_n = L_n \circ \Lambda_n$, для которых

$$d(L_n) = (n+1)(n+2)^{-1} \sin^2 \pi (n+2)^{-1}, \quad d(G_n) \leqslant d(L_n) + d(\Lambda_n),$$

и, таким образом, получим оценку сверху для $\delta(\mathbf{P}_n)$ и $\delta(\mathbf{P}_n^*)$.

Теорема 7. [5]. *Справедливы неравенства*

$$(n+1)^{-2} \leqslant \delta(\mathbf{P}_n) \leqslant (n+1)(n+2)^{-1} \sin^2 \pi (n+2)^{-1}, \tag{28}$$

$$n^{-2} \leqslant \delta(\mathbf{P}_n^*) \leqslant (n+1)(n+2)^{-1} \sin^2 \pi (n+2)^{-1} + n^{-2}. \tag{29}$$

Ранее мне не были известны примеры $A_n \in \mathbf{P}_n$ из $C[-1, 1]$ в $C[-1, 1]$, для которых $d(A_n) = O(n^{-2})$ (ср. [1, п.6.5.2], где речь идет об оптимальных л.п.о. из семейства $\mathbf{P}_n$).

При нечетном n М. Ш. Джамалов в Добавлении к [5] построил л.п.о. $V_n \in \mathbf{P}_n$, для которого $d(V_n) = \sin^2 \pi (n+3)^{-1}$, что при $n = 2m+1$ несколько усиливает (28) и (29):

$$\delta(\mathbf{P}_n) \leqslant \sin^2 \pi (n+3)^{-1}, \quad \delta(\mathbf{P}_n^*) \leqslant \sin^2 \pi (n+3)^{-1} + n^{-2}.$$

Доказательство теоремы 7. В монографиях [1, 2] для 2π-периодических функций рассмотрены тригонометрические полиномиальные л.п.о. типа свертки

$$\sigma_n(f, \theta) = \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(t-\theta)\, dt,$$

где

$$K_n(\theta) = (n+2)^{-1} \left| \sum_{k=1}^{n+1} e^{ik\theta} \sin k\alpha \right|^2 = \frac{1}{2} + \sum_{k+1}^{n} \rho_k \cos k\theta,$$

$\alpha = \pi (n+2)^{-1}$, а коэффициенты определяются формулами

$$\begin{aligned}(n+2)\rho_k &= 2 \sum_{m=1}^{n+1-k} \sin m\alpha \sin (m+k)\alpha = \\ &= (n+2-k)\cos k\alpha - \sum_{m=0}^{n+1-k} \cos (k+2m)\alpha = \\ &= (n+2-k)\cos k\alpha + \cos\alpha \sin k\alpha (\sin\alpha)^{-1}.\end{aligned} \tag{30}$$

В частности, имеем $\rho_1 = \cos\alpha$, $\rho_2 = 1 - 2(n+1)(n+2)^{-1}\sin^2\alpha$.

Положим $\rho_0 = 1$ и обозначим через a_k, $b_к$ коэффициенты Фурье функции f; ясно, что

$$\sigma_n(f, \theta) = \sum_{k=0}^{n} \rho_k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta),$$

$$\sigma_n(1, \theta) = 1, \ \sigma_n(\cos kt, \theta) = \rho_k \cos k\theta, \ \sigma_n(\sin kt, \theta) = \rho_k \sin k\theta.$$

Построим на отрезке $[-1, 1]$ л.п.о. $L_n \in \mathbf{P}_n$ по формуле

$$L_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} \rho_k a_k T_k(x), \tag{31}$$

где T_k — многочлены Чебышева; a_k — коэффициенты Фурье — Чебышева функции f. Очевидно,

$$L_n(f(t), x) = \sigma_n(f(\cos, \tau), \theta),$$

откуда следует, что L_n — л.п.о. Мы имеем

$$L_n(1, x) = 1, \; L_n(T_k, x) = \rho_k T_k(x),$$

и так как $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, то

$$L_n(t, x) = \rho_1 x, \;\; L_n(t^2, x) = \rho_2 x^2 + \frac{1}{2}(1 - \rho_2).$$

Таким образом,

$$L_n((t-x)^2, x) = (\rho_2 - 2\rho_1 + 1)x^2 + \frac{1}{2}(1 - \rho_2). \tag{32}$$

В (32) коэффициент при x^2 равен

$$4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 - 2(n+1)(n+2)^{-1} \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right\} \leqslant 0,$$

и следовательно максимум в (32) достигается при $x = 0$, значит,

$$d(L_n) = \frac{1}{2}(1 - \rho_2) = (n+1)(n+2)^{-1} \sin^2 \alpha. \tag{33}$$

Положим $G_n = L_n \circ \Lambda_n$, где Λ_n — интерполяционная ломаная с равноотстоящими узлами на отрезке $[-1, 1]$, имеем $d(\Lambda_n) = n^{-2}$. И так как $G_n \in \mathbf{P}_n^*$, то, благодаря (11), получаем (29).

Заметим, что (1) и (33) непосредственно дают теорему Джексона о приближении алгебраическими полиномами:

$$\| L_n f - f \| \leqslant 2\omega(f, [(n+1)(n+2)^{-1}]^{1/2} \sin \pi (n+2)^{-1}).$$

8°. Для теоремы Вороновской о приближении $f \in C^{(2)}$ многочленами Бернштейна известен ряд обобщений на многие другие последовательности л.п.о. Для этих л.п.о. порядок приближения не превышает $O(n^{-1})$. Интересно, что для л.п.о. L_n, определенных формулой (31), этот порядок является оптимальным, а именно $O(n^{-2})$.

Теорема 8. *Если* $f \in C^{(3)}[-1, 1]$, *то*

$$\left\| n^2 \{L_n(f, x) - f(x)\} + \frac{\pi^2}{2} \{f'(x)\, x - f''(x)(1 - x^2)\} \right\| = O(n^{-1/2}). \tag{34}$$

Доказательство. Положим

$$S_\nu(x) = L_n((t-x)^\nu, x), \;\; \hat{S}_\nu(x) = L_n(|t - x|^\nu, x).$$

Нам понадобятся S_ν ($\nu = 0,1, \ldots, 4$) и оценка для $\hat{S}_3$. Из п.7° имеем

$$S_0(x) = L_n(1, x) = 1, \ S_1(x) = L_n((t-x), x) = (\rho_1 - 1)x,$$

а $S_2(x)$ дается формулой (32). Учитывая равенство $L_nT_k = \rho_kT_k$ и явные формулы для многочленов Чебышева $T_3(x) = 4x^3 - 3$, $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$, находим

$$S_3(x) = \Delta_3(\rho)x^3 - \frac{3}{4}((\rho_3 - \rho_1) + 2(1 - \rho_2))x,$$
$$S_4(x) = \Delta_4(\rho)x^4 - (\rho_4 - 3\rho_3 + 2\rho_2 + 3\rho_1 - 3)x^2 + \\ + \frac{1}{8}(\rho_4 - 1) + \frac{1}{2}(1 - \rho_2),$$

где $\Delta_m(\rho) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k \rho_{m-R}$.

Если применим формулу Тейлора к правой части (30), то получим

$$\rho_1 = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + O(\alpha^3), \ \rho_2 = 1 - 2\alpha^2 + O(\alpha^3),$$
$$\rho_3 = 1 - \frac{9}{2}\alpha^2 + O(\alpha^3), \ \rho_4 = 1 - 8\alpha^2 + O(\alpha^3).$$

Отсюда следует, что $S_3(x) = O(n^{-3})$, $S_4(x) = O(n^{-3})$. По неравенству Коши—Буняковского оценим $\hat{S}_3$:

$$S_3(x) \leqslant \sqrt{S_2(x)S_4(x)} = O(n^{-5/2}).$$

По формуле Тейлора мы имеем

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{f''(x)}{2!}(t-x)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(t-x)^3.$$

Применяя к правой и левой части оператор L_n, получаем

$$L_n(f, x) = f(x) + f'(x)S_1(x) + \frac{f''(x)}{2!}S_2(x) + R_2(x), \tag{35}$$

причем

$$\|R_2\| \leqslant \frac{\|f'''\|}{6}\|\hat{S}_3\| = O(n^{-5/2}). \tag{36}$$

Из (35) и (36), учитывая выражения для S_ν, получаем (34).

9°. В заключение рассмотрим вопрос о регулярных матрицах суммирования, порождаемых последовательностями л.п.о. Связь между многочленами Бернштейна, а также их обобщениями для системы функций $\{x^{\alpha_k}\}$ и методами суммирования последовательностей была обнаружена и исследована в известных работах Хаусдорфа и Кноппа [6].

Вернемся в этом пункте к отрезку [0,1] и докажем одну весьма общую теорему о матрицах суммирования, которые строятся при помощи последовательностей л.п.о. вида $\mathbf{L}_n^*$, т. е.

$$A_n(f,\ x) = \sum_{k=0}^{n} f(\xi_{nk})\, a_{nk}(x), \tag{37}$$

где $0 = \xi_{n0} < \xi_{n1} < \ldots < \xi_{nn} = 1$, $a_{nk} \in C[0,\ 1]$, $a_{nk}(x) \geqslant 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Теорема 9. *Если α — функция ограниченной вариации на* [0,1], *такая что* $\alpha(0) = \alpha(0+) = 0$, $\alpha(1) = 1$ *и последовательность л.п.о.* (37) $\{A_n\} \in \mathbf{A}$, *то регулярна матрица суммирования*

$$c_{nk} = \int_0^1 a_{nk}(t)\, d\alpha(t).$$

Доказательство. Мы имеем

$$\sum_{k=0}^{n} c_{nk} = 1,\ \ \sum_{k=0}^{n} |c_{nk}| \leqslant \int_0^1 |d\alpha(t)| = A.$$

Таким образом, для доказательства регулярности матрицы (c_{nk}) нужно только проверить, что

$$\lim_{n\to\infty} c_{nk} = 0. \tag{38}$$

При выводе правой части неравенства (9) мы показали, что

$$n^{-1} \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant w} (\xi_{ni} - \xi_{n,\ i-1}) \leqslant 2\sqrt{d(A_n)}.$$

Отсюда следует, что

$$\xi_{nk} = \sum_{i=1}^{k} (\xi_{ni} - \xi_{n,\ i-1}) \leqslant 2k\sqrt{d(A_n)}.$$

И так как $\{A_n\} \in \mathbf{A}$, то в силу (3)

$$\lim_{n\to\infty} \xi_{nk} = 0. \tag{39}$$

Выведем (38) из (39). Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и натуральное число k. Выберем $\eta > 0$ по условию

$$2\int_0^{\eta} |d\alpha(t)| < \varepsilon,$$

а затем выберем N так, чтобы при $n \geqslant N$ выполнялись неравенства

$$2\xi_{nk} < \eta,\ \ 8Ad(A_n) < \varepsilon\eta^2.$$

Так как $0 \leqslant a_{nk}(t) \leqslant 1$ и

$$a_{nk}(t) \leqslant d(A_n)(\xi_{nk} - t)^{-2} \leqslant 4d(A_n)\,\eta^{-2} \text{ при } \eta \leqslant t \leqslant 1,$$

то имеем

$$|c_{nk}| \leqslant \int_0^\eta |d\alpha(t)| + \int_\eta^1 a_{nk}(t)\, |d\alpha(t)| < \varepsilon,$$

и теорема 9 доказана.

Следствие. *Если последовательность л.п.о.* (37) $\{A_n\} \in \mathbf{A}$, *то при любом* $x_0 \in (0, 1]$ *регулярна матрица* $(a_{nk}(x_0))$; *при любом* $x_0 \in [0, 1)$ *регулярна матрица* $(a_{n,\, n-k}(x_0))$.

Это следствие в случае, когда в (37) $\xi_{nk} = kn^{-1}$, было доказано Кингом в 1968 г.

10°. Пусть л.п.о. (12) построены по функциям (22). Применим к ним теорему 9 и исследуем этим способом известный метод суммирования $[J, d_{ni}]$ Якимовского. Пусть $(d_{ni})_{i=i}^n$, $n \in N$,— данная треугольная матрица положительных чисел. Матрица суммирования Якимовского определяется производящей функцией

$$\prod_{i=1}^n \frac{y + d_{ni}}{1 + d_{ni}} = \sum_{k=0}^n c_{nk} y^k. \tag{40}$$

Положим $D_n = \sum\limits_{i=1}^n d_{ni}^{-1}$. Получаем непосредственно следующее предложение.

Теорема 10. *Если* $\inf d_{ni} > 0$, *то для того, чтобы матрица* (c_{nk}), *определяемая формулами* (40), *была регулярной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n \to \infty} D_n = \infty. \tag{41}$$

Доказательство. Условие (41) необходимо, так как из $1 + t < e^t$ следует

$$c_{n0} = \prod_{i=1}^n (1 + d_{ni}^{-1})^{-1} > e^{-D_n}.$$

Для доказательства достаточности условия (41) установим связь между методом суммирования $[J, d_{ni}]$ и л.п.о. $\mathbf{B}_n$. Положим $\inf d_{ni} = 2\varepsilon$, $x_0 = (1 + \varepsilon)^{-1}$, $x_{ni} = d_{ni}(d_{ni} - \varepsilon)^{-1}$. Тогда из (22) найдем, что $h_{ni}(x_0) = (1 + d_{ni})^{-1}$, и, сравнивая $g_n(x, y)$, порождающую функции $p_{nk}(x)$, с (40), получаем $p_{nk}(x_0) = c_{nk}$. Так как $s_n = \varepsilon D_n$, то из (41) и теоремы 6 следует, что $\{\mathbf{B}_n\} \in \mathbf{A}$, и, значит, матрица $(c_{nk}) = (p_{nk}(x_0))$ регулярна.

Требование $\inf d_{ni} > 0$ излишне; оно вызвано здесь методом доказательства. Впрочем, в обычно рассматриваемых частных случаях оно выполнено.

Список литературы: 1. *De Vore R. A.* The approximation of continuons functions by positive linear operators.— Lecture Notes in Mathematics, 293, Berlin, 1972. —289 p. 2. *Коровкин П. П.* Линейные операторы и теория приближений.— М.: Физматгиз, 1959. —211 с. 3. *Виденский В. С.* О приближении операторами типа Бернштейна.— Изв. АН АрмССР. Сер. мат., 1981, **16**, № 2, с. 103—110. 4. *Виденский В. С.* Линейные положительные операторы с данной матрицей алгебраических особенностей.— Операторы и их приложения, 1983, с. 28—33. 5. *Виденский В. С.* Об одной проблеме Т. Поповичиу.— Операторы и их приложения, 1983, с. 33—40. 6. *Харди Г.* Расходящиеся ряды.— М.: Изд-во иностр. лит., 1951. —504 с.

Поступила в редколлегию 29.07.83.