УДК 517.535.4

М. Н. ШЕРЕМЕТА

УСИЛЕНИЕ ТЕОРЕМЫ БОРЕЛЯ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ

1^0. Для целой функции f обозначим $M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$ и пусть $T(r, f)$ — ее неванлинновская характеристика. А. А. Гольдберг доказал, что для любой возрастающей последовательности (λ_n) натуральных чисел существует целая функция вида

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\lambda_n} \tag{1}$$

такая, что $a_n \geqslant 0\,(n \geqslant 1)$ и

$$\varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\ln M(r, f)}{T(r, f)} = +\infty.$$

Здесь показано, что аналогичный результат не имеет места в классах целых функций с ограничением на рост, в частности в классе целых функций конечного порядка.

Через Ω обозначим класс положительных неубывающих выпуклых на $]-\infty, +\infty[$ функций Φ таких, что $\Phi(\sigma)/\sigma \to +\infty$ $(\sigma \to +\infty)$. Отметим, что классу Ω принадлежит функция $\ln M(e^\sigma, f)$.

Теорема 1. *Для любой функции $\Phi \in \Omega$ существует возрастающая последовательность (λ_n) натуральных чисел такая, что для любой функции (1), удовлетворяющей условию $\ln M(e^\sigma, f) \leqslant \Phi(\sigma)$ для всех $\sigma \in \boldsymbol{R}$, выполняется соотношение*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M(r, f)}{T(r, f)} < +\infty.$$

Справедливость теоремы 1 будет показана при помощи одной теоремы из теории тригонометрических рядов и доказанного ниже усиления теоремы Э. Бореля.

2°. Известная теорема Бореля (см., напр., [1, с. 31]) утверждает, что для любой целой функции (1) конечного порядка $\ln M(r, f) \sim \ln \mu(r, f)$ $(r \to +\infty)$, где $\mu(r, f) = \max\{|a_n| r^{\lambda_n} : n \geqslant 1\}$ — максимальный член ряда (1). Мы рассмотрим целые функции F, представленные абсолютно сходящимися в $\boldsymbol{C}$ рядами Дирихле вида

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}. \tag{2}$$

Здесь $0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to \infty)$ и среди коэффициентов a_n могут встречаться равные нулю, однако будем считать, что ряд (2) не сводится к экспоненциальному многочлену. Обозначим $M_0(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \boldsymbol{R}\}$ и пусть $\mu_0(\sigma, F) = \max\{|a_n| e^{\sigma\lambda_n} : n \geqslant 1\}$ — максимальный член ряда (2).

Теорема 2. *Для любой функции $\Phi \in \Omega$ существует возрастающая последовательность (λ_n) неотрицательных чисел такая, что для любой ее подпоследовательности (λ_n^*) и для любой целой функции F, представленной абсолютно сходящимся в $\boldsymbol{C}$ рядом Дирихле $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n^*}$ и удовлетворяющей условию $\ln M_0(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma)$ для всех $\sigma \in \boldsymbol{R}$, выполняется соотношение*

$$\ln M_0(\sigma, F) \sim \ln \mu_0(\sigma, F) \quad (\sigma \to +\infty). \tag{3}$$

Доказательство. Так как класс рядов Дирихле с показателями λ_n^* содержится в классе рядов Дирихле с показателями λ_n, то нам достаточно показать, что для любой функции $\Phi \in \Omega$ существует возрастающая последовательность (λ_n) неотрицательных чисел такая, что для любой функции (2), удовлетворяющей условию $\ln M_0(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma)$ $(\sigma \in \boldsymbol{R})$, выполняется соотношение (3).

Как будет видно из дальнейшего изложения, достаточно взять $\lambda_n = \Phi(k \ln n)$, где $k > 0$ — произвольное фиксированное число. Однако, чтобы получить из теоремы 2 соответствующий аналог для степенных рядов, нам нужно несколько изменить выбор λ_n.

Пусть $m \in \boldsymbol{N}$, $t_m = \min\{\Phi(k \ln n) : [\Phi(k \ln n)] = m\}$, а $n_m \in \boldsymbol{N}$ выберем так, чтобы $t_m = [\Phi(k \ln n_m)]$. Положим

$$\{\lambda_n\} = \{\Phi(k \ln n)\} \setminus \{\Phi(k \ln n_m)\} \cup \{[\Phi(k \ln n_m)]\}.$$

Ясно, что $\lambda_n = \Phi(k \ln n) + O(1)$ $(n \to \infty)$. Упорядочим множество $\{\lambda_n\}$ в порядке возрастания его элементов и покажем, что соответствующая последовательность (λ_n) удовлетворяет требуемым условиям.

Действительно, пусть функция (2) с так определенными показателями удовлетворяет условию $\ln M_0(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma)$ $(\sigma \in \boldsymbol{R})$. Тогда по неравенству Коши

$$|a_n| \leqslant M_0(\sigma, F)\, e^{-\sigma\lambda_n} \leqslant \exp\{\Phi(\sigma) - \sigma\lambda_n\} \tag{4}$$

для всех $n \geqslant 1$ и всех $\sigma \in \boldsymbol{R}$. Обозначим через φ функцию, обратную к Φ, и положим в (4) $\sigma = \varphi(\lambda_n)$. Тогда

$$|a_n| \leqslant \exp\{-\lambda_n(\varphi(\lambda_n) - 1)\}. \tag{5}$$

Пусть $N(\sigma) = \min\{n : \varphi(\lambda_n) - 1 \geqslant 2\sigma\}$. В силу (5) имеем

$$M_0(\sigma, F) \leqslant \sum_{n=1}^{N(\sigma)-1} |a_n|\, e^{\sigma\lambda_n} + \sum_{n=N(\sigma)}^{\infty} |a_n|\, e^{\sigma\lambda_n} \leqslant$$

$$\leqslant N(\sigma)\, \mu_0(\sigma, F) + \sum_{n=N(\sigma)}^{\infty} \exp\{-\lambda_n(\varphi(\lambda_n) - 1 - \sigma)\} \leqslant$$

$$\leqslant N(\sigma)\, \mu_0(\sigma, F) + \sum_{n=N(\sigma)}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\lambda_n}{2}(\varphi(\lambda_n) - 1)\right\}. \tag{6}$$

Так как φ — вогнутая функция, то φ' — ограниченная функция и поэтому $\varphi(x + o(1)) - \varphi(x) = o(1)$ $(x \to +\infty)$. Отсюда следует, что

$$\lambda_n(\varphi(\lambda_n) - 1) = (1 + o(1))\, \Phi(k \ln n)\, k \ln n \; (n \to \infty).$$

Поэтому из (6) получаем, что для всех достаточно больших σ выполняется неравенство

$$M_0(\sigma, F) \leqslant N(\sigma)\, \mu_0(\sigma, F) + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{k}{3}\Phi(k \ln n) \ln n\right\} =$$

$$= N(\sigma)\, \mu_0(\sigma, F) + K, \; K \equiv \text{const}.$$

Таким образом,

$$\ln \mu_0(\sigma, F) \leqslant \ln M_0(\sigma, F) \leqslant \ln \mu_0(\sigma, F) + \ln N(\sigma) + o(1), \; \sigma \to +\infty.$$

Так как $\ln M_0(\sigma, F)/\sigma \to +\infty (\sigma \to +\infty)$, то нам осталось показать, что $\ln N(\sigma) = O(\sigma)$ $(\sigma \to +\infty)$. Но по определению $N(\sigma)$ имеем

$\varphi(\lambda_{N(\sigma)-1}) < 1 + 2\sigma$, т. е. $\varphi(\Phi(k \ln(N(\sigma) - 1)) + 0(1)) < 1 + 2\sigma$ $(\sigma \to +\infty)$. Отсюда следует, что $k \ln N(\sigma) \leqslant 2\sigma + O(1)$ $(\sigma \to +\infty)$ и, таким образом, теорема 1 доказана.

Теорема 3. *Для любой функции $\Phi \in \Omega$ существует возрастающая последовательность (λ_n) натуральных чисел такая, что для любой ее подпоследовательности (λ_n^*) и для любой целой функции $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\lambda_n^*}$, удовлетворяющей условию $\ln M(e^\sigma, f) \leqslant \Phi(\sigma)$ для всех $\sigma \in \boldsymbol{R}$, выполняется соотношение*

$$\ln M(r, f) \sim \ln \mu(r, f) \quad (r \to +\infty). \tag{7}$$

Доказательство. Из утверждения теоремы 2 и ее доказательства видим, что для любой функции $\Phi \in \Omega$ существует последовательность $(\lambda_n) = ([\Phi(k \ln n_m)])$ натуральных чисел такая, что если функция (2) удовлетворяет условию $\ln M_0(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma) \times (\sigma \in \boldsymbol{R})$, то выполняется соотношение (3). Сделав в ряде (2) замену $e^s = z$, приходим к справедливости теоремы 3.

Замечание 1. В теоремах 2 и 3 показатели λ_n можно выбирать указанным выше способом не обязательно для всех $n \in \boldsymbol{N}$, а только для всех достаточно больших n, так как конечная сумма членов ряда (2) на выполнимость соотношения (3) не влияет.

Замечание 2. Если целая функция f, представленная степенным рядом, имеет конечный порядок, то в качестве Φ можно взять любую функцию из Ω, совпадающую при $\sigma \geqslant \sigma_0$ с функцией $\exp(\rho\sigma)$, где ρ — положительное число, большее порядка функции f. Тогда при $k = 1/\rho$ имеем $\Phi(k \ln n) = n$ и в качестве (λ_n) выступает последовательность натуральных чисел, т. е. мы приходим к классической теореме Э. Бореля.

Докажем, наконец, теорему 1. Из теоремы 3 следует, что для любой функции $\Phi \in \Omega$ существует последовательность (λ_n) натуральных чисел такая, что

$$\lambda_{n+1}/\lambda_n \geqslant q > 1 \quad (n \geqslant 1), \tag{8}$$

и для любой функции (1) с такими показателями, удовлетворяющей условию $\ln M(e^\sigma, f) \leqslant \Phi(\sigma)$ $(\sigma \in \boldsymbol{R})$, выполняется соотношение (7).

Далее, используя одну теорему из теории тригонометрических рядов (см. [2, с. 346]), нетрудно показать, что если показатели целой функции (1) удовлетворяют условию (8), то существуют положительные постоянные ν_q и μ_q, зависящие только от q, такие, что

$$\operatorname{mes}\left\{\theta : |f(re^{i\theta})| \geqslant \nu_q \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 r^{2\lambda_n}}\right\} \geqslant 2\pi\mu_q.$$

Обозначим множество таких значений θ через Θ. Тогда, если $\theta \in \Theta$, то $|f(re^{i\theta})| \geqslant \nu_q \mu(r, f)$ и, таким образом,

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| \, d\theta \geqslant \frac{1}{2\pi} \int_\Theta \ln^+ (\nu_q \mu(r, f)) \, d\theta \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi} \ln^+ (\nu_q \mu(r, f)) \, 2\pi \mu_q = (1 + o(1)) \, \mu_q \ln \mu(r, f)$$

при $r \to \infty$. В силу соотношения (7) отсюда следует, что

$$\overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\ln M(r, f)}{T(r, f)} \leqslant \frac{1}{\mu_q} \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln M(r, f)}{\ln \mu(r, f)} = \frac{1}{\mu_q}.$$

Список литературы: 1. *Ибрагимов И. И.* Методы интерполяции функций и некоторые их применения.— М.: Наука, 1971.— 518 с. 2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды.— М.: Мир, 1965.— Т. 1. 615 с.

Поступила в редколлегию 17.01.83.