УДК 517.968

В. А. ЩЕРБИНА

ГРАНИЧНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ОДИН ВАРИАНТ МЕТОДА ДИСКРЕТНЫХ ВИХРЕЙ В ЗАДАЧЕ НЕЙМАНА

Пусть $S = \partial D$ — гладкая замкнутая поверхность в R^3, гомеоморфная сфере. Остановимся на некоторых важных для дальнейшего соотношениях, существующих между действующими в пространстве $L^2(S)$ «граничными» операторами простого и двойного слоев и оператором «нормальной производной».

Теорема. *Оператор простого слоя*

$$(K\varphi)(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \frac{\varphi(y)\,dS}{|x-y|}, \quad x \in S$$

имеет обратный с плотной областью определения в $L^2(S)$.

Действительно, как легко видеть, $\| K - K_\varepsilon \| \underset{\varepsilon \downarrow 0}{\to} 0$, где

$$(K_\varepsilon\varphi)(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \frac{\varphi(y)\,dS}{|x-\varepsilon n(x)-y|},$$

$n(x)$ — внешняя нормаль к S в точке x. Поэтому, если $K\varphi = 0$, то гармоническая в D функция

$$(\hat{K}\varphi)(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \frac{\varphi(y)\,dS}{|x-y|}, \quad x \in D$$

такова, что

$$(\hat{K}\varphi)(x-\varepsilon n(x)) \underset{\varepsilon \downarrow 0}{\to} 0, \quad x \in S,$$

в метрике $L^2(S)$. Если ввести теперь $G_\varepsilon(x, y)$ — функцию Грина задачи Дирихле для D_ε, граница которой имеет параметризацию $x_\varepsilon(u) = x(u) - \varepsilon n(x(u))$, где $x(u)$ — параметризация S, то

$$(\hat{K}\varphi)(x) = -\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n(y)} G_\varepsilon(x, y)(K_\varepsilon \varphi)(y)\, dS = 0, \underset{x \in D}{}$$

Аналогичным образом доказывается, что $(\hat{K}\varphi)(x) = 0$ при $x \in CD$. Поэтому для любой $\psi \in L^2(S)$

$$\int_S \bar{\psi}(x)\, dS \int_S \frac{(y - x \pm \varepsilon n(x),\ n(x))}{|x - y \mp \varepsilon n(x)|^3} \varphi(y)\, dS = 0 \qquad (1)$$

при малых $\varepsilon > 0$.

С другой стороны, если $\psi(x)$ — непрерывна, то равномерно по y

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{(y - x \pm \varepsilon n(x),\ n(x))}{|x - y \mp \varepsilon n(x)|^3} \psi(x)\, dS =$$

$$= \pm\psi(y) + \frac{1}{2\pi} \int \frac{(y - x,\ n(x))}{|x - y|^3} \psi(x)\, dS = ((K_1 \pm I)\psi)(y),$$

где K_1 — оператор двойного слоя,

$$(K_1\psi)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{(x - y,\ n(y))}{|x - y|^3} \psi(y)\, dS$$

вполне непрерывен в $L^2(S)$.

Из (1) для непрерывных ψ получаем

$$0 = (\varphi, (K_1 \pm I)\psi) = ((K_1^* \pm I)\varphi, \psi). \qquad (1')$$

Поскольку все собственные функции оператора $K_1(K_1^*)$, отвечающие ненулевым собственным значениям, по крайней мере непрерывны, то из теоремы единственности для внешней задачи Неймана, как известно, вытекает наличие обратного у оператора $K_1^* - I$. Поэтому из (1′) и вытекает утверждение $K\varphi = 0 \leftrightarrow \varphi = 0$.

Поскольку K — самосопряженный, $\overline{KL^2(S)} = L^2(S)$, что и завершает доказательство теоремы.

Введем операторы внутренней и внешней нормальных производных N_{in} и N_{ex} с областью определения $KL^2(S)$ равенствами

$$N_{in}K = I + K_1^*; \quad N_{ex}K = I - K_1^*.$$

В более общих условиях оператор нормальной производной изучался в работе [1]. Оператор $N_{ex}^{-1} = K(I - K_1^*)^{-1}$ вполне непрерывен.

Рассмотрим сужение N'_{ex} с областью определения $KC(S)$.

В этом случае первая формула Грина имеет вид

$$(N'_{ex}u, u) = \int\limits_{CD} (\nabla u, \nabla u)\, d^3x \geqslant 0.$$

Ясно, что и N_{ex} положительно определен. Поскольку обратный к нему вполне непрерывен, то N_{ex} — самосопряженный положительно определенный с дискретным спектром оператор.

Неотрицательный оператор N_{in} связан с N_{ex} соотношением $N_{in} = -N_{ex} + 2K^{-1}$. Поэтому он самосопряжен, а оператор $K > 0$.

Из очевидного равенства $K(I - K_1^*)^{-1} = (I - K_1)^{-1}K$ следует $K_1K = KK_1^*$.

На этом заканчиваются наши рассмотрения свойств граничных операторов.

Будем искать решение внешней задачи Неймана $u(x)$ в $C\overline{D}$ в виде потенциала двойного слоя, поскольку без ограничения общности можно считать, что $\int \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$. Такой потенциал с плотностью $\varphi \in C(S)$ имеет предельное значение извне вида $(K_1 + I)\varphi = KN_{in}\varphi$.

Поэтому краевое условие $\frac{\partial u}{\partial n} = f(x)$, $x \in S$, где n — внутренняя по отношению к S нормаль, приводит для φ к уравнению

$$N_{ex}KN_{in}\varphi = f \tag{2}$$

или к равносильным уравнениям

$$K^{-1}(I - K_1^2)\varphi = f, \tag{3}$$

$$(I - K_1^{*2})K^{-1}\varphi = f. \tag{3'}$$

В силу условия $\int f(x)\, ds = 0$ уравнения (3), (3′) разрешимы, причем $\varphi(x)$ определяется с точностью до константы. Из равенства (3′) в случае $f \in C^{0,\alpha}(S)$, $0 < \alpha < 1$ вытекает, что $\varphi \in C^{0,\alpha'}(S)$ для всех $0 < \alpha' < \alpha$.

Итак, для решения внешней задачи Неймана с $f \in C^{0,\alpha}(S)$ и $\int f(x)\, ds = 0$ мы получим представление

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_S \frac{(x - y,\ n(y))}{|x - y|^3} \varphi(y)\, ds,\ x \in C\overline{D},$$

где $\varphi \in C^{1,\alpha'}(S)$.

Задача о построении поля скоростей потенциального течения несжимаемой жидкости приводит к необходимости табулирования

$$\nabla u(x) = \frac{1}{2\pi} \nabla \int\limits_S \left(n, (y), \nabla_y \frac{1}{|x - y|}\right) \varphi(y)\, ds. \tag{4}$$

для $\forall\, x \in C\overline{D}$.

Нетрудно видеть, что при замене интеграла (4) интегральной суммой с диаметром разбиения λ для того, чтобы вне δ-окрестности поверхности S величина погрешности не превышала ε, нужно брать $\lambda < \delta\varepsilon$.

Ниже показано, как надо преобразовать интеграл (4), чтобы для $\varphi \in C^{0,\alpha}(S)$ равномерно в $C\bar{D}$ погрешность ε при вычислении $\nabla u(x)$ была связана с диаметром λ разбиения S соотношением

$$\varepsilon = 0\left(\lambda^{\alpha} \ln \frac{1}{\lambda}\right).$$

Функцию $\varphi(x)$ продолжим в окрестность S, полагая ее константой на каждой нормали. Ясно, что так продолженная $\varphi(x)$ будет гладкой и $(\nabla \varphi(z), n(x)) = 0$ при всех z, лежащих на нормали, проведенной через $x \in S$. Как легко проверить, для произвольного орта l и любых $x \bar{\in} S$, z из окрестности S справедливо равенство

$$\left(l, \nabla \int\limits_{\tilde{S}} \frac{\partial}{\partial n(y)} \frac{1}{|x-y|} [\varphi(z) + (\nabla \varphi(z), y-z)]\, dS\right) =$$

$$= \int\limits_{\tilde{S}} \left(n(y), \nabla_y \times \left\{[\varphi(z) + (\nabla \varphi(z), y-z)] \left(\nabla \frac{1}{x|x-y|} \times l\right)\right\}\right) ds -$$

$$- \int\limits_{\tilde{S}} \left(\nabla \varphi(z) \times \left(\nabla_x \frac{1}{|x-y|} \times l\right), n(y)\right) ds, \qquad (5)$$

где $\tilde{S} \subset S$ — открытое в S множество с кусочно гладкой границей L.

В свою очередь,

$$- \int\limits_{\tilde{S}} \left(\nabla \varphi(z) \times \left(\nabla_x \frac{1}{|x-y|} \times l\right), n(y)\right) dS =$$

$$= (l, \nabla \varphi(z))\, \Omega_{\tilde{S}}(x) + \int\limits_{\tilde{S}} (l, n(y)) \left(\nabla \varphi(z), \nabla_x \frac{1}{|x-y|}\right) dS, \qquad (6)$$

где $\Omega_{\tilde{S}}(x)$ — телесный угол, под которым видна $\tilde{S}$ из точки x. Наконец,

$$\int\limits_{\tilde{S}} (l, n(y)) \left(\nabla \varphi(z), \nabla_x \frac{1}{|x-y|}\right) dS = \int\limits_{\tilde{S}} (n(y), \nabla_y \times$$

$$\times \left(\frac{\nabla \varphi(z)}{|x-y|} \times l\right)\right) dS + \int\limits_{\tilde{S}} (n(y), \nabla \varphi(z)) \left(l, \nabla_x \frac{1}{|x-y|}\right) dS. \qquad (7)$$

Воспользовавшись формулой Стокса, из равенств (5) — (7) получаем

$$\nabla \int\limits_{\widetilde{S}} \frac{\partial}{\partial n(y)} \frac{1}{|x-y|} \varphi(y)\, dS = \int\limits_{\widetilde{S}} R_z(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} \nabla_x \frac{1}{|x-y|}\, dS + $$
$$+ \int\limits_{\widetilde{S}} (n(y),\ \nabla\varphi(z)) \nabla_x \frac{dS}{|x-y|} + \nabla\varphi(z)\, \Omega_{\widetilde{S}}(x) + \qquad (8)$$
$$+ \int\limits_{L} [\varphi(z) + (\nabla\varphi(z),\ y-z)] \left(\nabla_y \frac{1}{|x-y|} \times dy\right) +$$
$$+ \int\limits_{L} dy \times \frac{\nabla\varphi(z)}{|x-y|}.$$

Здесь $R_z(y) = \varphi(y) - \varphi(z) - (\nabla\varphi(z),\ y-z)$, и все стоящие справа интегралы остаются абсолютно сходящимися для $z = x \in \widetilde{S}$. В этом случае правая часть равенства (8) представляет собой предельное значение градиента потенциала двойного слоя во внутренней точке несущей поверхности $\widetilde{S}$.

Разобьем поверхность S на элементы S_k диаметра $\alpha_k \approx \varepsilon$ ($k = 1, 2, \ldots, N_\varepsilon$) и внутри S_k возьмем некоторое y_k. Тогда, аналогично (8), для $\nabla u(x)$ приходим к представлению

$$2\pi \nabla u(x) = \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \Big\{ -\varphi(y^k)\ \nabla \times \int\limits_{L_k} \frac{dy}{|x-y|} -$$
$$- \nabla \times \int\limits_{L_k} (\nabla\varphi(y_k),\ y-y_k) \frac{dy}{|x-y|} -$$
$$- \oint\limits_{L_k} \frac{\nabla\varphi(y_k) \times dy}{|x-y|} + \nabla \int\limits_{S_k} (\nabla\varphi(y_k),\ n(y)) \frac{dS}{|x-y|} +$$
$$+ \nabla \int\limits_{S_k} R_{y_k}(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} \frac{1}{|x-y|}\, dS + \nabla\varphi(y_k)\, \Omega_{S_k}(x) \Big\}.$$

При сделанных относительно φ предположениях $R_{y_k}(y) \leqslant C|y - y_k|^{1+\alpha}$. Пусть $y_{k'}$ — ближайшая к x точка нашей сетки. Для x вблизи поверхности S $|x-y| \approx |y_{k'} - y_k| \approx N_{kk'}\varepsilon$, если $y \in S_k$. Для гладкой S можно выделить у каждой точки $y_{k'} \in S$ такую конечную окрестность $S(k')$, что число элементов S_k из этой окрестности, лежащих на расстоянии порядка $M\varepsilon$ от y_k, будет равно $O(M)$. Таким образом,

$$\Big| \sum_{S_k \subset S(k')} \nabla \int R_{y_k}(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} \frac{dS}{|x-y|} \Big| < 0(\varepsilon^\alpha) \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} \frac{1}{n^2}.$$

Отсюда немедленно вытекает равномерная по x оценка

$$\left| \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \nabla \int_{S_k} R_{y_k}(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} \frac{dS}{|x-y|} \right| < O(\varepsilon^\alpha).$$

Поскольку $(\nabla \varphi(y_k), y_k - y) = R_{y_k}(y) + \varphi(y_k) - \varphi(y)$, совершенно аналогично предыдущему получаем (поскольку $N_\varepsilon = 0\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$),

$$\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \nabla \times \int_{L_k} (\nabla \varphi(y_k),\ y - y_k) \frac{dy}{|x-y|} = \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \nabla \times$$
$$\times \int_{L_k} [\varphi(y) - \varphi(y_k)] \frac{dy}{|x-y|} + O\left(\varepsilon^\alpha \ln \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

В итоге

$$2\pi \nabla u(x) = \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \left\{ -\nabla \times \int_{L_k} \varphi(y) \frac{dy}{|x-y|} - \right. \tag{9}$$
$$- \int_{L_k} \frac{\nabla \varphi(y_k) \times dy}{|x-y|} + \nabla \varphi(y_k) \Omega_{S_k}(x) +$$
$$\left. + \nabla \int_{S_k} (\nabla \varphi(y_k),\ n(y)) \frac{dS}{|x-y|} \right\} + O\left(\varepsilon^\alpha \ln \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Если S — замкнутая поверхность, то сумма первых интегралов равна, очевидно, нулю. В общем случае

$$2\pi \nabla u(x) = -\nabla \times \int_{\partial S} \varphi(y) \frac{dy}{|x-y|} + \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \{ \nabla \varphi(y_k) \Omega_{S_k}(x) -$$
$$- \int_{L_k} \frac{\nabla \varphi(y_k) \times dy}{|x-y|} + \nabla \int_{S_k} (\nabla \varphi(y_k),\ n(y)) \frac{dS}{|x-y|} \Big\} + \tag{10}$$
$$+ O\left(\varepsilon^\alpha \ln \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Это представление справедливо для каждого $x \bar{\in} \partial S$ и для $x \in S$, например, в случае, когда он совпадает с одним из y_k. Ясно, что это условие всегда можно соблюсти. Нетрудно видеть, что стоящее справа в (10) выражение эквивалентно интегральной сумме, дающей для $\nabla u(x)$ в пределе $\varepsilon \to 0$

$$2\pi \nabla u(x) = -\nabla \times \int_{\partial S} \varphi(y) \frac{dy}{|x-y|} - \int_S n(y) (\nabla \varphi(y),$$
$$\left. \nabla_y \frac{1}{|x-y|} \right) dS.$$

Из (10) немедленно вытекает равенство

$$2\pi \frac{\partial u(y_j)}{\partial n} = \int_{\partial S} \varphi(y) \left(\nabla_y \frac{1}{|y_j - y|} \times n(y_j),\ dy \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \left\{ \int_{L_k} \left(\frac{n(y_j) \times \nabla \varphi(y_k)}{|y_j - y|},\ dy \right) + (n(y_j),\ \nabla \varphi(y_k))\, \Omega_{S_k}(y_j) \right\} +$$

$$+ O\left(\varepsilon^\alpha \ln \frac{1}{\varepsilon} \right). \tag{11}$$

Для перехода к сеточной функции $\varphi(y_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, N_\varepsilon)$ необходимо выразить в (11) $\nabla \varphi(y_k)$ через конечноразностные отношения. Прежде всего отметим, что

$$\int_{L_k} \left(\frac{\vec{a}}{|y_j - y|},\ dy \right) = \int_{S_k} \left(n(y),\ \nabla_y \frac{1}{|x - y|} \times \vec{a} \right) dS, \tag{12}$$

и если $\vec{a} = O(\varepsilon^\alpha)$, то

$$\left| \sum_k \int_{L_k} \left(\frac{\vec{a}_k}{|y_j - y|},\ dy \right) \right| < O(\varepsilon^\alpha) \sum_{n=1}^{O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)} \frac{1}{n} = O\left(\varepsilon^\alpha \ln \frac{1}{\varepsilon} \right).$$

Это неравенство получается из (12) вполне аналогично предыдущему.

Нетрудно показать, что вектор градиента функции $\varphi(y)$, введенной указанным выше способом, выражается через ее производные по направлениям e_1, e_2 следующим образом:

$$\nabla \varphi(y) = \frac{\partial \varphi(y)}{\partial e_1} \frac{e_2 \times n(y)}{|e_1 \times e_2|} + \frac{\partial \varphi(y)}{\partial e_2} \frac{n(y) \times e_1}{|e_1 \times e_2|}.$$

Если y_k', y_k'' — две точки взятой на поверхности сетки, лежащие в 2ε-окрестности точки y_k, то

$$\nabla \varphi(y_k) \cong \frac{[\varphi(y_k') - \varphi(y_k)]\,(y_k'' - y_k) \times n(y_k)}{|(y_k' - y_k) \times (y_k'' - y_k)|} +$$

$$+ \frac{[\varphi(y_k'') - \varphi(y_k)]\, n(y_k) \times (y_k' - y_k)}{|(y_k' - y_k) \times (y_k'' - y_k)|}. \tag{13}$$

Равенства (11) и (13) позволяют в совокупности по сеточной функции $\varphi(y_k)$ восстановить сеточную $\frac{\partial u(y_k)}{\partial n}$ с погрешностью $O\left(\varepsilon^\alpha \ln \frac{1}{\varepsilon} \right)$.

С другой стороны, равенства (11) с учетом (13) могут рассматриваться как система уравнений для приближенного отыскания сеточной функции $\varphi(y_k)$ по заданной $\frac{\partial u(y_j)}{\partial n}$. Если до выхода точки x на поверхность записать равенство

$$2\pi \frac{\partial u(x)}{\partial l} = \sum_k \varphi(y_k) \int_{S_k} (n(y),\ \nabla_y \times (\nabla_x \times l)) \frac{dS}{|x-y|} =$$

$$= \sum_k \varphi(y_k) \int_{L_k} \left(\left(dy \times \nabla_x \frac{1}{|x-y|} \right),\ l \right) + O(\varepsilon),$$

то для поля скоростей мы придем к представлению через сумму вкладов от дискретных вихрей

$$\nabla u(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_k \varphi(y_k) \int dy \times \nabla_x \frac{1}{|x-y|} + O(\varepsilon), \qquad (14)$$

причем $O(\varepsilon)$, вообще говоря, растет, когда x приближается к S.

Это представление тоже может быть использовано для формального получения системы уравнений для $\varphi(y_k)$ после замены $x = y_j$ и отбрасывания $O(\varepsilon)$. Однако соответствующий предельный переход в (14) до сих пор никому обосновать не удалось.

В заключение замечу, что данная работа явилась следствием интересных и полезных для автора обсуждений с С. М. Белоцерковским и А. В. Двораком метода дискретных вихрей [2], за что я и выражаю им свою искреннюю благодарность.

Список литературы: 1. *Вишик М. И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1952, **1**, с. 187—246. 2. *Белоцерковский С. М., Ништ М. И* Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью.— М.: Наука, 1978.— 354 с.

Поступила в редколлегию 10.11.82.