УДК 517.53

Я. И. САВЧУК

К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ЦЕЛЫХ И АНАЛИТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Без пояснений используются основные результаты теории целых и аналитических кривых, а также обозначения из [1] с единственным отступлением: вместо $\overset{0}{m}$ и $\overset{0}{T}$ будем писать m и T.

В настоящей работе при дополнительном предположении $\sum \delta(\vec{a}) \leqslant p-1$ дано решение обратной задачи теории распределения значений целых кривых $\vec{h}: C \to C^p$ $(p \geqslant 2)$ бесконечного порядка, а также аналитических кривых $\vec{h}: D \to C^p$ $(D = \{z \in C : |z| < 1\})$ любого порядка, включая бесконечный и нулевой.

Будем обозначать через S^p подмножество единичной сферы $\{\vec{a} \in C^p : \|\vec{a}\| = 1\}$, состоящее из тех векторов, у которых первая ненулевая компонента является положительным числом.

Известно, что для целых и аналитических кривых одновременно с вектором $\vec{a} \in C^p \setminus \{\vec{0}\}$ и все векторы $\lambda\vec{a}$, $\lambda \in C \setminus \{0\}$ являются дефектными. Так как $C^p \setminus \{\vec{0}\} = \{\lambda\vec{a} : \vec{a} \in S^p,\ \lambda \in C \setminus \{0\}\}$, то можно, не уменьшая общности, рассматривать лишь дефектные векторы из S^p.

Через N_q обозначим множество N при $q = \infty$, множество $\{1, 2, \ldots, q\}$ при $1 \leqslant q < \infty$ и пустое множество при $q = 0$; положим $N_{qp} = N_q \cup \{-p+2, -p+3, \ldots, 0\}$.

Пусть имеем множество чисел $\{\delta_\mu : \mu \in N_q\}$ такое, что:

а) $0 < \delta_\mu \leqslant 1$ для всех $\mu \in N_q$;

б) $\sum\limits_{\mu \in N_q} \delta_\mu \leqslant p - 1$;

$A = \{\vec{a}_\mu : \mu \in N_q\}$ — допустимая система векторов из S^p.

Основными результатами исследований являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Существует целая p-мерная кривая $\vec{h}$ бесконечного порядка такая, что:*

1) $\delta(\vec{a}_\mu, \vec{h}) = \delta_\mu$ *для всех* $\mu \in N_q$;

2) для произвольного $\vec{a} \in S^p \setminus A$ *такого, что* $A \cup \{\vec{a}\}$ *— допустимая система векторов, имеем* $\delta(\vec{a}, \vec{h}) = 0$.

Теорема 2. *Пусть* $\rho \in \overline{R}_+$. *Существует p-мерная аналитическая в* $D = \{z : |z| < 1\}$ *кривая* $\vec{h}$ *порядка* ρ, *для которой имеют место утверждения 1 и 2 теоремы 1.*

При $p = 2$ теорема 1 несколько дополняет известную теорему Фукса и Хеймана [2, гл. IV, § 4.1], а теорема 2 дополняет теорему Гирныка [3] для аналитических в круге функций любого порядка. В связи с теоремой 1 отметим результат работы [4], в которой строится целая кривая с заданными дефектными значениями и величинами дефектов, удовлетворяющих ряду существенных дополнительных ограничений. Относительно существования целой кривой произвольного положительного порядка с наперед заданным множеством дефектных векторов (без учета величин дефектов) см. работу [5].

Для доказательства теорем понадобится следующая

Лемма. *Для данной последовательности чисел* $\{\delta_j : j \in N_{qp}\}$ *такой, что:* $0 \leqslant \delta_j \leqslant 1$ *для всех* $j \in N_{qp}$; $\sum\limits_{j=-p+2}^{q} \delta_j = p - 1$, *существует последовательность неотрицательных чисел* $\{\varkappa_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$, *удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \varkappa_\nu = 1$;

2) для произвольного $\mu \in N_{qp}$ *существует множество* $M_\mu \subset N$ *такое, что* $\sum \{\varkappa_\nu : \nu \in M_\mu\} = \delta_\mu$;

3) если $\varkappa_\nu > 0$, *то* $\operatorname{card} S_\nu = p - 1$, *где* $S_\nu = \{j : \nu \in M_j\}$.

Доказательство. Обозначим для удобства $\delta_j^{(0)} = \delta_j$. Выберем подмножество $S_1 \subset N_{qp}$ такое, что $\operatorname{card} S_1 = p - 1$, $\min \times \times \{\delta_j^{(0)} : j \in S_1\} \geqslant \max \{\delta_j^{(0)} : j \in N_{qp} \setminus S_1\}$. Теперь возьмем

$$\varkappa_1 = \min \{\min \{\delta_j^{(0)} : j \in S_1\},\ \min \{1 - \delta_j^{(0)} : j \in N_{qp} \setminus S_1\}\},$$

$$\delta_j^{(1)} = \begin{cases} \delta_j^{(0)}, & j \in N_{qp} \setminus S_1; \\ \delta_j^{(0)} - \varkappa_1, & j \in S_1. \end{cases}$$

Пусть $\{\delta_j^{(1)} : j \in N_{qp}\}, \ldots, \{\delta_j^{(n-1)} : j \in N_{qp}\}$ уже выбраны. По последовательности $\{\delta_j^{(n-1)} : j \in N_{qp}\}$ выбираем S_n и берем

$$\varkappa_n = \min \{\min \{\delta_j^{(n-1)} : j \in S_n\},\ \min \{1 - \\ - \sum_{k=1}^{n-1} \varkappa_k - \delta_j^{(n-1)} : j \in N_{qp} \setminus S_n\}\},$$

$$\delta_j^{(n)} = \begin{cases} \delta_j^{(n-1)}, & j \in N_{qp} / S_n; \\ \delta_j^{(n-1)} - \varkappa_n, & j \in S_n. \end{cases}$$

Очевидно, что $\sum\limits_{j \in N_{qp}} \delta_j^{(n-1)} - \sum\limits_{j \in N_{qp}} \delta_j^{(n)} = \sum\limits_{j \in S_n} \varkappa_n = (p-1)\varkappa_n$. Отсюда нетрудно видеть, что при любом $n \in N$ выполняется равенство

$$\sum \{\delta_j^{(n-1)} : j \in N_{qp}\} = \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} \varkappa_k\right)(p-1). \tag{1}$$

В силу выбора $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$, и $\delta_j^{(1)}, \delta_j^{(2)}, \ldots$, получим: $\delta_j^{(1)} = \delta_j^{(0)} - \varkappa_1 \leqslant 1 - \varkappa_1$, если $j \in S_1$; $\varkappa_1 \leqslant 1 - \delta_j^{(1)}$, следовательно, $\delta_j^{(1)} \leqslant 1 - \varkappa_1$ при $j \in N_{qp} \setminus S_1$, т. е. $\delta_j^{(1)} \leqslant 1 - \varkappa_1$ при всех $j \in N_{qp}$. Аналогично имеем $\delta_j^{(2)} \leqslant 1 - \varkappa_1 - \varkappa_2$ при $j \in N_{qp}$.

Продолжая такие же рассуждения, получим

$$\delta_j^{(n-1)} \leqslant 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \varkappa_k,\ j \in N_{qp}. \tag{2}$$

Обозначим $\delta_j^* = \lim\limits_{n \to \infty} \delta_j^{(n-1)}$ (предел существует, так как $0 \leqslant \delta_j^{(n)} \leqslant \delta_j^{(n-1)}$).

Нам нужно показать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varkappa_k = 1. \tag{3}$$

Предположим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varkappa_k = \alpha < 1. \tag{4}$$

Тогда на основании (1) и (2) имеем

$$\sum \{\delta_j^* : j \in N_{qp}\} = (1-\alpha)(p-1), \tag{5}$$

откуда получим, что $\operatorname{card}\{j : \delta_j^* > 0\} \geqslant p-1$. Отсюда следует, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\min\{\delta_j^{(n-1)} : j \in S_n\} > \varepsilon$ при всех $n \in N$.

Поскольку $\varkappa_n \to 0$ при $n \to \infty$, то при $n \to \infty$

$$\varkappa_n = \min\{1 - \sum_{k=1}^{n1} \varkappa_k - \delta_j^{(n-1)} : j \in N_{qp} \setminus S_n\} \to 0. \tag{6}$$

Обозначим $\delta^{(n-1)} = \max\{\delta_j^{(n-1)} : j \in N_{qp} \setminus S_n\}$. Очевидно, что

$$\min\{1 - \sum_{k=1}^{n} \varkappa_k - \delta_j^{(n-1)} : j \in N_{qp} \setminus S_n\} = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \varkappa_k - \delta^{(n-1)},$$

откуда на основании (4) и (6) делаем вывод, что $\delta^{(n-1)} \to 1-\alpha$ при $n \to \infty$.

В силу выбора множества S_n имеем $\sum\{\delta_j^{(n-1)} : j \in S_n\} \geqslant (p-1)\,\delta^{(n-1)}$. Отсюда $\sum\limits_{j \in N_{qp}} \delta_j^{(n-1)} \geqslant p\delta^{(n-1)}$. Так как каждая из последовательностей $\{\delta_j^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ невозрастающая, то, переходя в записанном выше неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим $\sum\{\delta_j^* : j \in N_{qp}\} \geqslant p(1-\alpha)$. Это противоречит равенству (5). Следовательно, доказано (3).

Обозначим $M_\mu = \{\nu \in N : \varkappa_\nu = \delta_\mu^{(\nu-1)} - \delta_\mu^{(\nu)} > 0\}$. Нетрудно видеть, что $\sum\{\varkappa_\nu : \nu \in M_\mu\} = \delta_\mu$, так как неравенство $\varkappa_\nu = \delta_\mu^{(\nu-1)} - \delta_\mu^{(\nu)} > 0$ равносильно тому, что $\mu \in S_\nu$ и $\varkappa_\nu > 0$.

Доказательство теоремы 1. Выберем $\delta_{-p+2} = \delta_{-p+3} = \cdots = \delta_0 = 1 - \frac{1}{p-1} \sum\limits_{j=1}^{q} \delta_j$. Очевидно, $\sum\limits_{j \in N_{qp}} \delta_j = p-1$.

Воспользовавшись леммой, найдем $\varkappa_\nu$, M_μ, S_ν, удовлетворяющие условиям *1*, *2*, *3* леммы.

Положим $S'_\nu = S_\nu \cap N$, $A_\nu = \{\vec{a}_j \in A : j \in S'_\nu\}$; $\operatorname{card} S'_\nu = p - n_\nu$; $1 \leqslant n_\nu \leqslant p$. Возьмем линейно независимые векторы $\vec{b}_\nu^{(1)}, \vec{b}_\nu^{(2)}, \ldots$ $\ldots, \vec{b}_\nu^{(n_\nu)}$ $(\vec{b}_\nu^{(s)} = (b_{\nu 1}^{(s)}, b_{\nu 2}^{(s)}, \ldots, b_{\nu p}^{(s)}))$ такие, что

$$\vec{b}_\nu^{(s)} \vec{a}_j = 0; \ s = 1, 2, \ldots, n_\nu; \ j \in S'_\nu, \tag{7}$$

$$\|\vec{b}_\nu^{(s)}\| = 1, \ s = 1, 2, \ldots, n_\nu, \tag{8}$$

и положим $\vec{P}_\nu(z) = \vec{b}_\nu^{(1)} + \vec{b}_\nu^{(2)} z + \cdots + \vec{b}_\nu^{(n_\nu)} z^{n_\nu - 1}$.

Как известно [2, гл. IV, § 4.1], множество N можно разбить на попарно непересекающиеся множества N_ν с плотностями $\varkappa_\nu$ такие, что $N_\nu \cap \{n \in N : n < 2^{\nu-1}\} = \varnothing$.

Пусть $\vec{h}^*(z) = \exp\{-e^z - z\} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \vec{R}_n(z) E_n(z)$, где

$$\vec{R}_n(z) = \begin{cases} \vec{P}_\nu(z), \ |n| \in N_\nu, \\ (1, z, \ldots, z^{p-1}), \ n = 0, \end{cases} \tag{9}$$

$$E_n(z) = E_0(z - 2n\pi i),$$

а $E_0(z)$ — целая функция (см. [3, гл. IV, § 4.1]) с асимптотикой

$$E_0(z) = \begin{cases} \exp\{e^z + z\} + O(z^{-2}), \ z \to \infty, \ z \in F_0, \\ O(z^{-2}), \ z \to \infty, \ z \overline{\in} F_0, \end{cases}$$

$$F_0 = \{z = x + iy : x > 0, \ |y| \leqslant \pi\}.$$

Теперь возьмем $\vec{h}(z) = ((\vec{h}^*(z))_1 + \lambda_0 e^{-e^z - z}, (\vec{h}^*(z))_2, \ldots, (\vec{h}^* \times$ $\times (z))_p$, где $\lambda_0 \in C$ выбираем так, чтобы

$$|(\vec{h}(z))_1| + |(\vec{h}(z))_2| > 0 \text{ при всех } z \in C. \tag{10}$$

Очевидно, для этого достаточно взять $\lambda_0 \overline{\in} \{-(\vec{h}^*(z))_1 \exp\{e^z +$ $+ z\} : \vec{h}(z))_2 = 0\}$.

Покажем, что целая кривая $\vec{h}$ обладает всеми требуемыми свойствами.

В силу (10) компоненты этой целой кривой не имеют общих нулей.

Воспользовавшись леммой 4.2 из [2, гл. IV, § 4.1], получим

$$\|\vec{h}(z) - \vec{R}_n(z)\| = O\{z^{p+1} \exp(-e^z - z)\} \tag{11}$$

при $z = x + iy \to \infty$, где n — целое число, определяемое условием

$$(2n - 1)\pi < y \leqslant (2n + 1)\pi. \tag{12}$$

Тогда в силу (9) и (11) компоненты целой кривой $\vec{h}(z)$ будут линейно независимыми (достаточно рассмотреть поведение этих компонент на действительной оси).

Оценим рост характеристики T кривой $\vec{h}$. Из (11) следует, что

$$\ln\|\vec{h}(z)\| \leqslant \ln^+\|\vec{R}_n(z)\| + $$
$$+ \ln^+|z^{p+1}\exp(-e^z - z)| + O(1),\ z \to \infty, \qquad (13)$$

где n определяется условием (12). На основании (8) и в силу выбора многочленов $\vec{P}_\nu(z)$ для всех $\nu \in N$ выполняется $\|\vec{P}_\nu(z)\| \leqslant \leqslant p(|z|^p + 1)$. Отсюда и из (9) имеем:

$$\|\vec{R}_n(z)\| \leqslant p(|z|^p + 1),\quad n \in Z, \qquad (14)$$

и, таким образом (см. [2, гл. IV, § 4.1, п. 3]), из (13) получим

$$T(r, \vec{h}) \leqslant \{1 + o(1)\}\, e^r\, (2\pi^3 r)^{-\frac{1}{2}},\ r \to \infty. \qquad (15)$$

Теперь покажем, что

$$\delta(\vec{a}_\mu, \vec{h}) \geqslant \delta_\mu. \qquad (16)$$

В равенствах (7) зафиксируем $j = \mu \in N_q$. Очевидно, что (7) будет выполняться при всех $\nu \in M_\mu$, так как $M_\mu = \{n : \mu \in S_n;\ \varkappa_\nu > > 0\} = \{n : \mu \in S'_n;\ \varkappa_n > 0\}$, поскольку $\mu \in N_q$.

Обозначим

$$Q_n(z, \vec{a}) = \vec{R}_n(z)\,\vec{a},\quad \vec{a} \in C^p. \qquad (17)$$

Из (7) и (9) получим:

$$Q_n(z, \vec{a}_\mu) \equiv 0,\ |n| \in \bigcup_{\nu \in M_\mu} N_\nu = K_\mu. \qquad (18)$$

Воспользовавшись леммой 4.2 из [2, гл. IV, § 4.1], получаем

$$f_\mu(z) = \vec{h}(z)\,\vec{a}_\mu = Q_n(z, \vec{a}_\mu) + O\{z^{p+1}e^{-e^z - z}\}$$

при $z = x + iy \to \infty$, где $n \in Z$ определяется условием (12).

Тогда на основании (18) при $|n| \in K_\mu$ имеем

$$f_\mu(z) = O\{z^{p+1}e^{-e^z - z}\},\ z \to \infty. \qquad (19)$$

Из (9) и (11) следует, что если

$$y \in \Gamma_\nu = \bigcup_{n \in N_\nu} [(2n - 1)\pi,\ (2n + 1)\pi],$$

то

$$\|\vec{h}(z)\| = \|\vec{P}_\nu(z) + O\{z^{p+1}\exp(-e^z - z)\}\| \geqslant$$
$$\geqslant \|\vec{P}_\nu(z)\| + O\{z^{p+1}\exp(-e^z - z)\},\ z \to \infty.$$

Выберем $\alpha > 0$ и $\lambda_\nu > 0$, так чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$\|\vec{h}(z)\| \geqslant \frac{1}{2}\|\vec{P}_\nu(z)\| \geqslant \lambda_\nu$$

при $l(z) = |z^{p+1}\exp(-e^z - z)| \leqslant \alpha$ и $|z| = r \geqslant r_0(\nu)$. Обозначим $\Theta_\nu(r) = \{\varphi \in [0,\ 2\pi] : l(re^{i\varphi}) < \alpha,\ r\sin\varphi \in \Gamma_\nu\}$, $r > r_0(\nu)$ и положим: $\varphi_\nu(y) = \cos y$ при $y \in \Gamma_\nu$; $\varphi_\nu(y) = 0$ при $y \overline{\in} \Gamma_\nu$. Тогда при $\varphi \in \Theta_\nu(r)$, $\nu \in M_\mu$ (см. (19)) имеем:

$$\ln\frac{\|\vec{h}(z)\|}{|\vec{h}(z)\,\vec{a}_\mu|} = \ln\frac{\|\vec{h}(z)\|}{|f_\mu(z)|} \geqslant e^x\varphi_\nu(y) - (p+1)\ln|z| -$$
$$-|z| + O(1) \geqslant e^x\varphi_\nu(y) + O(z),\ z \to \infty.$$

Это неравенство имеет место и при $\varphi \overline{\in} \Theta_\nu(r)$, так как в этом случае $e^x\varphi_\nu(y) = O(z)$, $z \to \infty$. Тогда (см. лемму 4.5 из [2, гл, IV, § 4.1]) получим ($\nu \in M_\mu$)

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma'_\nu(r)} \ln\frac{\|\vec{h}(re^{i\varphi})\|}{|\vec{h}(re^{i\varphi})\,\vec{a}_\mu|}\,d\varphi \geqslant \{\varkappa_\nu + o(1)\}\,e^r(2\pi^3 r)^{-\frac{1}{2}},\ r \to \infty,$$

где $\Gamma'_\nu(r) = \{\varphi \in [0,\ 2\pi] : r\sin\varphi \in \Gamma_\nu\}$.

Зафиксировав произвольное $\varepsilon > 0$, найдем $n_0 = n_0(\varepsilon) \in N$ такое, что $\sum\{\varkappa_\nu : \nu \in M_\mu,\ \nu \leqslant n_0\} \geqslant \delta_\mu - \varepsilon$. Получим

$$m(r,\vec{a}_\mu) \geqslant \sum\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma'_\nu(r)} \ln\frac{\|\vec{h}(re^{i\varphi})\|}{|\vec{h}(re^{i\varphi})\,\vec{a}_\mu|}\,d\varphi : \nu \in M_\mu,\right.$$
$$\left.\nu \leqslant n_0\right\} + O(1) \geqslant \{\sum\{\varkappa_\nu : \nu \in M_\mu,\ \nu \leqslant n_0\} +$$
$$+ o(1)\}\,e^r(2\pi^3 r)^{-\frac{1}{2}} \geqslant (\delta_\mu - \varepsilon + o(1))\,e^r(2\pi^3 r)^{-\frac{1}{2}},\ r \to \infty.$$

Отсюда, в силу произвольности ε, имеем:

$$m(r,\vec{a}_\mu) \geqslant (\delta_\mu + o(1))\,e^r(2\pi^3 r)^{-\frac{1}{2}},\ r \to \infty. \tag{20}$$

Сравнивая (20) с (15), получим (16).

Покажем, что

$$\delta(\vec{a}_\mu,\ \vec{h}) \leqslant \delta_\mu. \tag{21}$$

Для произвольного вектора $\vec{a} \in S^p$ рассмотрим множество M тех чисел $\nu \in N$, для которых $Q_\nu(z, \vec{a}) \equiv 0$. Очевидно, в случае $\vec{a} = \vec{a}_\mu$ имеем $M = M_\mu$; в случае, когда вектор $\vec{a}$ удовлетворяет условию *2* из теоремы, $M = \varnothing$.

Теперь разобьем множество $N \setminus M$ на классы $L_1 = L_1(\vec{a})$, $L_2 = L_2(\vec{a})$, ..., такие, что при $n' \in L_j$ и $n'' \in L_j$ выполняется $Q_{n'} \equiv \equiv Q_{n''}$; при $n' \in L_j$, $n'' \in L_s$, $j \neq s$ выполняется $Q_{n'} \not\equiv Q_{n''}$. Обозначим $\gamma_j = \sum \{\varkappa_s : s \in L_j\}$, $f(z) = \vec{h}(z)\vec{a}$. Выберем для фиксированного ν такое $j = j(\nu)$, чтобы $\nu \in L_j$. Тогда, аналогично неравенству (20), получим такие неравенства:

$$m(r, Q_\nu(z, \vec{a}), f) \geqslant \{\gamma_j + o(1)\} e^r (2\pi^3 r)^{-\frac{1}{2}}, \ r \to \infty, \tag{20'}$$

$$m(r, 0, f) \geqslant \{\sum_{s \in M} \varkappa_s + o(1)\} e^r (2\pi^3 r)^{-\frac{1}{2}}, \ r \to \infty.$$

Можно показать (см. упражнение из [2, гл. IV, § 4.1]), что вне множества конечной длины выполняется

$$\sum_{b \in \Theta} m(r, b, f) \leqslant \{1 + o(1)\} T(r, f), \ r \to \infty. \tag{22}$$

Здесь Θ — некоторое конечное множество многочленов.

Обозначим теперь через $L = L(\vec{a})$ множество, которое получим, выбирая из каждого L_j по одному элементу. В силу выбора L_j тогда все многочлены Q_ν, $\nu \in L$ — различные. Поэтому на основании неравенства (22) имеем

$$\begin{aligned} m(r, 0, f) + \sum \{m(r, Q_\nu, f) : \nu \in L; \\ \nu \leqslant N_0\} \leqslant \{1 + o(1)\} T(r, f), \ r \to \infty. \end{aligned} \tag{23}$$

Здесь $N_0 = N_0(\varepsilon)$ для произвольного ε рассматриваем таким, чтобы

$$\sum \{\gamma_\nu : \nu \in L, \ \nu \leqslant N_0\} > \sum_{\nu \in L} \gamma_\nu - \varepsilon.$$

Тогда из (23) следует, что

$$\begin{aligned} \{\sum_{\nu \in L} \gamma_\nu - \varepsilon + o(1)\} e^r (2\pi^3 r)^{-\frac{1}{2}} + m(r, 0, f) \leqslant \\ \leqslant \{1 + o(1)\} T(r, f), \ r \to \infty. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу произвольности ε, имеем

$$\begin{aligned} \{\sum_{\nu \in L} \gamma_\nu + o(1)\} e^r (2\pi^3 r)^{-\frac{1}{2}} + m(r, 0, f) \leqslant \\ \leqslant \{1 + o(1)\} T(r, f), \ r \to \infty. \end{aligned} \tag{24}$$

Так как функция f имеет такой же вид, как и каждая из компонент целой кривой $\vec{h}$, то нетрудно показать, что

$$T(r,\ f)\leqslant\{1+o(1)\}\,e^r(2\pi^3r)^{-\frac{1}{2}},\ r\to\infty. \tag{25}$$

Запишем такое очевидное равенство для $\vec{a}\in S^p$:

$$m(r,\ \vec{a},\ \vec{h})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln\frac{\|\vec{h}(re^{i\varphi})\|}{|\vec{h}(re^{i\varphi})\vec{a}|}\,d\varphi+O(1)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln\|\vec{h}(re^{i\varphi})\|\,d\varphi-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+\frac{1}{|f(re^{i\varphi})|}\,d\varphi+O(1)=T(r,\ \vec{h})-$$

$$-T(r,\ f)+m(r,\ 0,\ f)+O(1),\ r\to\infty. \tag{26}$$

Пусть теперь $\vec{a}=\vec{a}_\mu$. Тогда, как мы замечали, $M=M_\mu$, и поэтому

$$\sum_{\nu\in L}\gamma_\nu=\sum_{\nu\in L}\sum_{k\in L_\nu}\varkappa_k=\sum_{k\bar{\in} M_\mu}\varkappa_k=\sum_{k\in N}\varkappa_k-\sum_{k\in M_\mu}\varkappa_k=1-\delta_\mu.$$

Подставляя это в (24) и учитывая (20) и (25), получим, что

$$T(r,\ f_\mu)=\{1+o(1)\}\,e^r(2\pi^3r)^{-\frac{1}{2}},\ r\to\infty,$$

$$m(r,\ 0,\ f_\mu)=\{\delta_\mu+o(1)\}\,e^r(2\pi^3r)^{-\frac{1}{2}},\ r\to\infty,$$

где $f_\mu=\vec{h}\,\vec{a}_\mu$. Отсюда и из (15), (20), (26) следует, что

$$T(r,\ \vec{h})=\{1+o(1)\}\,e^r(2\pi^3r)^{-\frac{1}{2}},\ r\to\infty, \tag{27}$$

$$m(r,\ \vec{a}_\mu)=\{\delta_\mu+o(1)\}\,e^r(2\pi^3r)^{-\frac{1}{2}},\ r\to\infty.$$

Из этих двух равенств следует первое утверждение теоремы. Чтобы доказать второе утверждение теоремы, достаточно заметить, что при $\vec{a}\in S^p\diagdown A$ имеем $\bigcup\limits_j L_j(\vec{a})=N$, и поэтому

$$\sum_{\nu\in L}\gamma_\nu=\sum_{\nu\in L}\sum_{k\in L_\nu}\varkappa_k=\sum_{k\in N}\varkappa_k=1.$$

Подставляя это в (24) и учитывая (25), получим

$$m(r,\ 0,\ f)=o\{e^r(2\pi^3r)^{-\frac{1}{2}}\},\ r\to\infty;$$

$$T(r, f) = \{1 + o(1)\} e^r (2\pi^3 r)^{-\frac{1}{2}}, \ r \to \infty.$$

Тогда, подставив это в (26) и в силу (27) имеем

$$m(r, \vec{a}, \vec{h}) = o\{e^r (2\pi^3 r)^{-\frac{1}{2}}\}, \ r \to \infty,$$

откуда следует второе утверждение теоремы.

Доказательство теоремы 2. Рассуждения будут проводиться по той же схеме, что и доказательство теоремы 1, но будут опираться на теорему 2 из [3].

Рассмотрим сначала случай $\rho = 2$. Как и в доказательстве теоремы 1, находим соответствующие множества M_μ, S_ν, и числа $\varkappa_\nu$. Дальше рассматриваем

$$S'_\nu = S_\nu \cap N_q, \ A_\nu = \{\vec{a}_j \in A : j \in S'_\nu\};$$
$$\operatorname{card} S'_\nu = p - n_\nu, \ 1 \leqslant n_\nu \leqslant p.$$

Для векторов $\vec{a}_\mu \in A_\nu$ находим линейно независимые векторы $\vec{b}_\nu^{(1)}$, $\vec{b}_\nu^{(2)}, \ldots, \vec{b}_\nu^{(n_\nu)}$, удовлетворяющие условию (7); условие (8) заменим таким условием:

$$\|\vec{b}_\nu^{(s)}\| = \nu^{-2} \exp\{-2^{3\nu+10}\}, \ s = 1, 2, \ldots, n_\nu. \tag{8'}$$

Положим $\alpha_\nu = 2^{-\nu^2}\pi$;

$$g(z) = \exp \sum_{\nu=1}^{\infty} \varkappa_\nu (1 - e^{-i\alpha_\nu} z)^{-3}.$$

Как и в [3], рассматриваем область

$$\Delta_\nu = \left\{z : |\arg(1 - e^{-i\alpha_\nu} z)| < \frac{\pi}{4}, \ r_\nu < |z| < 1\right\},$$

где $r_\nu = \sin\frac{\pi}{4}\left(\sin\frac{\pi + \alpha_\nu}{4}\right)^{-1}$. Дальше, согласно лемме 2 из [3], по $g(z)$ и Δ_ν строим функции $g_\nu(z)$ такие, что $g_\nu(z) = g(z) + g_\nu^+(z)$ при $z \in \Delta_\nu$, где $|g_\nu^+(z)| < c_\nu (1 - |z|)^{-1}$, $c_\nu > 0$.

Как и в теореме 1, через $\vec{P}_\nu(z)$ обозначим такой многочлен

$$\vec{P}_\nu(z) = \vec{b}_\nu^{(1)} + \vec{b}_\nu^{(2)} z + \ldots + \vec{b}_\nu^{(n_\nu)} z^{n_\nu - 1} =$$
$$= (P_{\nu 1}(z), P_{\nu 2}(z), \ldots, P_{\nu p}(z)).$$

Пусть $\beta_k = \frac{4p + k}{4p}$, $k = 1, 2, \ldots, p$. Положим

$$h_k(z) = \begin{cases} \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} P_{\nu k}(z) g_\nu(z) + (z - e^{i\beta_k})^{-2}, \ k = 2, \ldots, p, \\ \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} P_{\nu 1}(z) g_\nu(z) + (z - e^{i\beta_1})^{-2} + \lambda_0, \ k = 1. \end{cases} \tag{28}$$

Здесь, как и в теореме 1, $\lambda_0 \in C$ выбираем таким, чтобы $|h_1(z)| + |h_2(z)| > 0$ при всех $z \in D$. Тогда, очевидно, функции $h_1(z), \ldots, h_p(z)$ не будут иметь общих нулей.

Покажем, что аналитическая кривая $\vec{h}(z) = (h_1(z), h_2(z), \ldots, h_p(z))$ удовлетворяет нужным требованиям.

Нетрудно заметить, что функции $h_1(z), h_2(z), \ldots, h_p(z)$ — линейно независимые. Действительно, при $z \to e^{i\beta_k}$, $k = 1, 2, \ldots, p$ имеем

$$\left\| \sum_{\nu=1}^{\infty} \vec{P}_\nu(z) g_\nu(z) \right\| \leqslant c(1 - |z|)^{-1},$$

где c — некоторое положительное число. Отсюда, в силу определений (28), получим:

$$|h_k(z)| = \{1 + o(1)\}(1 - |z|)^{-2}, \quad z \to e^{i\beta_k},$$
$$|h_s(z)| \leqslant (c + 2)(1 - |z|)^{-1}, \quad z \to e^{i\beta_k}, \quad s \neq k,$$

откуда очевидным образом следует линейная независимость функций $h_1(z), h_2(z), \ldots, h_p(z)$.

Оценим рост характеристики T аналитической кривой $\vec{h}$. В силу выбора векторов $\vec{b}_\nu^{(s)}$ для всех многочленов $\vec{P}_\nu(z)$ выполняется неравенство

$$\|\vec{P}_\nu(z)\| < p\nu^{-2} \exp\{-2^{3\nu+10}\}, \quad z \in D. \tag{29}$$

Это неравенство заодно обеспечивает абсолютную и равномерную сходимость рядов (28). Учитывая (29) и поступая точно так же, как в лемме 4 из [3], получаем

$$\ln \|\vec{h}(z)\| \leqslant \ln^+ |g(z)| - 5 \ln(1 - r) + K,$$

где K — некоторая постоянная, не зависящая от z. Тогда

$$T(r, \vec{h}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \|\vec{h}(re^{i\varphi})\| \, d\varphi - \ln \|\vec{h}(0)\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |g(re^{i\varphi})| \, d\varphi - 5 \ln(1 - r) + O(1).$$

Используя оценку для $m(r, g)$ из доказательства леммы 4 в [3], получаем

$$T(r, \vec{h}) \leqslant K_2 (1 + o(1))(1 - r)^{-2}, \quad r \to 1, \tag{30}$$

где K_2 та же постоянная, что и в лемме 3 из [3].

Покажем теперь, что имеет место следующее неравенство:

$$m(r, \vec{a}_\mu, \vec{h}) \geqslant \delta_\mu K_2 \{1 + o(1)\}(1 - r)^{-2}, \quad r \to 1. \tag{31}$$

Из определения многочленов $\vec{P}_\nu(z)$ видно, что $\vec{P}_\nu(z) \not\equiv \vec{0}$. Поскольку степень этого многочлена не выше p, то при $r = |z| > r_0(\nu)$ выполняется неравенство

$$\|\vec{P}_\nu(z)\| > \lambda_\nu (1 - r)^p, \ \lambda_\nu = \lambda_\nu(r_0) > 0, \ r < 1. \tag{32}$$

Нетрудно видеть (см. лемму 5 из [3]), что на множестве

$$\Omega'_\nu = C_r \cap \left\{z : |\arg(1 - e^{-i\alpha_\nu} z)| \leqslant \frac{\pi}{6}, \ |e^{i\alpha_\nu} - z| < \frac{1}{2}\right\},$$

где $C_r = \{z : |z| = r\}$, при r, достаточно близком к 1, выполняется неравенство

$$|g(z)| \geqslant B'_\nu \exp \operatorname{Re}\{\varkappa_\nu (1 - e^{-i\alpha_\nu} z)^{-3}\}, \tag{33}$$

где $B'_\nu = \{2 \exp |\sum \varkappa_j (1 - \exp(-i(\alpha_\nu - \alpha_j)))^{-3} : j \in N, \ j \neq \nu\}|\}^{-1}$.

Выше было замечено, что $g_\nu(z) = g(z) + g_\nu^+(z)$ при $z \in \Delta_\nu$, где $|g_\nu^+(z)| < c_\nu (1 - |z|)^{-1}$, $c_\nu > 0$. Отсюда получим $(z \in \Delta_\nu)$:

$$\begin{aligned}
\|\vec{h}(z)\| &\geqslant \|\sum_{j=1}^{\infty} \vec{P}_j(z) g_j(z)\| - p(1 - r)^{-2} = \|\vec{P}_\nu(z) g(z) + \\
&+ \vec{P}_\nu(z) g_\nu^+(z) + \sum \{\vec{P}_j(z) g_j(z) : j \in N \setminus \{\nu\}\}\| - p(1 - r)^{-2} \geqslant \\
&\geqslant \|\vec{P}_\nu(z) g(z)\| - \|\vec{P}_\nu(z) g_\nu^+(z)\| - \|\sum \{\vec{P}_j(z) g_j(z) : \\
&: j \in N \setminus \{\nu\}\}\| - p(1 - r)^{-2}.
\end{aligned} \tag{34}$$

На основании леммы 2 из [3], а также неравенства (29) делаем вывод, что $(z \in \Delta_\nu)$

$$\left\|\sum \{\vec{P}_j(z) g_j(z) : j \in N \setminus \{\nu\}\}\right\| \leqslant \frac{D'_\nu}{1 - |z|}, \tag{35}$$
$$\|P_\nu(z) g_\nu^+(z)\| < D''_\nu (1 - |z|)^{-1},$$

где D'_ν и D''_ν — некоторые положительные постоянные. Подставляя это в (34) и учитывая (32) и (33), получаем при r, достаточно близком к 1 $(z \in \Omega'_\nu)$:

$$\begin{aligned}
\|\vec{h}(z)\| &> B'_\nu \lambda_\nu (1 - r)^p \exp \operatorname{Re}\{\varkappa_\nu (1 - e^{-i\alpha_\nu} z)^{-3}\} - \\
&- D''_\nu (1 - r)^{-1} - D'_\nu (1 - r)^{-1} - p(1 - r)^{-2} > \\
&> B_\nu (1 - r)^p \exp \operatorname{Re}\{\varkappa_\nu (1 - z e^{-i\alpha_\nu})^{-3}\} - D_\nu (1 - r)^{-2},
\end{aligned} \tag{36}$$

где $B_\nu = B'_\nu \lambda_\nu$, $D_\nu = D'_\nu + D''_\nu + p$.

Рассмотрим теперь $f_\mu(z) = \vec{h}(z) \vec{a}_\mu = \sum_{\nu=1}^{\infty} Q_{\mu\nu}(z) g_\nu(z) + \varphi_\mu(z)$,

где

$$Q_{\mu\nu}(z) = \sum_{s=1}^{n_\nu} \vec{b}_\nu^{(s)} \vec{a}_\mu z^{s-1}, \ \varphi_\mu(z) = \sum_{k=1}^{p} \bar{a}_{\mu k} (z - e^{i\beta_k})^{-2} + \lambda_0 \bar{a}_{\mu 1}.$$

Поскольку $\|\vec{a}_\mu\| = 1$ при всех $\mu \in N_q$, то неравенство $|\varphi_\mu(z)| < < (2 + |\lambda_0|)(1-r)^{-2}$ выполняется при всех $z \in D$, $\mu \in N_q$.

Заметим, что многочлены $Q_{\mu\nu}$ также удовлетворяют условию (29). На основании (7) делаем вывод, что при всех $\nu \in M_\mu$ выполняется $Q_{\mu\nu}(z) \equiv 0$. **(37)**

Функция $f_\mu(z)$ имеет тот же вид, что и компоненты аналитической кривой $\vec{h}$. Поэтому, рассуждая так же, как и при получении неравенства (35), получим

$$|f_\mu(z)| = |\sum_{j=1}^{\infty} Q_{\mu j}(z)\, g_j(z) + \varphi_\mu(z)| <$$
$$< |\sum \{Q_{\mu j}(z)\, g_j(z) : j \in N,\ j \overline{\in} M_\mu\}| + |\varphi_\mu(z)| <$$
$$< \frac{R_\nu'}{1-r} + \frac{2+|\lambda_0|}{(1-r)^2} < \frac{R_\nu}{(1-r)^2}, \tag{38}$$

если $z \in \Delta_\nu$, $\nu \in M_\mu$.

Обозначим $E_\nu = E_\nu(r) = \{\varphi : re^{i\varphi} \in \Omega_\nu'\}$. Пусть $n_0 \in N$. Учитывая (36) и (38), получаем

$$m(r, \vec{a}_\mu, \vec{h}) \geqslant \sum \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{E_\nu} \ln \frac{\|\vec{h}(re^{i\varphi})\|}{|\vec{h}(re^{i\varphi})\, \vec{a}_\mu|}\, d\varphi : \nu \in M_\mu,\right.$$

$$\left.\nu \leqslant n_0\right\} + O(1) \geqslant \sum \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{E_\nu} \ln^+ \{(B_\nu (1-r)^p \exp \operatorname{Re} \{(1 -\right.$$

$$- re^{i(\varphi-\alpha_\nu)})^{-3}\varkappa_\nu\} - D(1-r)^{-2})/(R_\nu(1-r)^{-2})\}\, d\varphi : \nu \in M_\mu,$$

$$\nu \leqslant n_0\} + O(1) = \sum \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{E_\nu} \ln^+ \left\{\frac{B_\nu}{R_\nu}(1-r)^{p+2} \exp \operatorname{Re}\{\varkappa_\nu (1 -\right.\right.$$

$$- re^{i(\varphi-\alpha_\nu)})^{-3}\} - D\}\, d\varphi : \nu \in M_\mu,\ \nu \leqslant n_0\} + O(1) \geqslant$$

$$\geqslant \sum \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{E_\nu} \operatorname{Re}^+ \frac{\varkappa_\nu}{(1 - re^{i(\varphi-\alpha_\nu)})^3}\, d\varphi : \nu \in M_\mu,\right.$$

$$\left.\nu \leqslant n_0\right\} - (p+2) \ln \frac{1}{1-r} + O(1) = \sum \{\varkappa_\nu : \nu \in M_\mu,$$
$$\nu \leqslant n_0\}(1 + o(1))\, K_2 (1-r)^{-2},\ r \to 1. \tag{39}$$

Выберем теперь в (39) для произвольного $\varepsilon > 0$ такое $n_0 = n_0(\varepsilon)$, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$\sum \{\varkappa_\nu : \nu \in M_\mu,\ \nu \leqslant n_0\} > \delta_\mu - \varepsilon.$$

Тогда из (39) имеем

$$m(r, \vec{a}_\mu, h) \geqslant K_2 \{\delta_\mu - \varepsilon + o(1)\}(1-r)^{-2},\ r \to \infty.$$

Так как ε — произвольное положительное число, то

$$m(r, \vec{a}_\mu, \vec{h}) \geqslant K_2 \{\delta_\mu + o(1)\} (1-r)^{-2}, \quad r \to \infty.$$

Сравнивая это с (31), получим $\delta(\vec{a}_\mu, \vec{h}) \geqslant \delta_\mu$.

Чтобы завершить доказательство первого утверждения теоремы, достаточно показать, что $\delta(\vec{a}_\mu, \vec{h}) \leqslant \delta_\mu$. Это, а также второе утверждение теоремы, показываются точно так же, как доказательство аналогичных утверждений в теореме 1.

При рассмотрении общего случая проделываем точно те же рассуждения, учитывая замечания для общего случая в [3], а также вместо условий (8′) будем требовать выполнение таких: $\|\vec{b}_\nu^{(s)}\| = \nu^{-2} A_\nu^{-1}(\rho)$, где $A_\nu(\rho)$ — положительные числа, обеспечивающие сходимость рядов, аналогичных рядам (28) для случая произвольного конечного порядка ρ.

В случае бесконечного порядка достаточно рассмотреть аналитическую в D p-мерную кривую

$$\vec{h}_1(z) = \vec{h}\left(\frac{1+z}{1-z}\right),$$

где $\vec{h}(z)$ — целая кривая, построенная в теореме 1.

Список литературы: 1. *Гольдберг А. А.* Некоторые вопросы теории распределения значений мероморфных функций.— В кн.: Г. Виттих. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М.: Физматгиз, 1960, с. 263—300. 2. *Хейман У. К.* Мероморфные функции.—М.: Мир, 1966.—287 с. 3. *Гирнык М. А.* К обратной задаче теории распределения значений для функций, аналитических в единичном круге.— Укр. мат. журн., 1977, **29**, № 1, с. 32—39. 4. *Хуссайн М.* О дефектах и величинах отклонений целых кривых.— Теория функций, функц. анализ и их прил., 1974, вып. 20, с. 161—170. 5. *Савчук Я. И.* О множестве дефектных векторов целых кривых.— Укр. мат. журн., 1983, **35**, № 3, с. 385—389.

Поступила в редколлегию 10.05.83.