УДК 517.94+513.88

Ф. С. РОФЕ-БЕКЕТОВ, А. М. ХОЛЬКИН

ЗАВИСИМОСТЬ СПЕКТРА ОПЕРАТОРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ИНТЕРВАЛА

В статье выясняется характер зависимости собственных значений и нижней грани предельного спектра от переменного края конечного или полубесконечного интервала для полуограниченного дифференциального оператора произвольного порядка с операторно-значными из $B(H)$ коэффициентами (H — сепарабельное гильбертово пространство). Результаты анонсированы в работе [1] и содержат обобщения теоремы Куранта и теоремы М. Г. Крейна. Для задачи Штурма—Лиувилля с операторными коэффициентами на конечном интервале этот вопрос исследован в работе [2] иными методами, которые перенести на рассматриваемый случай не удается.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$l\,[y] = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \{(p_k y^{(k)})^{(k)} - \frac{i}{2}\,[(q_k y^{(k)})^{(k-1)} + \qquad (1)$$

$$+ (q_k^* y^{(k-1)})^{(k)}\} + p_0 y = \lambda W(x)\, y, \ -\infty \leqslant a \leqslant x \leqslant b \leqslant \infty$$

с операторными коэффициентами $p_k(x) = p_k^*(x)$, $q_k(x) \in C^k(B(H);\ \overline{(a,\ b)})$, $W(x) \in C(B(H);\ \overline{(a,\ b)})$, $p_n(x) \gg 0$, $W(x) = W^*(x) \gg 0$, $x \in \overline{(a,\ b)}$ (т. е. включая a и b, если они конечны).

Предположим, что минимальный (замкнутый) оператор L, порожденный выражением $l_W\,[y] = W^{-1}(x)\, l\,[y]$ в гильбертовом пространстве вектор-функций $H(a,\ b) := L_2\{H;\ (a, b);\ W(x)\,dx\}$ со скалярным произведением $\langle u,\ v\rangle = \int\limits_a^b (W(x)\, u(x),\ v(x))\,dx$, полуограничен снизу (но не обязательно самосопряжен).

Пусть в точке $a \geqslant -\infty$ задано самосопряженное краевое условие

$$U_a[y] = 0, \tag{2}$$

порождающее полуограниченное расширение L_b оператора L. (Самосопряженность условия (2) означает, что минимальный относительно точки ξ оператор L_ξ, порожденный в $H(a, \xi)$ $a < \xi \leqslant b$ выражением $l_W[y]$ и условием (2), является симметрическим и функции $y \in D(L_\xi^*)$ также удовлетворяют этому условию).

Если $a > -\infty$, то краевое условие имеет вид [3]:

$$U_a[y] = \cos A y\check{\ }(a) - \sin A \cdot y\hat{\ }(a) = 0, \tag{3}$$

где

$$y\hat{\ }(x) = \operatorname{col}\{y, y', \ldots, y^{(n-1)}\} \in H^n := \underbrace{H \oplus H \oplus \ldots \oplus H}_{n},$$

$$y\check{\ }(x) = \operatorname{col}\{y^{[2n-1]}, y^{[2n-2]}, \ldots, y^{[n]}\} \in H^n,$$

$y^{[k]}$ — квазипроизводные операции (1), $A = A^* \in B(H^n)$,

$$-\frac{\pi}{2} I_n \ll A \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot I_n \tag{4}$$

$\left(-\frac{\pi}{2}\right.$ принадлежит резольвентному множеству оператора A, (см. [4]), I_n — единичный оператор в H^n).

Для задачи на бесконечном интервале в абсолютно неопределенном случае описание самосопряженных краевых условий для уравнения произвольного порядка с операторными коэффициентами из $B(H)$ получил один из авторов (А. М. Холькин) в 1981 г.

Обозначим L_ξ^0 оператор, порожденный в $H(a, \xi)$, задачей (1), (2) и условием $y\hat{\ }(\xi) = 0$.

Теорема 1. *Предшествующие существенному спектру* $\sigma_e(L_\xi^0)$ *собственные значения оператора* L_ξ^0

$$\lambda_1(\xi) \leqslant \lambda_2(\xi) \leqslant \ldots < \inf \sigma_e(L_\xi^0)$$

непрерывно и строго монотонно убывают по ξ *(возможно, расщепляясь при этом или сливаясь вместе с сохранением суммарной кратности) и при* $\xi \nearrow b \leqslant \infty$

$$\lambda_j(\xi) \searrow \lambda_j(L_b^F) \, (\langle \inf \sigma_e(L_b^F)), \tag{5}$$

где L_b^F *означает расширение по Фридрихсу оператора* L_b. *(При* $\xi < \infty$, $L_\xi^F = L_\xi^0$).

Сформулированная теорема дает обобщение теоремы Куранта, а также положительно отвечает (в одномерном случае) на поставленный в [5, с. 229] вопрос о строгой монотонности собственных значений при расширении бесконечной области. (Для уравнения второго порядка при $\dim H < \infty$ этот ответ получен одним из авторов (А. М. Холькиным в 1979 г.).

Теорема 2. *Нижняя грань спектра* $\inf \sigma(L_\xi^0)$ *и нижняя грань предельного спектра* $\inf \sigma_e(L_\xi^0)$ при $\xi \searrow a$ *имеют общий предел:*

$$\inf \sigma(L_\xi^0) \nearrow \sup_{t \in (a, b)} \{\inf \sigma_e(L_t^0)\} \leqslant \infty, \tag{6}$$

который при $a > -\infty$ *равен бесконечности.*

Последнее из утверждений теоремы 2 переходит для скалярного вещественного оператора с $a > -\infty$, $y\hat{}(a) = 0$ в одну из теорем М. Г. Крейна (1937 г.).

Теорема 3. *Нижняя грань предельного спектра* $\lambda_e(\xi) := \inf \sigma_e(L_\xi^0)$ *непрерывна по* ξ *и не возрастает, а при* $a > -\infty$ *строго убывает по* ξ.

Доказательство теоремы 1. Из вариационных принципов следует, что собственные значения $\lambda_j(\xi)\,(<\lambda_e(\xi))$ не возрастают по $\xi \in (a, b)$. Докажем их строгую монотонность. Допустив противное, т. е. что на некотором ξ-интервале $\Delta \subset (a, b)$ $\lambda_j(\xi) = \lambda' = \text{const}$, выберем произвольную последовательность $\xi_k \nearrow \xi_0$, $\xi_k, \xi_0 \in \Delta$ и соответствующие собственные вектор-функции $y_k \in H(a, \xi_k)$, $y_k\hat{}(\xi_k) = 0$. Очевидно, $y_k(x) = Y(x, \lambda')h_k$, где $Y(x, \lambda) \in B(H^n, H)$ — фундаментальное самосогласованное решение (см. [1]) задачи (1), (2). Положим

$$z_k(x) = \begin{cases} y_k(x), & x \leqslant \xi_k, \\ 0 &, x \geqslant \xi_k. \end{cases}$$

Совокупность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ линейно независима, в силу выбора носителей для $z_k\,(k = 1, 2, \ldots)$. Функции $z_k(x)$, а с ними и любая их конечная линейная комбинация $z(x) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k z_k(x)$, $m < \infty$ принадлежат области определения $D(F)$ квадратичной формы

$$F(z) = \int_a^{a_1} (l[z], z)\,dx + (z\check{}(a_1), z\hat{}(a_1)) + \sum_{k=0}^{n} \int_{a_1}^{b} (p_k z^{(k)}, z^{(k)})\,dx + {}$$
$$+ \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{n} \int_{a_1}^{b} (q_k z^{(k-1)}, z^{(k)})\,dx, \tag{7}$$

где a_1 — произвольное фиксированное число из интервала (a, ξ_1). (Если $a > -\infty$, то берем $a_1 = a$). С другой стороны,

$$F(z) = \int_a^{a_1} (l[z], z)\,dx + \int_{a_1}^{\xi_1} (l[z], z)\,dx + \sum_{k=1}^{m-1} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} (l[z], z)\,dx + {}$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \alpha_k (y_k\check{}(\xi_k), z_k\hat{}(\xi_k)) = \lambda' \|z\|_{(a, \xi_0)}^2 + {}$$
$$+ \sum_{k, j=1}^{m} \alpha_k \bar{\alpha}_j (y_k\check{}(\xi_k), z_j\hat{}(\xi_k)). \tag{8}$$

Заметим, что $z_j^{\wedge}(\xi_k)=0$ при $j \leqslant k$, а при $j>k$ $z_j^{\wedge}(\xi_k)=y_j^{\wedge}(\xi_k)$. Поскольку решение $Y(x, \lambda)$ самосогласованное, т. е. $Y^{\wedge *}(x, \lambda) Y^{\vee}(x, \lambda) - Y^{\vee *}(x, \lambda) Y^{\wedge}(x, \lambda) \equiv 0$, то $(y_k^{\vee}(x), y_j^{\wedge}(x)) - (y_k^{\wedge}(x), y_j^{\vee}(x)) = 0$. Отсюда при $x=\xi_k$ имеем $(y_k^{\vee}(\xi_k), y_j^{\wedge}(\xi_k)) = 0$, так как $y_k^{\wedge}(\xi_k)=0$. Таким образом, $(y_k^{\vee}(\xi_k), z_j^{\wedge}(\xi_k)) = 0$, $\forall j, k$ и поэтому на бесконечномерном линейном многообразии, натянутом на вектор-функции $z_1(x), \ldots, z_m(x), \ldots$,

$$F(z) = \lambda' \| z \|^2_{(a;\, \xi_0)},$$

вопреки условию, что $\lambda' < \inf \sigma_e(L^0_{\xi_0})$ и полуограниченности оператора $L^0_{\xi_0}$. Строгая монотонность доказана*). Непрерывность $\lambda_j(\xi)$ вытекает из [6, следствие 2], в котором в качестве семейства A^F_ξ следует взять рассматриваемые нами операторы L^0_ξ.

Свойство (5) вытекает из установленной в [6, лемма 2] справедливости теоремы VIII. 3.15 из [7] об устойчивости дискретной при $\lambda < \beta$ части спектра сильного резольвентного предела сходящейся сверху последовательности самосопряженных, равномерно полуограниченных снизу операторов для случая, когда члены последовательности могут быть неплотно заданными, самосопряженными в замыканиях своих областей определения операторами. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Нижняя грань $\inf \sigma(L^0_\xi) > -\infty$ и не возрастает по $\xi \in (a, b)$. Поэтому существует $\lim\limits_{\xi \searrow a} \{\inf \sigma(L^0_\xi)\} = \mu \leqslant \infty$. Очевидно, что $\mu \leqslant \sup\limits_{\xi \in (a,\, b)} \{\inf \sigma_e(L^0_\xi)\}$. Если $\mu < \sup\limits_{\xi \in (a,\, b)} \{\inf \sigma_e(L^0_\xi)\}$, то существует такое $\xi_0 \in (a, b)$, что

$$\mu < \inf \sigma_e(L^0_{\xi_0}). \qquad (9)$$

Но тогда при $\xi \leqslant \xi_0$

$$\inf \sigma(L^0_\xi) \leqslant \mu < \inf \sigma_e(L^0_{\xi_0}) \leqslant \inf \sigma_e(L^0_\xi)$$

и, следовательно, при $\xi \searrow a$ $\inf \sigma(L^0_\xi) = \lambda_1(\xi) \nearrow \mu \leqslant \infty$, где $\lambda_1(\xi) < \inf \sigma_e(L^0_\xi)$ — наименьшее собственное значение (конечной кратности) оператора L^0_ξ. Рассмотрим последовательность $\{\mu - \delta_k\}$, где $\delta_k \searrow 0$ при $k \to \infty$. Для каждого $\mu - \delta_k$ найдется такая точка ξ_k, что $\lambda_1(\xi_k) = \mu - \delta_k$, и такой вектор $h_k \in H^n$, $h \neq 0$, что $Y^{\wedge}(\xi_k, \mu - \delta_k) h_k = 0$. Вектор-функция $y_k(x, \mu - \delta_k) = Y(x, \mu - \delta_k) h_k$ является собственной функцией оператора $L^0_{\xi_k}$. Положим при произвольном $m < \infty$

$$z_k(x) = \begin{cases} y_k(x, \mu - \delta_k), & x \leqslant \xi_k \\ 0, & x \geqslant \xi_k \end{cases}, \quad z(x) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k z_k(x).$$

---

* При $\dim H < \infty$ это свойство можно вывести из доказанного В. И. Храбустовским (1974 г.) утверждения, что на любом ξ-интервале $\det Y^{\wedge}(\xi, \lambda) \neq 0$.

Подобно (8)

$$F(z)=\int\limits_a^{a_1}(l[z],z)\,dx+\int\limits_{a_1}^{\xi_m}(l[z],z)\,dx+\sum_{k=2}^{m}\int\limits_{\xi_k}^{\xi_{k-1}}(l[z],z)\,dx+$$

$$\sum_{k=1}^{m}\alpha_k(y_k^{\vee}(\xi_k,\mu-\delta_k),\ z^{\wedge}(\xi_k))=\mu\|z\|^2_{(a,\xi_0)}-\sum_{k,j=1}^{m}\alpha_k\bar{\alpha}_j\delta_k\langle z_k,z_j\rangle_{(a,\xi_0)}+$$

$$+\sum_{k,j=1,\ j<k}^{m}\alpha_k\bar{\alpha}_j(y_k^{\vee}(\xi_k,\mu-\delta_k),\ y_j^{\wedge}(\xi_k,\mu-\delta_j)). \qquad (10)$$

При $j<k$, с одной стороны, имеем

$$\langle l_W[y_k],\ y_j\rangle_{(a,\xi_k)}-\langle y_k,\ l_W[y_j]\rangle_{(a,\xi_k)}=\langle(\mu-\delta_k)\,y_k,\ y_j\rangle_{(a,\xi_k)}-$$
$$-\langle y_k,\ (\mu-\delta_j)\,y_j\rangle_{(a,\xi_k)}=(\delta_j-\delta_k)\langle y_k,\ y_j\rangle_{(a,\xi_k)}. \qquad (11)$$

С другой стороны,

$$\langle l_W[y_k],\ y_j\rangle_{(a,\xi_k)}-\langle y_k,\ l_W[y_j]\rangle_{(a,\xi_k)}=$$
$$=(y_k^{\wedge}(\xi_k,\mu-\delta_k),\ y_j^{\vee}(\xi_k,\mu-\delta_j))-(y_k^{\vee}(\xi_k,\mu-\delta_k),\ y_j^{\wedge}(\xi_k,\mu-\delta_j))=$$
$$=-(y_k^{\vee}(\xi_k,\mu-\delta_k),\ y_j^{\wedge}(\xi_k,\mu-\delta_j)). \qquad (12)$$

Сравнивая (10) — (12), получаем

$$F(z)=\mu\|z\|^2_{(a,\xi_0)}-\sum_{k,j=1,\ j\geqslant k}^{m}\alpha_k\bar{\alpha}_j\delta_k\langle z_k,\ z_j\rangle-$$
$$-\sum_{k,j=1,\ j<k}^{m}\alpha_k\bar{\alpha}_j\delta_j\langle z_k,\ z_j\rangle=\mu\sum_{k,j=1}^{m}\alpha_k\bar{\alpha}_j\langle z_k,\ z_j\rangle-$$
$$-\sum_{k,j=1}^{m}a_{kj}\alpha_k\bar{\alpha}_j\langle z_k,\ z_j\rangle, \qquad (13)$$

где $a_{kj}=a_{jk}=\delta_l$, $l=\min\{j,\ k\}$.

Для любого $\varepsilon>0$ можно выбрать настолько малые $\delta_1,\ \delta_2,\ldots\delta_m$, что на m-мерном линейном многообразии, натянутом на $z_1(x)$, $z_2(x),\ldots,z_m(x)$, будет

$$F(z)\leqslant(\mu+\varepsilon)\|z\|^2_{(a,\xi_0)}.$$

Так как $\varepsilon>0$ — любое, то имеется не менее m собственных значений $\lambda_j\leqslant\mu\ (j=1,2,\ldots,m)$ оператора $L^0_{\xi_0}$. А так как и m — любое, то это противоречит (9), чем доказано (6). Равенство бесконечности в (6) при $a>-\infty$ устанавливается по аналогии с п. 3[0] леммы 4 из [2], а именно в силу того, что при некотором $C>0$ и $\xi\searrow a$

$$\inf\ \sigma(L^0_\xi)=\inf_{\substack{y\in D(L^0_\xi)\\ y\neq 0}}F(y)\|y\|^{-2}\geqslant C(\xi-a)^{-2n},$$

так как для $y \in D(L_\xi^0)$ при $-\infty < a \leqslant x \leqslant \xi$

$$|y^{(k)}(x)|^2 \leqslant (\xi - a)^{2(n-k)-1} \int_a^\xi |y^{(n)}(x)|^2\,dx, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

и так как в (4) $-\frac{\pi}{2} I_n \ll A \leqslant \frac{\pi}{2} I_n$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Докажем сначала непрерывность слева функции $\lambda_e(\xi)$. Пусть $\lambda' = \inf \sigma_e(L_{\xi_0}^0)$ при некотором $\xi_0 \in (a, b)$. Тогда существует ортонормированная последовательность $y_k \in D(L_{\xi_0}^0)$ такая, что $\| L_{\xi_0}^0 y_k - \lambda' y_k \| \to 0$ при $k \to \infty$. При достаточно малых $\delta > 0$ построим мало отличающуюся от y_k в метрике квадратичной формы оператора последовательность $z_k \in D[L_{\xi_0 - \delta}^0]$. Для этого положим $L_{\xi_0} y_k - \lambda' y_k = f_k$. Заменяя последовательность $\{y_k\}$, если нужно, подходящей подпоследовательностью, для произвольного $\varepsilon' > 0$ можно считать

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| f_k \| < \varepsilon'. \tag{14}$$

Возьмем $\alpha > 0$ настолько малое, чтобы нижняя грань оператора $L_{\xi_0 - \alpha, \xi_0}$ в $H(\xi_0 - \alpha, \xi_0)$, порожденного операцией $l_W[y]$ с условиями

$$y\hat{\ }(\xi_0 - \alpha) = y\hat{\ }(\xi_0) = 0, \tag{15}$$

была выше, чем λ'.

Пусть $Y_\delta(x) \in B(H^n, H)$, $0 \leqslant \delta < \alpha$ — операторное решение уравнения $l_W[y] = \lambda' y$ с начальными данными: $Y\hat{\delta}(\xi_0 - \delta) = 0$, $Y\check{\delta}(\xi_0 - \delta) = I_n$. Оператор $Y\hat{\delta}(x)$ имеет ограниченный обратный в H^n при всех $x \in [\xi_0 - \alpha, \xi_0] \setminus \{\xi_0 - \delta\}$.

Пусть $u_{k,\delta}(x)$ решение задачи:

$$l_W[u] - \lambda' u = f_k, \quad u\hat{\ }(\xi_0 - \alpha) = \hat{y_k}(\xi_0 - \alpha), \quad u\hat{\ }(\xi_0 - \delta) = 0,$$

а $C(x, t)$ — функция Коши этого уравнения. Тогда

$$u_{k,\delta}(x) = \int_{\xi_0 - \delta}^{x} C(x, t) f_k(t)\,dt +$$

$$+ Y_\delta(x) (Y\hat{\delta})^{-1}(\xi_0 - \alpha) \Big[\hat{y_k}(\xi_0 - \alpha) - \int_{\xi_0 - \delta}^{\xi_0 - \alpha} \times \tag{16}$$

$$\times \hat{C_x}(\xi_0 - \alpha, t) f_k(t)\,dt].$$

При $\delta = 0$, $u_{k,0}(x) = y_k(x)$, а в случае $\delta \to 0$ $|y_k(x) - u_{k,\delta}(x)| \to 0$ при всех $x \in (\xi_0 - \alpha, \xi_0 - \delta)$ и, следовательно,

$$\| y_k - u_{k,\delta} \|_{(\xi_0 - \alpha, \xi_0 - \delta)} \to 0. \tag{17}$$

Положим $$z_k(x) = \begin{cases} y_k(x), & a \leqslant x \leqslant \xi_0 - \alpha, \\ u_{k,\delta}(x), & \xi_0 - \alpha \leqslant x \leqslant \xi_0 - \delta, \\ 0, & \xi_0 - \delta \leqslant x \leqslant b, \end{cases} \tag{18}$$

$$z(x) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k z_k(x), \ \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k|^2 = 1, \ m < \infty.$$

При $\delta \to 0$
$$\| z_k - y_k \|_{(a,\ \xi_0)} \to 0. \tag{19}$$

Подобно (8)
$$F(z) = \int_a^{\xi_0 - \alpha} (l[y],\ y)\,dx + \int_{\xi_0-\alpha}^{\xi_0 - \delta} (l[u_\delta],\ u_\delta)\,dx +$$
$$+ (y\check{}\,(\xi_0 - \alpha) - u\check{}_\delta(\xi_0 - \alpha),\ y\hat{}\,(\xi_0 - \alpha)) = \lambda' \int_a^{\xi_0 - \delta} (W(x)z,\ z)\,dx +$$
$$+ \int_a^{\xi_0 - \alpha} (W(x)f,\ y)\,dx + \int_{\xi_0-\alpha}^{\xi_0-\delta} (W(x)f,\ u_\delta)\,dx + \tag{20}$$
$$+ (y\check{}\,(\xi_0 - \alpha) - u\check{}_\delta(\xi_0 - \alpha),\ y\hat{}\,(\xi_0 - \alpha)),$$
где
$$y(x) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k y_k, \ u_\delta(x) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k u_{k,\delta}(x), \ f(x) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k f_k(x).$$

Поскольку $\| y \|_{(a,\ \xi_0)} = 1$, то, в силу (14), (17) и (18),
$$|\langle f,\ y\rangle_{(a,\ \xi_0 - \alpha)}| \leqslant \varepsilon', \ |\langle f,\ u_\delta\rangle_{(\xi_0-\alpha,\ \xi_0-\delta)}| \leqslant \varepsilon'. \tag{21}$$
В силу непрерывной зависимости от рассматриваемых в норме графика решений линейного уравнения и их данных Коши на интервале $(a_1,\ \xi_0)$, где $a < a_1 < \xi_0 - \alpha$, получим, что $|y^{(n)}(t)| < C(\xi_0)$, $t \in (a_1,\ \xi_0)$. Так как $y^{(k)}(\xi_0) = 0$, $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$, то $|y^{(n-k)}(t)| \leqslant C \cdot (\xi_0 - t)^k$. При $\xi_0 - \alpha \leqslant t \leqslant \xi_0$ $|y^{(n-k)}(t)| \leqslant C\alpha^k$ и поэтому при $\alpha < 1$ $|y\hat{}\,(t)| < C_1\alpha$, где $C_1 > 0$ и от α не зависит. Поэтому, так как, в силу (16), $|y\check{}\,(\xi_0 - \alpha) - u\check{}_\delta(\xi_0 - \alpha)| \to 0$, при $\delta \to 0$, то $|(y\check{}\,(\xi_0 - \alpha) - u\check{}_\delta(\xi_0 - \alpha),\ y\hat{}\,(\xi_0 - \alpha)| \leqslant C_1\alpha\,|y\check{}\,(\xi_0 - \alpha) - u\check{}_\delta(\xi_0 - \alpha)| \to 0$ и из (20), (21) имеем
$$F(z) \leqslant \lambda' \| z \|^2_{(a,\ \xi_0 - \delta)} + 2\varepsilon' + \gamma(\delta),$$
где $\gamma(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Докажем, что при $0 < \delta < \alpha$
$$\| z \|_{(a,\ \xi_0 - \delta)} \geqslant C(\xi_0), \tag{22}$$
где $C(\xi_0) > 0$ и не зависит от z и δ. Отсюда будем иметь, с одной стороны, что линейное многообразие M, натянутое на $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, —

бесконечномерно, так как для любой нетривиальной комбинации $\| \sum \alpha_k z_k \|_{(a,\ \xi_0-\delta)} \neq 0$, а с другой стороны, что для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать ε' и δ_1 такие, что при всех $0 < \delta < \delta_1 < \alpha$ и $z(x)$ (18)

$$F(z) \leqslant (\lambda' + \varepsilon) \| z \|^2_{(a,\ \xi_0-\delta)}. \tag{23}$$

Так как неравенство однородно, то оно выполняется на всем линейном многообразии M, потому $\lambda_e(\xi_0 - \delta) \leqslant \lambda' + \varepsilon$ при $0 < \delta < \delta_1$, а это означает непрерывность слева $\lambda_e(\xi)$ в произвольной точке $\xi_0 \in (a,\ b)$.

Для доказательства (22) множество функций $\{y(x)\}$ разобьем на два непересекающихся подмножества

$$M_1 = \left\{ y : \| y \|_{(a,\ a_1)} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \right\},\quad M_2 = \left\{ y : \| y \|_{(a,\ a_1)} > \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

Если $y \in M_2$, то, в силу (18), имеем

$$\| z \|_{(a,\ \xi_0-\delta)} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{24}$$

Пусть $y \in M_1$. Тогда $\| y \|_{(a_1,\ \xi_0)} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$. Поскольку $y(x)$ является решением уравнения $l_W[y] - \lambda y = f$, правая часть которого достаточно мала в $H(a,\ \xi_0)$, то, в силу непрерывной зависимости решений от начальных данных и от правой части,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \| y \|_{(a_1,\ \xi_0)} \leqslant C_1(\xi_0) \{ | y^{\wedge}(a_1) | + | y^{\vee}(a_1) | + \| f \|_{(a_1,\ \xi_0)} \}, \tag{25}$$

где $C_1(\xi_0) > 0$. Поэтому, полагая в (14) $\varepsilon' < (\sqrt{2}/4)\, C_1^{-1}(\xi_0)$, имеем отсюда

$$| y^{\wedge}(a_1) | + | y^{\vee}(a_1) | \geqslant \frac{\sqrt{2}}{4} C_1^{-1}(\xi_0). \tag{26}$$

Обратно, в силу непрерывной зависимости начальных данных от решения, рассматриваемого в норме графика, при достаточно малом ε' в (14) имеем

$$| y^{\wedge}(a_1) | + | y^{\vee}(a_1) | \leqslant C_2(\xi_0 - \delta) \| y \|_{(a_1,\ \xi_0-\delta)}, \tag{27}$$

где $C_2(\xi_0 - \delta) > 0$. Сравнивая (26) и (27), получаем $\| y \|_{(a_1,\ \xi_0-\delta)} \geqslant C_3(\xi_0,\ \delta)$, где $C_3(\xi_0,\ \delta) = (\sqrt{2}/4)\, C_1^{-1}(\xi_0)\, C_2^{-1}(\xi_0 - \delta)$ равномерно по малым $\delta > 0$ ограничено и отграничено от 0, поэтому $\| y \|_{(a,\ \xi_0-\delta)} \geqslant C_3(\xi_0)$ при $0 < \delta < \delta_1$, и в силу (19) и (24) имеем (22) для всех $z(x)$ (18), где $C(\xi_0) = \min \{ \sqrt{2}/4;\ C_3(\xi_0) \}$. Этим завершается доказательство непрерывности слева нижней грани предельного спектра $\lambda_e(\xi)$. Покажем теперь, что $\lim\limits_{\xi \to \xi_0 + 0} \lambda_e(\xi) = \lambda_e(\xi_0)$ и этим докажем, что $\lambda_e(\xi)$ непрерывно зависит от ξ. Поскольку нижняя грань предельного спектра не возрастает по ξ, то $\lambda_e(\xi_0+0):= \lambda_+ \leqslant \lambda_e(\xi_0)$. Предположим, что $\lambda_+ < \lambda_e(\xi_0)$. Тогда, в силу леммы 1 [1], оператор $Y^{\wedge}(\xi_0, \lambda_+)$ — фредгольмов, где $Y(x, \lambda)$ — фундаментальное решение задачи (1), (2), а в силу теоремы IV.5.17 из [7] об устойчивости свойства фредгольмовости операторов оператор $Y^{\wedge}(x, \lambda)$ — фредгольмов в некоторой окрестности точки (ξ_0, λ_+) в (x, λ) — плоскости. С другой стороны, в любой окрестности точки (ξ_0, λ_+) найдется точка (ξ_1, λ_1), $\xi_1 > \xi_0$, $\lambda_1 \leqslant \lambda_+ < \inf \sigma(L_\xi)$, что $\lambda_1 \in \sigma_e(\overset{0}{L}_{\xi_1})$. Поэтому $0 \in \sigma_e(Y^{\wedge}(\xi_1, \lambda_1))$, следовательно, $Y^{\wedge}(\xi_1, \lambda_1)$ не является фредгольмовым. Полученное противоречие означает, что $\lambda_+ = \lambda_e(\xi_0)$, поэтому непрерывность по ξ нижней грани предельного спектра $\lambda_e(\xi)$ доказана.

Докажем при $a > -\infty$ строгую монотонность* $\lambda_e(\xi)$. Пусть $u_k(x, \lambda)$-решение задачи Коши

$$l_W[u] - \lambda u = f_k;\ u^{\wedge}(a, \lambda) = y_k^{\wedge}(a),\ u^{\vee}(a, \lambda) = y_k^{\vee}(a). \tag{28}$$

Тогда
$$u_k(x, \lambda') = y_k(x),\ u_k^{\wedge}(\xi_0, \lambda') = 0. \tag{29}$$

При достаточно малом $\delta > 0$ нижняя грань оператора $\overset{0}{L}_{\xi_0, \xi_0+\delta}$ (15) будет выше, чем λ'. Выберем такое δ и зафиксируем. Тогда при $\lambda \leqslant \lambda'$ существует $v_k(x, \lambda)$ — решение задачи

$$l_W[v] = \lambda v,\ v^{\wedge}(\xi_0, \lambda) = u_k^{\wedge}(\xi_0, \lambda' - \varepsilon),\ v^{\wedge}(\xi_0 + \delta, \lambda) = 0, \tag{30}$$

где $\varepsilon > 0$. Положим

$$z_k(x) = \begin{cases} u_k(x, \lambda' - \varepsilon), & a \leqslant x \leqslant \xi_0, \\ v_k(x, \lambda' - \varepsilon), & \xi_0 \leqslant x < \xi_0 + \delta, \\ 0, & \xi_0 + \delta < x \leqslant b, \end{cases} \tag{31}$$

Аналогично (20) имеем

$$F(z) = \int_a^{\xi_0} (l[u], u)\,dx + \int_{\xi_0}^{\xi_0+\delta} (l[v], v)\,dx +$$
$$+ (u^{\vee}(\xi_0, \lambda' - \varepsilon) - v^{\vee}(\xi_0, \lambda' - \varepsilon), u^{\wedge}(\xi_0, \lambda' - \varepsilon)).$$

Так как $F(z)$-вещественно (как замыкание вещественной на гладких функциях формы), то и $(u^{\vee}(\xi_0, \lambda' - \varepsilon) - v^{\vee}(\xi_0, \lambda' - \varepsilon), u^{\wedge}(\xi_0, \lambda' - \varepsilon))$ — вещественно. В силу (28) и (29)

$$F(z) = (\lambda' - \varepsilon)\|z\|^2_{(a, \xi_0+\delta)} + \langle f, u\rangle_{(a, \xi_0)} +$$
$$+ (u^{\vee}(\xi_0, \lambda' - \varepsilon) - v^{\vee}(\xi_0, \lambda' - \varepsilon), u^{\wedge}(\xi_0, \lambda' - \varepsilon)), \tag{32}$$

---

* При $a = -\infty$ нижняя грань предельного спектра оператора может не зависеть от ξ. Например, это так при $\dim H < \infty$.

поэтому $\langle f, u\rangle_{(a, \xi_0)}$ — тоже вещественно и так как

$$\| u(\cdot, \lambda') \|_{(a, \xi_0)} = \| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k y_k \|_{(a, \xi_0)} = \left(\sum_{k=1}^{m} |\alpha_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1, \tag{33}$$

то с учетом (14) имеем

$$\langle f, u\rangle_{(a, \xi_0)} \leqslant \varepsilon'. \tag{34}$$

Поскольку функция $\varphi(x) = u(x, \lambda') - u(x, \lambda' - \varepsilon)$ является решением задачи Коши $l_W[\varphi] - (\lambda' - \varepsilon)\varphi = \varepsilon u(x, \lambda')$, $\varphi^{\wedge}(a) = \varphi^{\vee}(a) = 0$, то

$$\varphi(x) = \varepsilon \int_a^x C(x, t) u(t, \lambda')\, dt,$$

где $C(x, t)$ — функция Коши этой задачи. Отсюда, поскольку $\| u(\cdot, \lambda') \|_{(a, \xi_0)} = 1$, то $|\varphi^{\wedge}(\xi_0)| \leqslant \alpha\varepsilon$, где $\alpha = \mathrm{const} > 0$, а так как $u^{\wedge}(\xi_0, \lambda') = 0$, в силу (29), то $|v^{\wedge}(\xi_0, \lambda' - \varepsilon)| = |u^{\wedge}(\xi_0, \lambda' - \varepsilon)| = |\varphi^{\wedge}(\xi_0)| \leqslant \alpha\varepsilon$. Отсюда, в силу следующей ниже леммы 1, $|v^{\vee}(\xi_0, \lambda' - \varepsilon)| \leqslant \alpha\beta\varepsilon$, поэтому

$$|(v^{\vee}(\xi_0, \lambda' - \varepsilon), u^{\wedge}(\xi_0, \lambda' - \varepsilon)| \leqslant \alpha^2\beta\varepsilon^2, \tag{35}$$

α, β не зависят от ε, u, v.

Заметим теперь, что $u(x, \lambda)$ удовлетворяет граничному условию (3), в силу (28), где $y_k \in D(L^0_{\xi_0})$. Тогда по лемме 2 из [3] имеем, что $u^{\wedge}(a, \lambda) = \cos A \cdot h$, $u^{\vee}(a, \lambda) = \sin A \cdot h$ при некотором $h \in H^n$. Поскольку отсюда $2|h| \geqslant |u^{\wedge}(a, \lambda)| + |u^{\vee}(a, \lambda)|$, то, подобно (26), имеем $8|h| \geqslant \sqrt{2}\, C_1^{-1}(\xi_0)$, а поэтому $|h| \geqslant C_1 = \mathrm{const} > 0$ при $a < \xi_0 < C < b$. Отсюда, в силу (29) и леммы 2 (см. ниже) при достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеем

$$\mathrm{Re}\,(u^{\vee}(\xi_0, \lambda' - \varepsilon), u^{\wedge}(\xi_0, \lambda' - \varepsilon)) < -C_2\varepsilon,$$

где $C_2 > 0$ и не зависит от ε и u, что вместе с (35) дает $(u^{\vee}(\xi_0, \lambda' - \varepsilon) - v^{\vee}(\xi_0, \lambda' - \varepsilon), u^{\wedge}(\xi_0, \lambda' - \varepsilon)) < 0$. Поэтому из (32) и (34) имеем $F(z) \leqslant (\lambda' - \varepsilon) \| z \|^2_{(a, \xi_0+\delta)} + \varepsilon'$. Повторяя доказательство (22), при условии $\sum |\alpha_k|^2 = 1$ получим

$$\| z(\cdot, \lambda' - \varepsilon) \|_{(a, \xi_0+\delta)} \geqslant C(\xi_0), \tag{36}$$

где $C(\xi_0) > 0$ и не зависит от ε и z. Подбирая достаточно малые $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon' > 0$, чтобы при этом выполнялось неравенство $\varepsilon - \varepsilon' C^{-1}(\xi_0) > 0$, получим

$$F(z) < \lambda' \cdot \| z \|^2_{(a, \xi_0+\delta)}. \tag{37}$$

Неравенство (37) однородно, поэтому оно выполняется на всем линейном многообразии, натянутом на $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ (31), которое, в силу (36) — бесконечномерно. Поэтому для достаточно малых $\delta > 0$ $\lambda_e(\xi_0+\delta) < \lambda_e(\xi_0)$, а в силу произвольности выбора точки $\xi_0 \in \in (a, b)$ и невозрастания $\lambda_e(\xi)$ по ξ отсюда следует строгое убывание $\lambda_e(\xi)$, ибо при $\xi_1 < \xi_2$ можно взять $\xi_1 < \xi_0 < \xi_0 + \delta < \xi_2$, откуда $\lambda_e(\xi_2) \leqslant \lambda_e(\xi_0+\delta) < \lambda_e(\xi_0) \leqslant \lambda_e(\xi_1)$, что и требовалось.

Лемма 1. *При достаточно малом $\delta > 0$ (таком, чтобы нижняя грань оператора $L^0_{\xi_0,\, \xi_0+\delta}$ (15) была выше рассматриваемого $\lambda' \in R$) найдется такое $\beta > 0$, что для решения задачи*

$$l_W[y] = \lambda y,\ y\hat{}\,(\xi) = g,\ y\hat{}\,(\xi+\delta) = 0,\ \forall g \in H^n \tag{38}$$

при $\lambda \leqslant \lambda'$ справедлива оценка

$$|y\check{}\,(\xi, \lambda)| \leqslant \beta \cdot |y\hat{}\,(\xi, \lambda)| \tag{39}$$

(β *не зависит от* g).

Доказательство. Каждому $g \in H^n$ отвечает единственное решение y_g задачи (38). Определим оператор $T: H^n \to H$ по формуле $Tg = y_g\check{}\,(\xi)$. Оператор T определен во всем H^n. Докажем, что он замкнут, а потому и ограничен по теореме о замкнутом графике. Пусть $g_k \to 0$, $Tg_k \to f$. Покажем, что $f = 0$. Пусть $y_k(x)$ — решение задачи (38) при $g = g_k$, $z(x) = y_f(x)$ — то же при $g = f$. Тогда при $k \to \infty$

$$0 = \langle l[y_k],\ z\rangle - \langle y_k,\ l[z]\rangle = \{(y_k\hat{}\,(x),\ z\check{}\,(x)) -$$
$$-(y_k\check{}\,(x),\ z\hat{}\,(x))\}\big|_{\xi}^{\xi+\delta} = (Tg_k,\ f) - (g_k,\ z\check{}\,(\xi)) \to (f, f).$$

Итак, $f = 0$, оператор T — замкнут и лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $u(x, \lambda)$ $(\mathrm{Im}\,\lambda = 0)$ решение неоднородного уравнения*

$$l_W[u] = \lambda u + f \tag{40}$$

с начальными данными: $u\hat{}\,(a, \lambda) = \cos A \cdot h$, $u\check{}\,(a, \lambda) = \sin A \cdot h$, $h \in H^n$, $-\frac{\pi}{2} I_n < A \leqslant \frac{\pi}{2} I_n$. *Тогда, если при некотором* λ' $u\hat{}\,(\xi, \lambda') = 0$, *то при всех* $\|f\| \leqslant \varepsilon$, $|\lambda - \lambda'| < \varepsilon$, *где* $\varepsilon > 0$ — *достаточное малое* (фиксированное), имеем

$$\mathrm{Re}\,\frac{\partial}{\partial\lambda}(u\check{},\ u\hat{})\,|_{x=\xi} \geqslant \gamma |h|^2;\ \left|\mathrm{Im}\,\frac{\partial}{\partial\lambda}(u\check{},\ u\hat{})\right|_{x=\xi} \leqslant \varepsilon_1 |h|^2, \tag{41}$$

где $\gamma > 0$ не зависит от h и от $f(x)$, $\varepsilon_1 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Положим сначала $f = 0$. Пусть $Y(x, \lambda) \in B(H^n, H)$ — операторное решение уравнения (1) при начальных данных

$$Y\hat{}\,(a, \lambda) = \cos A,\ Y\check{}\,(a, \lambda) = \sin A. \tag{42}$$

Как известно, при вещественном λ уравнение (1) сводится к симметричной системе вида

$$J\frac{dz}{dx}=(\lambda A(x)+B(x))z, \tag{43}$$

где $z(x, \lambda)=y\hat{}(x, \lambda)\oplus y\check{}(x, \lambda)\in H^{2n}$,

$$J=\begin{pmatrix}0 & -I_n\\ I_n & 0\end{pmatrix},\quad A(x)=\begin{pmatrix}A_{11} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad B(x)=B^*(x)=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}$$

операторы в H^{2n}, причем

$$A_{11}(x)=W(x)\oplus\underbrace{0\oplus\cdots\oplus 0}_{n-1},\ B_{jk}:H^n\to H^n,\ j,\ k=1,\ 2. \tag{44}$$

Дифференцируя систему (43), получаем

$$\frac{\partial^2 Y\hat{}}{\partial x\,\partial\lambda}=B_{21}\frac{\partial Y\hat{}}{\partial\lambda}+B_{22}\frac{\partial Y\check{}}{\partial\lambda},$$

$$\frac{\partial^2 Y\check{}}{\partial x\,\partial\lambda}=-A_{11}Y\hat{}-(\lambda A_{11}+B_{11})\frac{\partial Y\hat{}}{\partial\lambda}-B_{12}\frac{\partial Y\check{}}{\partial\lambda}.$$

Отсюда при вещественном λ получаем (см. [8], с. 352)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Y\check{}^*\frac{\partial Y\hat{}}{\partial\lambda}-Y\hat{}^*\frac{\partial Y\check{}}{\partial\lambda}\right)=Y\hat{}^*A_{11}Y\hat{}. \tag{45}$$

Интегрируя (45) на интервале (a, x) и используя, что $Y\hat{}(a, \lambda)$, $Y\check{}(a, \lambda)$ не зависят от λ, получим

$$Y\check{}^*(x, \lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}Y\hat{}(x, \lambda)-Y\hat{}^*(x, \lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}Y\check{}(x, \lambda)=$$

$$=\int_a^x Y\hat{}^*(t, \lambda)A_{11}(t)Y\hat{}(t, \lambda)\,dt.$$

Если при некоторых $\lambda'\in R$ и $h\in H^n$ $Y\hat{}(\xi, \lambda')h=0$, то

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(Y\check{}^*Y\hat{}h,\ h)\Big|_{\substack{x=\xi\\ \lambda=\lambda'}}=\left(\left(Y\check{}^*\frac{\partial}{\partial\lambda}Y\hat{}-Y\hat{}^*\frac{\partial}{\partial\lambda}Y\check{}\right)h,\ h\right)\Big|_{\substack{x=\xi\\ \lambda=\lambda'}}=$$

$$=\left(\int_a^\xi Y\hat{}^*(t, \lambda')A_{11}(t)Y\hat{}(t, \lambda')\,dth,\ h\right).$$

Покажем, что оператор

$$K_\xi(\lambda)=\int_a^\xi Y\hat{}^*(t, \lambda)A_{11}(t)Y\hat{}(t, \lambda)\,dt\gg 0 \tag{46}$$

при любых фиксированных λ, $\operatorname{Im}\lambda=0$ и $\xi\in(a, b)$. Отсюда будет следовать, что для решения $u(x, \lambda')=Y(x, \lambda')h$ однородного уравнения (1) при $\lambda=\lambda'$ имеет место неравенство

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(u\check{},\ u\hat{})\Big|_{\substack{x=\xi\\ \lambda=\lambda'}}\geqslant\gamma|h|^2,$$

где $\gamma > 0$ и не зависит от h. По непрерывности неравенство сохраняется и для близких значений λ, а также для решений неоднородного уравнения (40) при малой $\|f\|$.

Допустим обратное, что оператор $K_\xi(\lambda)$ при некоторых $\lambda = \lambda'$, $\xi = \xi_0$ не имеет ограниченного обратного. Если $K_{\xi_0}(\lambda') h = 0$, то, в силу непрерывности подынтегральной функции, получим, что $A_{11}(t) Y\hat{}(t, \lambda') h = 0$, $\forall t \in [a, \xi_0]$. Отсюда, в силу (44), $Y(t, \lambda') h = 0$, $\forall t \in [a, \xi_0]$ и поэтому $h = 0$. Если же $K_{\xi_0}(\lambda') h_m \to 0$, $m \to \infty$ то $Y(t, \lambda') h_m \to 0$, $\forall t \in [a, \xi_0]$. Поэтому $\| y_m \|_{(a, \xi_0)} \to 0$, где $y_m(x) = Y(x, \lambda) h_m$ — решение уравнения (1), и, в силу непрерывной зависимости начальных данных от решения, рассматриваемого в норме графика, получим, что $|\hat{y}_m(a, \lambda)| + |\check{y}_m(a, \lambda)| \to 0$. Поскольку из (42) $\hat{y}_m(a) = \cos A \cdot h_m$, $\check{y}_m(a) = \sin A \cdot \ _m$, то $h_m \to 0$ при $m \to \infty$, и (46) доказано. Лемма 2, а с нею и теорема 3, доказаны.

Список литературы: 1. *Рофе-Бекетов Ф. С., Холькин А. М.* Связь спектральных и осцилляционных свойств дифференциальных систем произвольного порядка. — Докл. АН СССР, 1981, **261**, № 3, с. 551—555. 2. *Рофе-Бекетов Ф. С., Холькин А. М.* О связи между спектральными и осцилляционными свойствами матричной задачи Штурма — Лиувилля. — Мат. сб., 1977, **102**, № 3, с. 410—424. 3. *Рофе-Бекетов Ф. С.* О самосопряженных расширениях дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций. — Теория функций, функц. анализ и их прил., 1969, вып. 8, с. 3—24. 4. *Горбачук М. Л., Михайлец В. А.* Полуограниченные самосопряженные расширения симметрических операторов. — Докл. АН СССР, 1976, **226**, № 4, с. 765—767. 5. *Глазман И. М.* Прямые методы качественного спектрального анализа. — М.: Физматгиз, 1963. — 340 с. 6. *Рофе-Бекетов Ф. С.* Возмущения и расширения по Фридрихсу полуограниченных операторов на переменных областях. — Докл. АН СССР, 1980, **225**, № 5, с. 1054—1058. 7. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972. — 740 с. 8. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. — М.: Мир. 1968.— 750 с.

Поступила в редколлегию 04.10.83