УДК 517.982

А. Н. ПЛИЧКО, В. В. ШЕВЧИК

О ВОЗМУЩЕНИЯХ БАЗИСА В ПАРЕ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Говорят, что банахово пространство X_1 плотно вложено в банахово пространство X_0 (обозначается $X_1 \subsetneq X_0$), если $X_1 \subset X_0$ как линейное подпространство плотно там по норме $\| \|_0$, $X_1 \neq X_0$ и существует константа c такая, что $\|x\|_0 \leqslant c\|x\|_1$ для любого $x \in X_1$. Если пространство X_1 рефлексивно, то из $X_1 \subsetneq X_0$ следует, что для сопряженных пространств $X_0^* \subsetneq X_1^*$, причем линейное подпространство $X_0^* \subset X_1^*$ имеет бесконечный дефект. Для гильбертова пространства X обозначим через J каноническое отображение X в $X^*: (Jx)(y) = \langle x, y \rangle$. Оно является изометрией X на X^*.

Теорема. *Пусть $X_1 \subset X_0$ — пара плотно вложенных пространств, причем X_1 гильбертово, а X_0 имеет базис $\{x_n\}_1^\infty$. Тогда существует ортогональная последовательность $\{y_n\}_1^\infty \in X_1$, являющаяся базисом в X_0 и такая, что ее замкнутая по норме $\|\|_1$ линейная оболочка имеет в X_1 бесконечный дефект.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon_n = 1/(2^n \| x_n \|_0 \| f_n \|_0)$, где $f_n \in X_0^*$ — функционалы биортогональные к x_n, и $J : X_1 \to X_1^*$ — каноническое отображение. Построим такие последовательности $y_n \in X_1$ и $g_n, h_n \in X_1^*$, что для всякого n:

$$1)\ h_i(y_j) = 0,\ i,\ j = 1, n, \quad h_n \notin \operatorname{lin}(X_0^*, (g_i, h_i)_1^{n-1});$$

$$2)\ g_i(y_j) = 0 \text{ при } i \neq j,\ i,\ j = 1, n,\ g_n = J(y_n),\ g_n \notin X_0^* + H_n;$$

$$3)\ \| x_n - y_n \| < \varepsilon_n,$$

где $H_n = \operatorname{lin}((h_i, g_i)_1^{n-1},\ h_n)$, lin — линейная оболочка. Построение произведем индуктивно. Выберем какой-нибудь функционал $h_1 \in X_1^* \setminus X_0^*$. Тогда аннулятор $h_1^\perp \subset X_1$ плотен там по норме $\|\|_0$. Поэтому существует элемент $y_1 \in h_1^\perp$, $y_1 \notin J^{-1}(\operatorname{lin}(X_0^*, h_1))$, для которого $\| x_1 - y_1 \|_0 < \varepsilon_1$. Положим $g_1 = Jy_1$. Справедливость условий *1 — 3* для элементов y_1, h_1, g_1 проверяется просто.

Пусть для $n - 1$ наборы построены. Выберем какой-нибудь функционал $h_n \in ((y_i)_1^{n-1})^\perp \subset X_1^*$, $h_n \notin \operatorname{lin}(X_0^*, (g_i, h_i)_1^{n-1})$. Так как X_0^* имеет в X_1^* бесконечный дефект, то это можно сделать. Поскольку $H_n \cap X_0^* = 0$, то аннулятор $H_n^\perp \subset X_1$ плотен там по норме $\|\|_0$. Поэтому существует элемент $y_n \in H_n^\perp$, $y_n \notin J^{-1}(X_0^* + H_n))$, для которого $\| x_n - y_n \| < \varepsilon_n$. Положим $g_n = Jy_n$. В проверке нуждается лишь первое условие пункта *2*. Поскольку $y_n \in H_n^\perp$, то $g_i(y_n) = 0$ и $g_n(y_i) = \langle y_n, y_i \rangle = g_i(y_n) = 0$ при $i < n$. Условие *2* проверено.

Из известной теоремы об устойчивости базиса [1, с. 70] и условия *3* следует, что $\{y_n\}_1^\infty$ базис в пространстве X_0. Из первой части свойства *2* вытекает, что последовательность y_n ортогональна в гильбертовом пространстве X_1. Согласно первой части условия *1* $(y_n)_1^\infty \subset ((h_n)_1^\infty)^\perp$, а согласно второй — подпространство lin $(h_n)_1^\infty$ бесконечномерно, так что аннулятор $(h_n)_1^\infty$ имеет бесконечный дефект.

Следствие [2]. *Существует ортонормированная система, являющаяся базисом в $L_1[0,1]$, но не в $L_2[0,1]$.*

В работе [3] доказано более точное утверждение, чем следствие: для любого промежутка $I \subset [1, 2]$ существует ортонормированная система, которая образует базис в $L_p[0,1]$ при всех $p \in I$ и не является базисом в $L_q[0,1]$ при всех $q \in [1, \infty] \setminus I \times (L_\infty[0,1] \overset{\text{def}}{=} \overset{\text{def}}{=} C[0,1])$. По-видимому, этому утверждению тоже можно придать абстрактную формулировку, подобную теореме, в которой вместо пар банаховых пространств будут фигурировать интерполяционные семейства. Базис в теореме можно, конечно, заменять на другие биортогональные системы, устойчивые при малых возмущениях, например на безусловный базис или на базис Маркушевича.

Список литературы: 1. *Функциональный* анализ /Под ред. С. Г. Крейна. — М.: Наука, 1972. — 544 с. 2. *Слепченко А. Н.* Об ортогональных базисах в L. — Мат. заметки, 1969, **6**, № 6, с. 749 — 758. 3. *Рязанов Б. В., Слепченко А. Н.* Ортогональные базисы в L^p. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1970, **35**, № 5, с. 1159 — 1172.

Поступила в редколлегию 06.05.83.