УДК 517.55

Д. Е. ПАПУШ

О ПРОЕКЦИЯХ АНАЛИТИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ НА ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА

В 1982 г. Дахменом и Мишелли [1] была доказана следующая

Теорема А. *Для того чтобы множество нулей целой функции* $f(z)$, $z \in C^n$ *состояло из объединения гиперплоскостей вида* $H_{a,t} = \{z \in C^n\colon (z, a) = t\}$, *где* $a \in R^n$, $t \in R$, *необходимо и достаточно, чтобы при любых* x, $y \in R^n$ *функция* $f(x + \zeta y)$ *комплексного переменного* ζ *имела либо только вещественные корни, либо была бы тождественным нулем.*

Заметим что для функций, удовлетворяющих условиям, фигурирующим в теореме А, из условия $f(z^0) = 0$ следует, что $f(Re\, z^0) = 0$. Поэтому по теореме единственности ортогональные проекции их нулевых множеств на R^n имеют меру нуль.

В настоящей работе доказывается

Теорема 1. *Пусть* A — *неприводимое аналитическое множество в* C^n *коразмерности* m, L — *вещественное подпространство в* C^n *размерности* $2k + l$, *где* k — *комплексная размерность максимального комплексного подпространства* $M \subset L$. *Пусть далее* ${}^cL$ — *минимальное комплексное подпространство, содержащее* L, $M^\perp$ *и* $M_L^\perp$ — *ортогональные дополнения к подпространству* M *в* C^n *и* L *соответственно. Тогда для любого натурального* $\alpha < \alpha'$, *где* $\alpha' = k + l - m + 1 + (k - m)^+$, *мера Хаусдорфа размерности* α *ортогональной проекции* A *на* L *положительна. При этом, если мера Хаусдорфа размерности* α' *такой проекции равна нулю, то при* $k > m$ *множество* A *представимо в виде* $A = \tilde{A} \times M^\perp$, *где* A — *неприводимое аналитическое множество в* M, *а при* $k \leqslant m$ *множество* A *представимо в виде* $A = \{\zeta\} \times \breve{A} \times ({}^cL)^\perp$, *где* $\zeta \in M$, $\breve{A}$—*гиперплоскость коразмерности* $(m - k)$ в $M_{^cL}^\perp$.

Из этой теоремы, в частности, вытекает

Теорема 2. *Если ортогональная проекция множества нулей целой функции на* R^n *имеет меру нуль, то такое множество есть объединение гиперплоскостей вида* $H_{a,t} = \{z \in C^n : (z, a) = t\}$, $a \in R^n$, $t \in C$.

Отсюда, как следствие, легко выводится теорема А.

В дальнейшем используются следующие обозначения: $(z_1 z_2, \ldots z_n) = (x_1, \ldots, x_n) + i(y_1, \ldots, y_n)$ — точки в $C^n = R^{2n}$; $C^k_{z_1, z_2, \ldots, z_k}$ и $R^l_{x_1, \ldots, x_l}$ — подпространства в C^n векторов вида $(z_1, \ldots, z_k, 0, \ldots, 0)$ и $(x_1, \ldots, x_l, 0, \ldots, 0)$ соответственно; $pr_l\ A$ — ортогональная проекция (аналитического) множества A на подпространство L; $\mathrm{mes}_\alpha K$, $\alpha > 0$ — мера Хаусдорфа размерности α множества $K \subset C^n$.

Выбрав подходящий базис в C^n, можно считать, что заданное подпространство $L \subset C^n$ имеет вид

$$L = C^k_{z_1, \ldots, z_k} \times R^l_{x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}}.$$

Поэтому теорема 1 вытекает из следующего утверждения.

Теорема 3. *Пусть* $L = C^k \times R^l \subset C^n$, $A \subset C^n$ — *неприводимое аналитическое множество коразмерности* m. *Тогда наименьшее* α, *при котором величина* $\mathrm{mes}_\alpha(\mathrm{pr}_L A)$ *может равняться нулю, равно* $\alpha' = k + l - m + 1 + (k - m)^+$. *Если при этом* $\mathrm{mes}_{\alpha'}(\mathrm{pr}_L A) = 0$, *то при* $k > m$ *множество* A *имеет вид* $A = \tilde{A} \times C^{n-k}_{z_{k+1}, \ldots, z_n}$, *где* $\tilde{A}$ — *неприводимое аналитическое множество в* $C^k_{z_1, \ldots, z_k}$, *а при* $k \leqslant m$ *множество* A *имеет вид*

$$A = \{z \in C^n : z_1 = c_1, \ldots, z_k = c_k, \sum_{s=k+1}^{k+l} a_{k+1,\, s} z_s = c_{k+1}, \ldots, \sum_{s=k+1}^{k+l} a_{m,\, s} z_s = c_m\},$$

где $a_{j,s} \in R$, $k + 1 \leqslant j \leqslant m$, $c_j \in C$, $1 \leqslant j \leqslant m$.

Заметим, что теорема 2 также следует из теоремы 3.

Нетрудно видеть, что теорему 3 достаточно доказать локально, в окрестности некоторой точки из множества A^* регулярных точек множества A. Для такой точки a через $I(A_a)$ обозначим идеал, присоединенный к множеству A в точке a. (см. [2, гл. 2]).

Переменную z_j будем называть переменной несущественной зависимости (п.н.з.) для множества A (в точке a), если для любой функции φ, росток которой принадлежит идеалу $I(A_a)$ в некоторой окрестности точки a, выполнено равенство

$$\left.\frac{\varphi\psi}{\varphi z_j}\right|_A \equiv 0.$$

Доказательству теоремы предпошлем ряд лемм.

Лемма 1. *Пусть g — голоморфная функция в (поликруговой) окрестности ω_a точки $a \in A^*$. Тогда, если z_j — п.н.з. для A в точке a и росток функции g принадлежит идеалу $I(A_a)$, то каждый коэффициент $\bar{c}_p('z)$ разложения*

$$g(z) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p('z)(z_j - a_j)^p, \qquad (1)$$

где $z \in \omega_a$, $'z = (z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_n)$, порождает росток из идеала $I(A_a)$.

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $j = n$, $a = 0$. По условию леммы росток функции $\partial\varphi/\partial z_n$ принадлежит идеалу $I(A_0)$ для любой функции φ, представляющей росток из этого идеала, поэтому ростки функций $\partial g/\partial z_n$, $\partial^2 g/\partial z_n^2, \ldots$ лежат в идеале. Пусть $'z = (z_1, \ldots, z_{n-1})$, точка $z = ('z, z_n)$ лежит в окрестности $\tilde{\omega}_0 = \frac{1}{3}\omega_0$. Переразлагая функцию $g('z, z_n)$ в ряд по z_n в точке z, получаем

$$c_1('z) = g('z, 0) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial^j q}{\partial z_n^j}('z, z_n)\frac{(-z_n)^j}{j!}. \qquad (2)$$

Ряд (2) сходится равномерно в ω_0, а так как все его члены есть представители ростков из идеала $I(A_0)$, то и сумма ряда есть представитель ростка из этого идеала. Аналогично получаем, что функции $c_j('z)$ есть представители ростков из идеала $I(A_0)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если z_j — п.н.з. для множества A в точке $a \in A^*$, то существует окрестность $\omega \ni a$ и голоморфные функции $f_1, \ldots, f_m$ в ω_a такие, что*

$$1)\ A \cap \omega_a = \{z \in \omega_a : f_1(z) = \ldots = f_m(z) = 0\},$$
$$2)\ \partial f_p/\partial z_j \equiv 0 \text{ в } \omega_a,\ 1 \leqslant p \leqslant m.$$

Доказательство. Снова положим $j = n$. Выберем набор голоморфных функций $\{g_1, \ldots, g_m\}$, задающих множество A в окрестности $\Omega_a \ni a$. Рассмотрим разложение функции $g_1(z)$ в ряд (1) по п.н.з. z_n. По лемме 1 все ростки коэффициентов разложения $c_{1,p}('z)$ лежат в $I\ (A_a)$. Заметим, что хотя бы один из этих ростков $C_{1,p_1}('z)$ не лежит в идеале $I^{(1)}$, порожденном ростками функций $\{g_2, \ldots, g_m\}$ (иначе мы имели бы $I(A_a) = I^{(1)}$). Заменив в наборе $\{g_1, \ldots, g_m\}$ функцию g_1 на c_{1,p_1} и проделав ту же процедуру для функций $g_2, \ldots, g_m$, получим требуемое.

Замечание. Из леммы 2 следует, что если z_n — п.н.з. для множества A, то на самом деле A есть аналитическое множество в пространстве меньшего числа переменных. Поскольку A неприводимо, то всегда можно выбрать голоморфные в $\omega_a \ni a$ функции $f_1, \ldots, f_m$, ростки которых порождают идеал $I(A_a)$ и для которых $\partial f_p/\partial z_n \equiv 0$ в ω_a при $1 \leqslant p \leqslant m$.

Лемма 3. *Если* $\operatorname{mes}\alpha'(\operatorname{pr}_L A)=0$, *то переменная* z_j *при* $k+l+1\leqslant j\leqslant n$ *является п.н.з. для* A *в любой точке* $a\in A^*(A, L, \alpha'$*— как в теореме 3).*

Доказательство. Считаем, что $j=n$. Пусть z_n — не п.н.з. для A в некоторой точке $a\in A^*$. Это значит, что в идеале $I(A_a)$ существует росток, для представителя g_1 которого $\partial g_1/\partial z_n(в)\neq 0$; не ограничивая общности, будем считать, что $a=b$ и что росток g_1 неприводим. Рассмотрим теперь набор голоморфных функций $\{g_1, \ldots, g_m\}$, ростки которых неприводимы и порождают идеал $I(A_a)$. Так как $a\in A^*$, то ранг голоморфного отображения $G(z)=(g_1(z), \ldots, g_m(z))$ в точке a равен m. Следовательно, уравнение $G(z)=0$ в окрестности ω_a точки a разрешимо в виде

$$(z_{\nu_1}, \ldots, z_{\nu_m})=\Phi(z_{\nu_{m+1}}, \ldots z_{\nu_n}). \tag{3}$$

При этом можно считать, что $z_{\nu_m}=z_n$, ибо вектор $\partial G/\partial z_n$ невырожден.

Пусть в левую часть равенства (3) попали t координат z_ν, $1\leqslant\nu\leqslant k$ и s координат z_ν, $k+1\leqslant\nu\leqslant k+l$. Очевидно, $s+t\leqslant m-1$.

Пусть $\tilde\omega_a$ есть множество вида $\tilde\omega_a=\{(z_{\nu m+1}, \ldots, z_{\nu n}):\exists(z_{\nu_1}, \ldots z_{\nu m}):(z_1, \ldots, z_n)\in\omega_a\}$. Рассмотрим отображение $\pi:\tilde\omega_a\to L$, описывающее $\operatorname{pr}_L(A\cap\omega_a)$ в независимо меняющихся координатах $(z_{\nu m+1}, \ldots, z_{\nu_n})$ из (3).

Из вещественных параметров $(x_1, \ldots, x_{k+l}, y_1, \ldots, y_k)$, образующих естественную систему координат в подпространстве L, свободно будут меняться β параметров, где $\beta=[2(k-t)+(l-s)]$; следовательно, матрица Якоби отображения π будет содержать единичную матрицу размера $\beta\times\beta$ в каждой точке из $\tilde\omega_a$. По теореме о ранге следует, что

$$\operatorname{mes}_\beta(\operatorname{pr}(A\cap\omega_a))>0,$$

так как $\operatorname{pr}_L(A\cap\omega_a)$ совпадает с образом отображения π. В силу неравенств $k+l\leqslant m-1$ и $k-t\geqslant 0$ получаем, что всегда $\beta\geqslant\alpha'$. Это неравенство противоречит условиям леммы, следовательно, предположение о том, что z_n — не п.н.з. для множества, неверно. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\{g_1, \ldots, g_m\}$ — набор голоморфных функций, задающих множество A в некоторой окрестности ω_a точки $a\in A^*$, ростки которых неприводимы в $I(A_a)$. Оценим меру Хаусдорфа множества $\operatorname{pr}_L(A\cap\omega_a)$. Так как ранг отображения $G(z)$ в точке a равен m (см. лемму 3.), то уравнение $G(z)=0$ допускает решение в виде (3) в некоторой окрестности $\omega'_a\subset\omega_a$. Пусть в левую часть равенств (3) попали t_1 координат z_ν, $1\leqslant\nu\leqslant k$, t_2 координат z_ν, $k+1\leqslant\nu\leqslant k+l$, t_3 координат z_ν, $k+l+1\leqslant\nu\leqslant n$; $t_1+t_2+t_3=m$. Вводя отображение π как в лемме 3, по теореме о ранге получим, что

$$\operatorname{mes}_{[2(k-t_1)+(l-t_2)]}(\operatorname{pr}_L(A\cap\omega'_a))>0.$$

Из неравенств $t_1 \leqslant m, t_1 + t_2 \leqslant m, k - t_1 \geqslant 0$ следует, что $2(k - t_1) + (l - t_2) \geqslant \alpha'$, поэтому наименьшее α, при котором возможно равенство $\mathrm{mes}_\alpha(\mathrm{pr}_L(A)) = 0$, удовлетворяет условию $\alpha \geqslant \alpha'$. Для получения обратного неравенства достаточно рассмотреть аналитическое множество вида

$$A_m = \{z \in C^n : z_1 = \ldots = z_m = 0\}.$$

Первое утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь $\mathrm{mes}_{\alpha'}(\mathrm{pr}_L A) = 0$; мы будем изучать координатные функции φ_j отображения Φ в (3). В силу лемм 3 и 2 заключаем, что можно считать функции φ_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, не зависящими от группы переменных $(z_{k+l+1}, \ldots, z_n)$. Далее рассмотрим два случая.

а) $k > m$. В этом случае мы докажем, что всякая переменная z_ν, $k + 1 \leqslant \nu \leqslant k + l$ является п.н.з. для A. Далее, применив леммы 3 и 2, получим требуемое.

Действительно, если существует такое ν, что z_ν — не п.н.з. для A в точке $a \in A^*$, то в идеале $I(A_a)$ есть росток, для представителя g которого $\partial g_1 / \partial z_\nu (b) \neq 0$, где $b \in \omega_a$. Будем считать $a = b$. Вводя как и в лемме 3, набор функций $\{g_2, \ldots, g_m\}$, запишем решение уравнения $G(z) = 0$ в некоторой окрестности $\omega'_a \ni a$ в виде (3). Если t, s и β такие же, как в лемме 3, то из нашего предположения следует, что

$$s > 0 \text{ и } \mathrm{mes}_\beta(\mathrm{pr}_L(A \cap \omega'_a)) > 0.$$

Но $\beta = 2k + l - t - (t + s) \geqslant 2k + l - (m - 1) - m = \alpha' + 1$, что противоречит условиям теоремы.

б) $k \leqslant m$. Запишем решение уравнения $G(z) = 0$ в виде (3), считая, что в фигурирующих в (3) равенствах присутствуют лишь переменные $(z_1, \ldots, z_{k+l})$, и пусть t, s, β выбраны так же, как в лемме 3. Тогда $\mathrm{mes}_\beta(\mathrm{pr}_L(A \cap \omega'_a)) > 0$. Поскольку $\beta = k + l - (t + s) + (k - t) = k + l - m + (k - t)$, то из условий теоремы немедленно вытекает, что $t = k$, т. е. в левую часть (3) попали переменные $(z_1, \ldots, z_k)$. Не ограничивая общности, будем считать, что (3) имеет вид

$$z_j = \varphi_j(z_{m+1}, \ldots, z_{k+l}) = \varphi_j('z), \ 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Матрица Якоби отображения π в вещественных координатах (см. лемму 3) тогда записывается в блочной форме так:

$$J_\pi = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & I \\ B_1 & B_2 & 0 \end{pmatrix},$$

где A_1, B_1 — $(k+l-m) \times k$ — матрицы с элементами $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_r}$ и $\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_p}$, $1 \leqslant j \leqslant k$, $m+1 \leqslant p \leqslant k+l$ соответственно, A_2, B_2 — $(k+ + l - m) \times (m-k)$ — матрицы с элементами $\frac{\partial \operatorname{Re} \varphi_j}{\partial x_p}$ и $\frac{\partial \operatorname{Re} \varphi_j}{\partial y_r}$, $k+1 \leqslant j \leqslant m$, $m+1 \leqslant p \leqslant k+l$ соответственно; I — единичная $(k+l-m) \times (k+l-m)$-матрица. Из условия $\operatorname{rg}(J_\pi) \leqslant k+l-m$, выполненного всюду в ω_a' получаем, что $B_1 \equiv 0$, $B_2 \equiv 0$ в ω_a. При $1 \leqslant j \leqslant k$ из голоморфности функций φ_j отсюда следует, что $\varphi_j('z) \equiv \mathrm{const} = c_j$.

Пусть теперь $k+1 \leqslant j \leqslant k+l$. Обозначим $v_j = \operatorname{Jm} \varphi_j$, $u_j = = \operatorname{Re} \varphi_j$. Из условия $B_2 \equiv 0$ получаем $\partial u_j/\partial y_p \equiv \partial v_j/\partial x_p \equiv 0$, $m+1 \leqslant p \leqslant k+l$

Так как функции u_j и v_j плюригармоничны, то $u_j('z) = = \alpha_j(\tilde{z}) x_{m+1} + \beta_j(\tilde{z})$, $v_j('z) = \alpha_j'(\tilde{z}) y_{m+1} + \beta_j'(\tilde{z})$, где $\tilde{z} = (z_{m+2}, \ldots, z_{k+l})$.

Из уравнений Коши-Римана следует, что $\alpha_j \equiv \alpha_j'$.

Тогда функции $\varphi_j('z)$ имеют вид $\varphi_j('z) = \alpha_j(\tilde{z}) z_{m+1} + \gamma_j(\tilde{z})$. В силу вещественности и голоморфности $\alpha_j(\tilde{z})$ заключаем, что $\alpha_j(\tilde{z}) \equiv \mathrm{const} = a_{j,\, m+1}$. Применяя то же рассуждение последовательно к переменным группы $\tilde{z}$, получим, что функции φ_j имеют вид

$$\varphi_j('z) = \sum_{s=m+1}^{k+l} a_{j,\, s} z_s + b_j.$$

Теорема 3 доказана. Как отмечалось выше, из нее следуют теоремы 1 и 2.

Список литературы: *Dahmen W.*, *Miechelli Ch. On* a Entire Function of Affine Zineage.—Proc. Amer. Math. Soc., 1982, **84** (3), p. 344—346. 2. *Эрве М.* Функции многих комплексных переменных.— М.: Мир, 1965.— 166 с.

Поступила в редколлегию 24.06.83.