УДК 513.88

М. Ю. ЛЮБИЧ, Ю. И. ЛЮБИЧ

ОБЩИЙ ВИД НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ПРОЕКТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА КОМПАКТЕ

В заметке [1] были описаны неотрицательные проекторы в $\boldsymbol{R}^n$. Предмет настоящей статьи естественно возникает при взгляде на $\boldsymbol{R}^n$ как на пространство непрерывных функций на дискретном компакте $\{1, \ldots, n\}$. Вместе с тем неотрицательные проекторы в $C(X)$ (X — произвольный компакт) играют существенную роль в теории почти периодических операторов и представлений полугрупп [2, 3]. Важный подкласс класса неотрицательных проекторов составляют стохастические (марковские) проекторы. Их общий вид был исследован в [4], а для случая $\boldsymbol{R}^n$ — независимо в [5]. Отметим, что цель работы [5] состояла в получении частного решения одной проблемы математической генетики.

Пусть A — линейный оператор в пространстве $C(X)$, $A \geqslant 0$. Последнее эквивалентно монотонности оператора A относительно обычного порядка в $C(X)$. Используя это, из неравенства $|\varphi(x)| \leqslant \leqslant \|\varphi\|$ получаем $|A\varphi(x)| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|A1\|$. Таким образом, оператор A ограничен и $\|A\| = \|A1\|$. Если $A1 = 1$, то оператор A называется *стохастическим* (марковским). В этом случае $\|A\| = 1$.

Общий вид неотрицательного оператора в $C(X)$ по теореме Рисса есть

$$(A\varphi)(x) = \int\limits_X \varphi d\alpha_x \quad (x \in X), \tag{1}$$

где α_x — конечная мера, w^*-непрерывно зависящая от x. Если A — стохастический, то мера α_x — вероятностная.

Введем понятие *носителя* $\operatorname{Supp} A$ оператора $A \geqslant 0$, полагая $x \in \operatorname{Supp} A$, если для любой функции* $\varphi \geqslant 0$ такой, что $\varphi(x) > 0$, образ $A\varphi$ отличен от нуля. Очевидно, носитель замкнут и, тем самым, компактен. Из его определения легко следует формула

$$\operatorname{Supp} A = \overline{\bigcup_{x \in X} \operatorname{Supp} \alpha_x}. \tag{2}$$

Поэтому, если $\varphi | \operatorname{Supp} A = 0$, то $A\varphi = 0$. Обратно, если $\varphi \geqslant 0$ и $A\varphi = 0$, то $\varphi | \operatorname{Supp} A = 0$ по определению носителя.

---

* Здесь и в дальнейшем слово «функция» означает, если не оговорено противное, — «непрерывная функция на X».

Рассмотрим теперь в $C(X)$ проектор $P \geqslant 0$. Пусть $\{\pi_x\}$ — соответствующее семейство мер, $S = \operatorname{Supp} P$.

Лемма 1. *Имеет место формула*

$$S = \overline{\bigcup_{x \in S} \operatorname{Supp} \pi_x}. \tag{3}$$

Доказательство. Если формула (3) нарушается, то найдется функция $\varphi \geqslant 0$ такая, что $\varphi \mid S \neq 0$, но $\varphi \mid \operatorname{Supp} \pi_x = 0$ для всех $x \in S$. Но тогда $P\varphi \mid S = 0$, откуда $P(P\varphi) = 0$, а так как P — проектор, то $P\varphi = 0$, т. е. $\varphi \mid S = 0$ — противоречие.

Положим $\varepsilon = P1$, $E_+ = \{x \mid \varepsilon(x) > 0\}$. Очевидно, $P\varepsilon = \varepsilon$. Если $\psi \in \operatorname{Im} P$, то $\psi = P\psi$ и, следовательно, $|\psi(x)| \leqslant \|\psi\| \varepsilon(x)$ $(x \in X)$. Поэтому на дополнении $X \diagdown E_+$ каждая функция $\psi \in \operatorname{Im} P$ обращается в тождественный нуль.

Напротив, на множестве E_+ определено w^*-непрерывное отображение $x \to \rho_x \equiv \pi_x / \varepsilon(x)$ в компакт вероятностных мер, причем, очевидно,

$$\frac{(P\varphi)(x)}{\varepsilon(x)} = \int_X \varphi d\rho_x = \int_S \varphi d\rho_x \quad (x \in E_+) \tag{4}$$

Положим $E = E_+ \cap S$ и рассмотрим линейный сжимающий оператор $\hat{P}\colon C(X) \to CB(E)$, действующий по формуле $(\hat{P}\varphi)(x) = P\varphi(x)/\varepsilon(x)$*. Отождествим в E точки, не разделяемые функциями из образа $\operatorname{Im} \hat{P}$. Полученное топологическое факторпространство обозначим через $\tilde{E}$. Оператор $\hat{P}$ естественно порождает линейный сжимающий оператор $\tilde{P}\colon C(X) \to CB(\tilde{E})$. Заметим еще, что в силу (4)

$$\int_E \varepsilon d\rho_x = 1 \quad (x \in E_+). \tag{5}$$

Лемма 2. *Подмножество $\operatorname{Im} \tilde{P} \subset CB(\tilde{E})$ является замкнутой подрешеткой банаховой решетки $CB(\tilde{E})$, разделяющей точки пространства $\tilde{E}$ и содержащей единицу.*

Доказательство. Разделение точек обеспечено конструкцией и, очевидно, $1 = \tilde{P}1$. Нужно доказать, что если $\tilde{\varphi} = \tilde{P}\varphi$, $\tilde{\psi} = \tilde{P}\psi$, то функция $\max(\tilde{\varphi}(\xi), \tilde{\psi}(\xi))$ $(\xi \in \tilde{E})$ также принадлежит $\operatorname{Im} \tilde{P}$. Положим $\theta(x) = \max((P\varphi)(x), (P\psi)(x))$ $(x \in X)$. Применяя к неравенству $\theta \geqslant P\varphi$ оператор P, получаем $P\theta \geqslant P\varphi$. Точно так же $P\theta \geqslant P\psi$. Следовательно, $P\theta \geqslant \theta$. Положим $\omega = P\theta - \theta$. Тогда $\omega \geqslant 0$, но $P\omega = 0$. Отсюда $\omega \mid S = 0$ (по определению носителя).

---

* Основные технические трудности дальнейшего исследования связаны с некомпактностью множества E. Для стохастического P они отпадают, так как в этом случае $E = S$ — компакт.

Таким образом, $\theta(x) = (P\theta)(x)$ $(x \in S)$, откуда $(P\theta)(x) = \max((P\varphi) \times \times (x), (P\psi(x)))$ $(x \in E)$. Деля это тождество на $\varepsilon(x)$ и перенося на факторпространство $\tilde{E}$, получаем $\max(\tilde{\varphi}(\xi), \tilde{\psi}(\xi)) = (\tilde{P}\theta)(\xi)$ $(\xi \in \tilde{E})$.

Замкнутость образа $\mathrm{Im}\,\tilde{P}$ обеспечивается тем, что оператор $\tilde{P}$ осуществляет изоморфизм $\mathrm{Im}\,P \approx \mathrm{Im}\,\tilde{P}$. Действительно, если $\varphi \in \in \mathrm{Im}\,P$, то $\tilde{P}\varphi$ получается из φ сужением на E, делением на ε и факторизацией. Сужение на E является изоморфизмом на $\mathrm{Im}\,P$, ибо, если $\varphi \in \mathrm{Im}\,P$, то $\varphi(x) = 0$ вне E_+ и, следовательно,

$$\varphi(x) = \int_E \varphi d\pi_x \quad (x \in X),$$

откуда $\|\varphi\| \leqslant \|P\| \sup_E |\varphi|$. Деление на ε имеет ограниченный обратный: оператор умножения на ε. Наконец, факторизация изометрична. Лемма доказана.

Следствие. *Если* $\xi_1, \xi_2 \in \tilde{E}$ *и* $\xi_1 \neq \xi_2$, *то существует функция* $\tilde{\lambda} \in \mathrm{Im}\,\tilde{P}$, *удовлетворяющая условиям:* $\tilde{\lambda} \geqslant 0$, $\tilde{\lambda}(\xi_1) = 0$, $\tilde{\lambda}(\xi_2) = = 1$.

Доказательство. Пусть функция $\tilde{\mu} \in \mathrm{Im}\,\tilde{P}$ разделяет точки ξ_1 и ξ_2, т. е. $\tilde{\mu}(\xi_1) \neq \tilde{\mu}(\xi_2)$. Положим $\tilde{\nu}(\xi) = (\tilde{\mu}(\xi) - \tilde{\mu}(\xi_1))/(\tilde{\mu}(\xi_2) - - \tilde{\mu}(\xi_1))$. Функция $\tilde{\nu}$ принадлежит $\mathrm{Im}\,\tilde{P}$ и $\tilde{\nu}(\xi_1) = 0$, $\tilde{\nu}(\xi_2) = 1$. Остается положить $\tilde{\lambda}(\xi) = \max(\tilde{\nu}(\xi), 0)$.

Замечание. Если бы было известно, что $\tilde{E}$ — компакт, то из леммы 2 по теореме Стоуна вытекало бы, что $\mathrm{Im}\,\tilde{P} = C(\tilde{E})$, а тогда предыдущее следствие сводилось бы к лемме Урысона. На самом же деле мы используем это следствие для доказательства компактности множества $\tilde{E}$.

Обозначим через ξ_x класс эквивалентности произвольной точки $x \in E$, т. е. множество точек из E, не отличаемых от x функциями из $\mathrm{Im}\,\hat{P}$.

Лемма 3. *Имеет место включение*

$$E_+ \cap \mathrm{Supp}\,\rho_x \subset \xi_x \quad (x \in E). \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $x, y \in E$, но $\xi_x \neq \xi_y$. Опираясь на следствие леммы 2, построим функцию $\tilde{\lambda} \in \mathrm{Im}\,P$ такую, что $\tilde{\lambda} \geqslant 0$, $\tilde{\lambda}(\xi_x) = 1$, $\tilde{\lambda}(\xi_y) = 0$. Если $\tilde{\lambda} = \tilde{P}\lambda$, то $(P\lambda)(z) \geqslant 0$ $(z \in E)$. Вместе с тем

$$\int_E (P\lambda)\, d\rho_x = 0, \quad (P\lambda)(y) = 1.$$

Следовательно, $y \,\bar{\in}\, \mathrm{Supp}\,\rho_x$. Итак, $\mathrm{Supp}\,\rho_x \cap \xi_y = \varnothing$ при $\xi_x \neq \xi_y$, а значит, $E \cap \mathrm{Supp}\,\rho_x \subset \xi_x$. Но $E = E_+ \cap \check{S}$, а $\check{\mathrm{S}}\mathrm{upp}\,\rho_x \subset S$. Поэтому $E_+ \cap \mathrm{Supp}\,\rho_x \subset \xi_x$.

Теперь все готово для доказательства следующего основного результата.

Теорема 1. *Для любого проектора $P \geqslant 0$ факторопространство E компактно, а* $\operatorname{Im} \tilde{P} = C(\tilde{E})$.

Доказательство. Обратимся к соотношению (5). В силу леммы 3 получаем

$$\int_{\xi_x} \varepsilon d\rho_x = 1 \quad (x \in E). \tag{7}$$

Рассмотрим в S компактное подмножество E_1, выделяемое условием $\varepsilon(x) \geqslant 1$. Очевидно, $E_1 \subset E$. Вместе с тем из (7) вытекает, что $E_1 \cap \xi_x \neq \varnothing$ для всех $x \in E$, т. е. в E_1 представлены все классы $\xi_x (x \in E)$. Тем самым $\tilde{E}$ оказывается непрерывным образом компакта $\tilde{E}_1$ при сквозном естественном отображении $E_1 \to E \to \tilde{E}$. Следовательно, $\tilde{E}$ — компакт. Отсюда, в силу леммы 2 и теоремы Стоуна, вытекает, что $\operatorname{Im} \tilde{P} = C(\tilde{E})$.

Следствие. *Для любого $P \geqslant 0$ образ* $\operatorname{Im} P$ *порядково изоморфен пространству* $C(\tilde{E})$.

Если P — стохастический проектор, т. е. $\varepsilon = 1$, то $E_+ = S = X$, откуда $E = X$, а $\tilde{E}$ является факторпространством компакта X по отождествлению точек функциями из $\operatorname{Im} P$. В этом случае первое утверждение теоремы 1 тривиализуется. Второе утверждение, оставаясь нетривиальным, принимает более простую форму поскольку $\tilde{P}$ теперь отличается от P лишь переносом функций с E на $\tilde{E}$. При этом $\tilde{P}$ — изометрия.

Сформулируем теперь второй основной результат.

Теорема 2. *Пусть P — неотрицательный проектор в $C(X)$,*

$$(P\varphi)(x) = \int \varphi d\pi_x \quad (x \in X).$$

Введем обозначения: $\varepsilon = P1$, $E_+ = \{x / \varepsilon(x) > 0\}$, $S = \operatorname{Supp} P$, $E = E_+ \cap S$, $\tilde{E}$ — факторпространство, получаемое из E склеиванием точек функциями вида $(P\varphi)(x)/\varepsilon(x)$, $x \to \xi x$ — естественное отображение E в $\tilde{E}$, $\rho_x = \pi_x / \varepsilon(x)$ $(x \in E_+)$. Тогда 1) $\tilde{E}$ — компакт; 2) ρ_x — вероятностная мера, зависящая только от класса ξ_x и такая, что $E \cap \operatorname{Supp} \rho_x \subset \xi_x$; 3) выполняются соотношения

$$\int_E \varepsilon d\rho_x = 1 \ (x \in E_+); \tag{8}$$

4) имеет место формула

$$(P\varphi)(x) = \int_{\tilde{E}} d\sigma_x(\xi) \int_X \varphi d\rho^{\xi}, \tag{9}$$

где σ_x — некоторая однозначно определенная мера на $\tilde{E}$ такая, что

$$\int_{\tilde{E}} d\sigma_x = \varepsilon(x), \tag{10}$$

$\rho^\xi = \rho_x$ *при* $\xi = \xi_x$. *Если* $x \in E$, *то*

$$(P\varphi)(x) = \varepsilon(x) \int\limits_X \varphi d\rho_x \tag{11}$$

(т. е. в этом случае $\sigma_x = \varepsilon(x)\,\delta_{\xi_x}$*). Если* $x \in X \setminus E_+$, *то* $(P\varphi)(x) = 0$ *(т. е. в этом случае* $\sigma_x = 0$*). Все перечисленные меры непрерывно зависят от соответствующих параметров.*

Обратно, пусть заданы следующие объекты: 1) *непрерывная на* X *функция* $\varepsilon \geqslant 0$; 2) w^**-непрерывное отображение* $x \to \rho_x$ *множества* $E_+ = \{x \mid \varepsilon(x) > 0\}$ *в компакт вероятностных мер на* X; 3) *непрерывное отображение* $x \to \xi_x$ *множества* $E = E_+ \cap S$ *(где* $S = \overline{\bigcup\limits_{x \in E_+} \operatorname{supp} \rho_x}$*) на некоторый компакт* $\tilde{E}$; 4) w^**-непрерывное отображение* $x \to \sigma_x$ *компакта* X *в конус мер на* $\tilde{E}$. *Пусть a) мера* ρ_x $(x \in E)$ *зависит только от образа* ξ_x, *причем* $E \cap \operatorname{supp} \rho_x \subset \xi_x$; *b) выполняются соотношения* (8); *c)* $\sigma_x = \varepsilon_x \delta_{\xi_x}$ *при* $x \in E$, $\sigma_x = 0$ *при* $x \in X \setminus E_+$ *и имеет место нормировка* (10). *Тогда формула* (9) *определяет неотрицательный проектор* P *в* $C(X)$, *причем* $P1 = \varepsilon$.

Доказательство. В прямую сторону почти все утверждения уже были доказаны. Тот факт, что ρ_x зависит только от класса ξ_x, вытекает из (4); если x, $y \in E$ и $\xi_x = \xi_y$, то

$$\int\limits_X \varphi d\rho_x = \int\limits_X \varphi d\rho_y$$

для всех $\varphi \in C(X)$, а значит, $\rho_x = \rho_y$. Основная формула (9) получается следующим образом. Поскольку $\operatorname{supp} \pi_x \subset S$, а $(P\varphi)(y) = 0$ при $y \overline{\in} E_+$, то

$$(P\varphi)(x) = (P^2\varphi)(x) = \int\limits_E (P\varphi)\, d\pi_x \quad (x \in X). \tag{12}$$

Обозначим через σ_x меру на $\tilde{E}$, индуцированную мерой $\int \varepsilon d\pi_x$ на E. Так как функция $P\varphi/\varepsilon$ переносится с E на $\tilde{E}$ и записывается в виде (4), то формуле (12) можно придать требуемый вид (9). Подставляя в (9) $\varphi = 1$, получаем (10).

Единственность меры σ_x следует из теоремы 1, благодаря которой внутренний интеграл в (9) пробегает все пространство $C(\tilde{E})$, когда φ пробегает $C(X)$. Если $x \in E$, то имеет место (11) в силу (4). Если $x \in X \setminus E_+$, то $(P\varphi)(x) = 0$ согласно следствию леммы 2. w^*-непрерывная зависимость меры σ_x от x следует из (9) опять же благодаря теореме 1. Непрерывная зависимость остальных мер от соответствующих параметров очевидна.

Для доказательства теоремы в обратную сторону нужно только проверить, что $P^2 = P$, ибо остальное очевидно. Пусть $\psi = P\varphi$. Тогда $\psi(x) = 0$ при $x \in X \setminus E_+$, а $\operatorname{Supp} \rho^\xi \subset S$ при всех ξ. Поэтому

$$\int\limits_X \psi d\rho^\xi = \int\limits_E \psi d\rho^\xi.$$

Но $E \cap \operatorname{Supp} \rho^{\xi} \subset \xi$, а функция ψ/ε постоянна на ξ, так как если $x \in E$, то

$$\psi(x) = \varepsilon(x) \int_X \varphi d\rho_x,$$

а мера ρ_x постоянна при $\xi_x = \xi$. Следовательно, при $\xi_x = \xi$

$$\int_X \psi d\rho^{\xi} = \int_{\xi} \psi d\rho^{\xi} = \frac{\psi(x)}{\varepsilon(x)} \int_{\xi} \varepsilon d\rho^{\xi} = \frac{\psi(x)}{\varepsilon(x)} \int_X \varphi d\rho_x.$$

Отсюда $P\psi = P\varphi = \psi$. Теорема доказана.

Следствие 1 (ср. [4]). *Если P — стохастический проектор в $C(X)$, то*

$$(P\varphi)(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\xi_x} \varphi d\pi_x & (x \in S) \\ \displaystyle\int_{\tilde{S}} d\sigma_x(\xi) \int_{\xi} \varphi d\pi^{\xi} & (x \in S), \end{cases}$$

где $\tilde{S}$ — компакт, получаемый из $S = \operatorname{Supp} P$ склеиванием точек функциями семейства $\operatorname{Im} P$; мера π_x зависит только от класса ξ_x точки x и в этом качестве обозначается π^{ξ}; $\operatorname{Supp} \pi^{\xi} \subset \xi$; σ_x — однозначно определенная вероятностная мера на $\tilde{S}$. Обратно, любой оператор описанного вида является стохастическим проектором.

Здесь для краткости формулировки опущены очевидные требования непрерывной зависимости мер от параметров.

Вид проектора существенно упрощается, если он неразложим. Напомним, что оператор $A \geqslant 0$ в $C(X)$ называется неразложимым, если для каждой функции $\varphi \geqslant 0$ ($\varphi \neq 0$) и каждой точки x существует натуральное n такое, что $(A^n \varphi)(x) > 0$. Очевидно, при этом $\operatorname{Supp} A = X$. Если P — неразложимый проектор, то $P^n = P$ для всех n и, следовательно, $P\varphi > 0$ для всех $\varphi \geqslant 0$ ($\varphi \neq 0$). Оператор, обладающий последним свойством, называется положительным; любой положительный оператор, очевидно, неразложим. В частности, $\varepsilon = P1 > 0$, откуда $E = X$. Из положительности P следует, что $\operatorname{Supp} \rho_x = X$ при всех x. Но тогда $\xi_x = X$ для всех x и, тем самым, мера ρ_x не зависит от $x : \rho_x \equiv \rho$, где ρ — фиксированная положительная мера. Теперь из формулы (11) вытекает

Следствие 2. *Общий вид неотрицательного неразложимого проектора P в $C(X)$ есть*

$$P\varphi(x) = \varepsilon(x) \int_X \varphi d\rho, \tag{13}$$

где функция ε и мера ρ положительны и связаны условием

$$\int_X \varepsilon d\rho = 1. \tag{14}$$

Отсюда видно, что *все неразложимые неотрицательные проекторы в $C(X)$ одномерны.*

Список литературы: 1. *Любич Ю. И.* Общий вид неотрицательных проекторов в R^n.— Теория функций, функц. анализ и их прил., 1979. вып. 31, с. 84—86. 2. *Jamison B.*— Ergodic decomposition induced by certain Markov operators.— Trans. Amer. Math. Soc., 1965, **117,** № 5, p. 451—468. 3. *Любич М. Ю., Любич Ю. И.* Спектральная теория почти периодических представлений полугрупп.— Укр. мат. журн., 1984, № 5, с. 632—636. 4. *Lloyd S. P.* On certain projections in spaces of continuous functions.— Pacif. J. Math., 1963, **13,** № 1, p. 171—176. 5. *Любич Ю. И.* Линейные бернштейновские популяции.— Теория функций, функц. анализ и их прил., 1975, вып. 22, с. 107—111.

Поступила в редколлегию 05.10.83