УДК 517.432

А. В. КУЖЕЛЬ, Э. РОТКЕВИЧ

САМОСОПРЯЖЕННЫЕ И ПРАВИЛЬНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ ЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ С СОХРАНЕНИЕМ ГРАНИ

Известная теорема о самосопряженных расширениях полуограниченных симметрических (плотн озаданных) операторов с сохранением грани переносится на случай эрмитовых операторов. При этом оказывается, что рассматриваемая задача в случае эрмитовых неплотно заданных операторов уже не всегда разрешима.

В последней части работы указанная задача обобщается на случай правильных расширений полуограниченных эрмитовых операторов.

1. Терминология. Действующий в гильбертовом пространстве H оператор A называется *эрмитовым*, если $(Af, g) = (f, Ag)$ $\forall \{f, g\} \subset D(A))$. Плотно определенный эрмитов оператор называется *симметрическим*. Симметрический оператор A называется *самосопряженным*, если $A^* = A$.

Эрмитов оператор A называется *ограниченным снизу (сверху)*, если существует такое вещественное число c, что для любого $f \in D(A)$

$$(Af, f) \geqslant c(f, f) \quad ((Af, f) \leqslant c(f, f)). \tag{1}$$

При этом число c называют *гранью* оператора A.

Ограниченные снизу (сверху) операторы называются *полуограниченными*. Нетрудно убедиться, что без ограничения общности можно рассматривать лишь ограниченные снизу операторы с гранью $c = 1$ (или $c = 0$).

В случае полуограниченных симметрических операторов имеет место следующая теорема, высказанная фон Нейманом и затем различными методами доказанная М. Стоуном, К. Фридрихсом, Г. Фрейденталем и М. Г. Крейном (см., напр., [1—4]).

Теорема 1. *Произвольный полуограниченный симметрический оператор имеет полуограниченное самосопряженное расширение с той же гранью.*

В связи с этим возникает вопрос: справедлива ли теорема 1 в случае эрмитовых операторов? Простой пример показывает, что в общем случае ответ отрицательный. Действительно, пусть H — двумерное пространство и e_1, e_2 — его ортонормированный базис. Рассмотрим оператор A, который определяется на $D(A) = \{\alpha e_1 \mid \alpha \in \boldsymbol{C}\}$ равенством $A\varphi = \varphi + (\varphi, e_1) e_2$ $(\varphi \in D(A))$. Для этого оператора $(A\varphi, \varphi) = (\varphi, \varphi)$. Пусть B — произвольное расширение оператора A. Тогда $Be_1 = Ae_1 = e_1 + e_2$, $Be_2 = ae_1 + be_2$, где a, b — некоторые комплексные числа. Оператор B является самосопряженным расширением оператора A тогда и только тогда, когда $a = 1$, $\bar{b} = b$. Однако ни при каком b неравенство $(Bf, f) \geqslant (f, f)$ или $(Bf, f) \leqslant (f, f)$ $(\forall f \in H)$ невозможно (так как одно собственное значение оператора B больше единицы, а другое — меньше).

И все же можно сформулировать довольно широкие и естественные условия, при которых полуограниченные самосопряженные расширения с сохранением грани существуют и в случае эрмитовых операторов.

2. Полуограниченные расширения в случае эрмитовых операторов. Пусть $\pi(A)$ — поле регулярности эрмитова оператора A; Q — оператор ортогонального проектирования в H на $\overline{D(A)}$ и $\sigma_p(QA)$ — точечный спектр оператора QA. Пусть, кроме того,

$$N_\lambda = H \ominus M_\lambda \quad (M_\lambda = (A - \lambda I) D(A)) \tag{2}$$

— дефектное подпространство оператора A.

Лемма. *При $\lambda \bar{\in} \sigma_p(QA)$ многообразия $D(A)$ и N_λ линейно независимы.*

Доказательство. Пусть $\lambda \bar{\in} \sigma_p(QA)$. Предположим, что ненулевой вектор $\varphi \in D(A) \cap N_\lambda$. Тогда при любом $f \in D(A)$

$$((QA - \bar{\lambda} I)\varphi, f) = ((A - \bar{\lambda} I)\varphi, f) = (\varphi, (A - \lambda I) f) = 0,$$

откуда следует, что $(QA - \bar{\lambda} I)\varphi = 0$. Но тогда $\bar{\lambda} = \lambda \in \sigma_p(QA)$, что противоречит условию.

Теорема 2. *Пусть A — замкнутый эрмитов оператор, удовлетворяющий условию*

$$(Af, f) \geqslant (f, f) \quad (\forall f \in D(A)). \tag{3}$$

Если при этом $1 \in \pi(A)$ и $1 \bar{\in} \sigma_p(QA)$, то оператор A допускает полуограниченное расширение с той же гранью ($c = 1$).

Доказательство. Так как, на основании леммы, многообразия $D(A)$ и N_λ линейно независимы, то можем рассмотреть многообразие $D(S) = D(A) \dot{+} N_1$, на котором определим оператор S равенством $S(f + g) = Af + g$ $(f \in D(A),\ g \in N_1)$. Тогда $(S(f + g), f + g) = (Af, f) + (Af, g) + (g, f) + (g, g)$. А так как $(Af, f) \geqslant (f, f)$ и $(Af, g) = (f, g)$, то $(Sh, h) \geqslant (h, h)$ $(h = f + g \in D(S))$ и, таким образом, S — эрмитово расширение оператора A с сохранением грани.

Покажем, что оператор S плотно определен и его дефектные числа равны нулю. Действительно, пусть $\psi \perp D(S)$. Тогда $\psi \perp N_1$ и, следовательно, $\psi \in \overline{M}_1$. А так как $1 \in \pi(A)$ и, таким образом, M_1 — подпространство в H, то $\psi = (A - I)\varphi$, где φ — некоторый вектор из $D(A)$. Применяя к обеим частям последнего равенства оператор Q, получим, что $0 = (QA - I)\varphi$, откуда следует, что $\varphi = 0$. Таким образом, $\psi = 0$, т. е. $\overline{D(S)} = H$.

Пусть теперь $g_i \in \tilde{N}_i$, где $\tilde{N}_i = H \ominus \tilde{M}_i$, а $\tilde{M}_i = (S - iI) D(S)$. Тогда для любого $f \in D(A)$ и $g \in N_1$

$$((S - iI)(f + g), g_i) = ((A - iI) f + (1 - i) g, g_i) = 0. \tag{4}$$

В частности, положив $f = 0$, находим, что $(g, g_i) = 0$ для любого $g \in N_1$, т. е. $g_i \perp N_1$. Но тогда $g_i \in M_1$ и, следовательно, $g_i = (A - I) h$, где $h \in D(A)$. С другой стороны, при $g = 0$, на основании равенства (4), $((A - iI) f, g_i) = 0$ $(\forall f \in D(A))$, т. е. $g_i \in N_i$. Но тогда

$$\begin{aligned} \| g_i \|^2 &= ((A - iI) h + (i - 1) h, g_i) = (i - 1)(h, g_i) = \\ &= (i - 1)[(h, Ah) - (h, h)]. \end{aligned} \tag{5}$$

А так как $(h, Ah) - (h, h) \geqslant 0$, то равенство (5) возможно лишь при условии $(h, Ah) = (h, h)$. Но тогда, на основании (5), $g_i = 0$, т. е. $\tilde{N}_i = \{0\}$. Аналогично устанавливается, что $\tilde{N}_{-i} = \{0\}$ и, таким образом, дефектные числа оператора S равны нулю. Замыкая (в случае необходимости) оператор S, получим самосопряженный оператор $\bar{S}$, являющийся ограниченным снизу расширением оператора A с той же гранью $c = 1$.

3. Правильные расширения оператора A. Пусть, как и прежде, A — эрмитов оператор в H, удовлетворяющий условию

$$(Af, f) \geqslant c(f, f) \quad (\forall f \in D(A)), \tag{6}$$

а B — произвольный линейный оператор, действующий в H. Многообразие $G_B = \{f \in D(B) \mid (Bf, g) = (f, Bg)\ \forall g \in D(B)\}$ называется *областью эрмитовости* оператора B, а оператор $B_0 = B|_{G_B}$ — эрмитовой частью оператора B. Оператор B называется *правильным расширением* эрмитова оператора A, если $A \subset B_0$ (см. [5, 6]).

Как легко видеть, произвольное самосопряженное расширение оператора A (если оно существует) является правильным расширением этого оператора.

В дальнейшем будем искать правильные расширения B эрмитова оператора A, удовлетворяющие условию

$$\operatorname{Re}(Bf, f) \geqslant a(f, f) \quad (\forall f \in D(B)), \tag{7}$$

где a — фиксированное действительное число. Рассматривая пример из п. 1, нетрудно убедиться, что в случае эрмитовых операторов также не всегда существуют правильные расширения, удовлетворяющие условию (7).

Если B — самосопряженное расширение оператора A, условие (7) перепишется в виде $(Bf, f) \geqslant a(f, f)$ и, таким образом, приходим к задаче, рассмотренной в предыдущих пунктах.

Пусть λ ($\operatorname{Im}\lambda \neq 0$) — фиксированное число. Тогда, на основании леммы, многообразия $D(A)$ и N_λ линейно независимы. Рассмотрим оператор B, определяемый на $D(A) \dotplus N_\lambda$ равенством

$$B(\varphi + g) = A\varphi + Kg \quad (\varphi \in D(A),\ g \in N_\lambda), \tag{8}$$

где $K: N_\lambda \to H$ — некоторый ограниченный оператор. Нетрудно проверить, что определенный так оператор B является правильным расширением оператора A тогда и только тогда, когда оператор K представим в виде

$$Kg = \bar{\lambda}g + Sg \quad (g \in N_\lambda), \tag{9}$$

где $S: N_\lambda \to H \ominus D(A)$. Таким образом, если A — симметрический оператор, то $S = 0$.

В дальнейшем предполагаем, что оператор K из (8) представим в виде (9) (и, таким образом, B — правильное расширение оператора A). Выясним, при каких λ рассматриваемый оператор B удовлетворяет условию (7). Пусть $f=\varphi+g$, где $\varphi\in D(A)$ и $g\in N_\lambda$. Тогда $(Bf, f)=(A\varphi, \varphi)+\lambda(\varphi, g)+\bar{\lambda}(g, \varphi)+\bar{\lambda}(g, g)+(Sg, g)$ и, следовательно, неравенство (7) можно переписать в виде

$$(A\varphi, \varphi)-a(\varphi, \varphi)+2\operatorname{Re}[(\lambda-a)(\varphi, g)]+(\alpha-a)\|g\|^2+ \\ +\operatorname{Re}(Sg, g)\geqslant 0, \tag{10}$$

где $\alpha=\operatorname{Re}\lambda$. А так как $(A\varphi, \varphi)\geqslant c(\varphi, \varphi)$, то неравенство (10) будет выполняться, если

$$(c-a)\|\varphi\|^2+2\operatorname{Re}[(\lambda-a)(\varphi, g)]+(\alpha-a)\|g\|^2+ \\ +\operatorname{Re}(Sg, g)\geqslant 0. \tag{11}$$

При $g=0$ неравенство (11) возможно лишь при условии $c\geqslant a$. Кроме того, учитывая неравенства $\operatorname{Re}[(\lambda-a)(\varphi, g)]\geqslant-|\lambda-a|\,\|\varphi\|\,\|g\|$, $\operatorname{Re}(Sg, g)\geqslant-\|S\|\,\|g\|^2$, приходим к заключению, что неравенство (11) будет выполняться, если $(c-a)\|\varphi\|^2-2|\lambda-a|\,\|\varphi\|\,\|g\|+(\alpha-a-\|S\|)\|g\|^2\geqslant 0$.

А это неравенство (при $\varphi\in D(A)$ и $g\in N_\lambda$) будет выполняться тогда и только тогда, когда $c>a$,

$$\alpha>a+\|S\| \text{ и } |\lambda-a|^2-(c-a)(\alpha-a-\|S\|)\leqslant 0. \tag{12}$$

Пусть $\lambda=\alpha+\beta i$. Тогда неравенство (12) равносильно неравенству

$$\left(\alpha-\frac{c+a}{2}\right)^2+\beta^2\leqslant\left(\frac{c-a}{2}\right)^2-(c-a)\|S\|, \tag{13}$$

откуда, в частности, следует, что при фиксированном $\lambda\,(\operatorname{Im}\lambda\neq 0)$ норма оператора S должна удовлетворять условию

$$\|S\|\leqslant\frac{(c-\alpha)(\alpha-a)-\beta^2}{c-a}. \tag{14}$$

Из (14), в частности, вытекает, что неравенство $\alpha\geqslant c$ также невозможно. Поэтому в дальнейшем предполагаем, что

$$a+\|S\|<\alpha<c. \tag{15}$$

Если же S — фиксированный оператор (отображающий N_λ в $H\ominus D(A)$), а числа $\alpha=\operatorname{Re}\lambda$ и $\beta=\operatorname{Im}\lambda$ удовлетворяют условиям (13) и (15), то оператор B, определяемый равенствами (8) и (9), удовлетворяет условию (7).

В заключение отметим, что на широкий класс правильных расширений симметрических операторов могут быть перенесены и соответствующие результаты М. Г. Крейна о мягких и жестких расширениях, однако этим вопросам будет посвящена отдельная работа.

Список литературы: 1. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966.— 543 с. 2. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральная теория. — М.: Мир, 1966.— Т. 2. 1063 с. 3. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу.— М.: Мир, 1979.— 587 с. 4. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. — М.: Мир, 1978. — Т. 2. 395 с. 5. *Кужель А. В.* Правильные расширения эрмитовых операторов.— Докл. АН СССР, 1980, **251**, № 1, с. 30—33. 6. *Кужель А. В.*, *Руденко Л. И.* Описание правильных расширений эрмитовых операторов. — Функц. анализ и его прил., 1982, **16**, № 1, с. 74—75.

Поступила в редколлегию 06.05.83.