УДК 517.547

И. В. КОВАЛИШИНА

ТЕОРЕМА КАРАТЕОДОРИ — ЖЮЛИА ДЛЯ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

В настоящей работе, по аналогии со скалярным случаем [2, 3], вводится понятие «граничной производной» аналитической сжимающей в единичном круге $|\zeta| < 1$ матрицы-функции $S(\zeta)$ в граничной точке ζ_0 ($|\zeta_0| = 1$). Доказанная здесь для матриц-функций $S(\zeta)$ теорема играет в решении матричной интерполяционной задачи Неванлинны — Пика с узлами интерполяции на границе области ($|\zeta_\kappa| = 1$) такую же роль, как и теорема Каратеодори [2, 3] в соответствующей скалярной задаче.

Будем рассматривать матрицы-функции $S(\zeta)$ аналитические и сжимающие в открытом единичном круге $|\zeta| < 1$ с невырождающейся формой $I - S^*(\zeta) \times S(\zeta) > 0$, $\forall |\zeta| < 1$.

Замечание. Так как для сжимающих матриц-функций $S(\zeta)$ справедливо утверждение [4]:

Если в какой-нибудь точке μ единичного круга $|\mu| < 1$ ранг матрицы $I - S^*(\mu) S(\mu)$ равен κ, то он равен κ в каждой точке единичного круга. Более того, существуют унитарные матрицы U_1 и U_2 такие, что

$$S(\zeta) = U_1 \begin{pmatrix} S_\kappa(\zeta) & 0 \\ 0 & I_{m-\kappa} \end{pmatrix} U_2, \ U_1^* U_1 = I, \ U_2^* U_2 = I;$$

случай вырождения формы $I - S^*(\zeta) S(\zeta)$ сводится к сокращению размерности задачи, т. е. к рассмотрению матриц-функций $S_\kappa(\zeta)$, для которых $I - S_\kappa^*(\zeta) \times S_\kappa(\zeta) > 0$ всюду в $|\zeta| < 1$.

1. Теорема Каратеодори

1.1°. Для сжимающих в $|\zeta|<1$ аналитических матриц-функций $S(\zeta)$ $(I-S^*(\zeta)S(\zeta)\geqslant 0)$ имеет место следующая интегральная формула:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta|=1}\left[\frac{I-S^*(z_1)S(\zeta)}{1-\bar z_1\zeta}\,\frac{I-S^*(\zeta)S(z_2)}{1-\bar\zeta z_2}+S^*(z_1)\frac{I-S(\zeta)S^*(\zeta)}{(1-\bar z_1\zeta)(1-\bar\zeta z_2)}S(z_2)\right]\times$$

$$\times\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{I-S^*(z_1)S(z_2)}{1-\bar z_1 z_2},\ (\forall\,|z_1|<1,\ |z_2|<1), \tag{1}$$

справедливость которой легко проверяется с помощью теоремы о вычетах. В самом деле,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta|=1}\left[\frac{I-S^*(z_1)S(\zeta)}{1-\bar z_1\zeta}\,\frac{I-S^*(\zeta)S(z_2)}{1-\bar\zeta z_2}+S^*(z_1)\frac{I-S(\zeta)S^*(\zeta)}{(1-\bar z_1\zeta)(1-\bar\zeta z_2)}S(z_2)\right]\frac{d\zeta}{\zeta}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta|=1}\Bigg[\underbrace{\frac{I-S^*(z_1)S(\zeta)+S^*(z_1)S(z_2)}{\bar z_1\left(\frac{1}{\bar z_1}-\zeta\right)(\zeta-z_2)}}_{A(\zeta)}-\underbrace{\frac{S^*\left(\frac{1}{\bar\zeta}\right)S(z_2)}{\bar z_1\left(\zeta-\frac{1}{\bar z_1}\right)(\zeta-z_2)}}_{B(\zeta)}\Bigg]d\zeta=$$

$$=\operatorname*{Res}_{\zeta=z_2}A(\zeta)+\operatorname*{Res}_{\zeta=\frac{1}{\bar z_1}}B(\zeta)=\frac{I}{1-\bar z_1 z_2}-\frac{S^*(z_1)S(z_2)}{1-\bar z_1 z_2}=\frac{I-S^*(z_1)S(z_2)}{1-\bar z_1 z_2}.$$

1.2°. **Теорема Каратеодори** [3]. *Пусть f-вектор. Если*

$$\lim_{r\to 1-0}f^*\frac{I-S^*(r)S(r)}{1-r^2}f<\infty, \tag{2}$$

то существуют

$$1.\ \lim_{r\to 1-0}S(r)f=h,\ (f^*f=h^*h),$$

$$2.\ \lim_{r\to 1-0}\frac{f^*f-h^*S(r)f}{1-r},$$

$$3.\ \lim_{r\to 1-0}f^*\frac{I-S^*(r)S(r)}{1-r^2}f$$

и пределы в 2 и 3 равны между собой.

Доказательство теоремы разобьем на несколько пунктов.

1) Пусть вектор f — фиксирован. Из условия теоремы вытекает, что существует последовательность $r_\nu\to 1-0$ такая, что существует и конечен

$$\lim_{r_\nu\to 1-0}f^*\frac{I-S^*(r_\nu)S(r_\nu)}{1-r_\nu^2}f.$$

Но тогда на подпоследовательности $r_{\nu_k}\to 1-0$ существует и

$$\lim_{r_{\nu_k}\to 1-0}S(r_{\nu_k})f=h\ \ (f^*f=h^*h).$$

Далее, рассмотрим равенство (1) в точках $z_1 = z_2 = r_{\nu_k}$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{I-S^*(r_{\nu_k})\,S(e^{i\theta})}{1-r_{\nu_k}e^{i\theta}}\,\frac{I-S^*(e^{i\theta})\,S(r_{\nu_k})}{1-r_{\nu_k}e^{-i\theta}}+\right.$$

$$\left.+\,S^*(r_{\nu_k})\,\frac{I-S(e^{i\theta})\,S^*(e^{i\theta})}{|1-r_{\nu_k}e^{i\theta}|^2}\,S(r_{\nu_k})\right]d\theta=\frac{I-S^*(r_{\nu_k})\,S(r_{\nu_k})}{1-r_{\nu_k}^2},$$

из которого, в силу леммы Фату, вытекает, что существует

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lim_{r_{\nu_k}\to 1-0} f^*\left[\frac{I-S^*(r_{\nu_k})\,S(e^{i\theta})}{1-r_{\nu_k}e^{i\theta}}\,\frac{I-S^*(e^{i\theta})\,S(r_{\nu_k})}{1-r_{\nu_k}e^{-i\theta}}+\right.$$

$$\left.+\,S^*(r_{\nu_k})\,\frac{I-S(e^{i\theta})\,S^*(e^{i\theta})}{|1-r_{\nu_k}e^{i\theta}|^2}\,S(r_{\nu_k})\right]f\,d\theta<\infty,$$

т. е.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{f^*-h^*S(e^{i\theta})}{1-e^{i\theta}}\,\frac{f-S^*(e^{i\theta})\,h}{1-e^{-i\theta}}+h^*\,\frac{I-S(e^{i\theta})\,S^*(e^{i\theta})}{|1-e^{i\theta}|^2}\,h\right]d\theta<\infty. \tag{3}$$

Замечание. Так как каждое слагаемое подынтегральной функции неотрицательно, то из (3) вытекают соотношения

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f^*-h^*S(e^{i\theta})}{1-e^{i\theta}}\,\frac{f-S^*(e^{i\theta})\,h}{1-e^{-i\theta}}\,d\theta<\infty, \tag{4}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h^*\,\frac{I-S(e^{i\theta})\,S^*(e^{i\theta})}{|1-e^{i\theta}|^2}\,h\,d\theta>\infty. \tag{5}$$

В частности, если $S(\zeta)$ почти всюду на единичной окружности имеет унитарные значения, то второе слагаемое в (3) отсутствует.

2) Покажем теперь, что существует

$$\lim_{r\to 1-0} S(r)\,f=h. \tag{6}$$

С этой целью рассмотрим для матрицы-функции $S(\zeta)$ в точке $\zeta=r\,(0<r<1)$ представление в виде интеграла Пуассона

$$S(r)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S(e^{i\theta})\,\frac{1-r^2}{|1-re^{i\theta}|^2}\,d\theta \tag{7}$$

и составим разность

$$h-S(r)\,f=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[h-S(e^{i\theta})\,f]\,\frac{1-r^2}{|1-re^{i\theta}|^2}\,d\theta. \tag{8}$$

Пусть f и h — известные ранее векторы, а g — произвольный нормированный вектор ($g^*g = \| g \|^2 = 1$). Рассмотрим скалярное произведение

$$|g^*[h - S(r)f]| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g^*[h - S(e^{i\theta})f]| \frac{1-r^2}{|1-re^{i\theta}|^2}\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (g^*g)\frac{1-r^2}{|1-re^{i\theta}|^2}\, d\theta\right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{h^* - f^*S^*(e^{i\theta})}{1-e^{-i\theta}}\,\frac{h - S(e^{i\theta})f}{1-e^{i\theta}}\,\frac{1-r^2}{|1-re^{i\theta}|^2}\cdot |1-e^{i\theta}|^2\, d\theta\right\}^{1/2} =$$

$$= \sqrt{1-r^2}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{h^* - f^*S^*(e^{i\theta})}{1-e^{-i\theta}}\,\frac{h - S(e^{i\theta})f}{1-e^{i\theta}}\left|\frac{1-e^{i\theta}}{e^{i\theta}-r}\right|^2 d\theta\right\}^{1/2}.$$

Из этого неравенства, в силу очевидного соотношения

$$|e^{i\theta} - r| \geqslant \frac{1}{2}|1 - e^{i\theta}|, \tag{9}$$

вытекает

$$|g^*[h - S(r)f]| \leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt{1-r^2}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{h^* - f^*S^*(e^{i\theta})}{1-e^{-i\theta}}\,\frac{h - S(e^{i\theta})f}{1-e^{i\theta}}\, d\theta\right\}^{1/2}. \tag{10}$$

Из легко проверяемой (см. (3)) суммируемости функции

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{h^* - f^*S^*(e^{i\theta})}{1-e^{-i\theta}}\,\frac{h - S(e^{i\theta})f}{1-e^{i\theta}}\, d\theta < \infty \tag{11}$$

и произвольности g, из (10) следует, что

$$\| h - S(r)f \| \leqslant 2\sqrt{1-r^2}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{h^* - f^*S^*(e^{i\theta})}{1-e^{i\theta}}\,\frac{h - S(e^{i\theta})f}{1-e^{i\theta}}\, d\theta\right\}^{1/2}. \tag{12}$$

Но тогда $\| h - S(r)f \| \to 0$ при $r \to 1-0$, т. е.

$$\lim_{r\to 1-0} S(r)f = h.$$

3. Покажем теперь, что существует

$$\lim_{r\to 1-0}\frac{f^*f - h^*S(r)f}{1-r} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{f^* - h^*S(e^{i\theta})}{1-e^{i\theta}}\,\frac{f - S^*(e^{i\theta})h}{1-e^{-i\theta}} + h^*\frac{I - S(e^{i\theta})S^*(e^{i\theta})}{|1-e^{i\theta}|^2}h\right] d\theta. \tag{13}$$

С этой целью сначала убедимся в том, что для любых $0 < r < 1$ и $g\,(g^*g = 1)$ и известных ранее f и h справедливо равенство

$$\frac{[f^* - h^*S(r)]\,g}{1-r} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{f^* - h^*S(e^{i\theta})}{1-e^{i\theta}}\,\frac{I - S^*(e^{i\theta})\,S(r)}{1 - re^{-i\theta}}\,g + \right.$$
$$\left. + h^*\frac{I - S(e^{i\theta})\,S^*(e^{i\theta})}{(1-e^{i\theta})\,(1-re^{-i\theta})}\,S(r)\,g\right]d\theta. \quad (14)$$

В самом деле, рассмотрим равенство (1) в точках $z_1 = \rho_k\,(\forall 0 < \rho_k < 1)$, $z_2 = r$ на векторах f, g

$$f^*\frac{I - S^*(\rho_k)\,S(r)}{1-\rho_k r}\,g = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f^*\frac{I - S^*(\rho_k)\,S(e^{i\theta})}{1-\rho_k e^{i\theta}}\,\frac{I - S^*(e^{i\theta})\,S(r)}{1-re^{-i\theta}}\,g + \right.$$
$$\left. + f^*S^*(\rho_k)\frac{I - S(e^{i\theta})\,S^*(e^{i\theta})}{(1-\rho_k e^{i\theta})\,(1-re^{-i\theta})}\,S(r)\,g\right]d\theta \quad (15)$$

и при $\rho_k \to 1-0$ оценим разность

$$\left| f^*\frac{I - S^*(\rho_k)\,S(r)}{1-\rho_k r}\,g - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{f^* - h^*S(e^{i\theta})}{1-e^{i\theta}}\,\frac{I - S^*(e^{i\theta})\,S(r)}{1-re^{-i\theta}}\,g + \right.\right.$$
$$\left.\left. + h^*\frac{I - S(e^{i\theta})\,S^*(e^{i\theta})}{(1-e^{i\theta})\,(1-re^{-i\theta})}\,S(r)\,g\right]\frac{1-e^{i\theta}}{1-\rho_k e^{i\theta}}\,d\theta\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{h^* - f^*S^*(\rho_k)}{1-\rho_k e^{i\theta}}\,\times\right.$$
$$\left.\times\,\frac{S(e^{i\theta}) - S(r)}{1-re^{-i\theta}}\,g\,d\theta\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{h^* - f^*S^*(\rho_k)}{1-\rho_k e^{i\theta}}\,\frac{S(e^{i\theta}) - S(r)}{1-re^{-i\theta}}\,g\right|d\theta \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\|\frac{h - S(\rho_k)\,f}{1-\rho_k e^{i\theta}}\right\|\left\|\frac{S(e^{i\theta}) - S(r)}{1-re^{-i\theta}}\,g\right\|d\theta. \quad (16)$$

Рассматривая последний интеграл, используем следующие оценки норм:

1. $\left\|\dfrac{S(e^{i\theta}) - S(r)}{1-re^{-i\theta}}\,g\right\| \leqslant \left\|\dfrac{S(e^{i\theta}) - S(r)}{1-re^{-i\theta}}\right\|\,\|g\| \leqslant \dfrac{2}{1-r}$;

2. $\left\|\dfrac{h - S(\rho_k)\,f}{1-\rho_k e^{i\theta}}\right\| \leqslant 2K\dfrac{\sqrt{1-\rho_k^2}}{|1-\rho_k e^{i\theta}|}$.

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\|\frac{h - S(\rho_k)\,f}{1-\rho_k e^{i\theta}}\right\|\left\|\frac{S(e^{i\theta}) - S(r)}{1-re^{-i\theta}}\,g\right\|d\theta \leqslant \frac{4K}{1-r}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sqrt{1-\rho_k^2}}{|1-\rho_k e^{i\theta}|}\,d\theta =$$

$$= \frac{4K}{1-r}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\theta|\leqslant\varepsilon} 1\,\frac{\sqrt{1-\rho_k^2}}{|1-\rho_k e^{i\theta}|}\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\theta|>\varepsilon}\frac{\sqrt{1-\rho_k^2}}{|1-\rho_k e^{i\theta}|}\,d\theta\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4K}{1-r}\left[\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} 1^2\,d\theta\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{1-\rho_k^2}{|1-\rho_k e^{i\theta}|^2}\,d\theta\right)^{1/2} +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\theta|>\varepsilon}\frac{\sqrt{1-\rho_k^2}}{|1-\rho_k e^{i\theta}|}\,d\theta\right] \leqslant \frac{4K}{1-r}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\rho_k^2}{|1-\rho_k e^{i\theta}|}\,d\theta\right)^{1/2} +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\theta|>\varepsilon}\frac{\sqrt{1-\rho_k^2}}{|1-\rho_k e^{i\theta}|}\,d\theta\right) = \frac{4K}{1-r}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\theta|>\varepsilon}\frac{\sqrt{1-\rho_k^2}}{|1-\rho_k e^{i\theta}|}\,d\theta\right) \times$$

$$\times (\forall\varepsilon > 0) \tag{17}$$

Наконец, выберем N_ε так, чтобы для $k \geqslant N_\varepsilon$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\theta|>\varepsilon}\frac{\sqrt{1-\rho_k^2}}{|1-\rho_k e^{i\theta}|}\,d\theta < \varepsilon. \tag{18}$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$\left| f^*\frac{I-S^*(\rho_k)\,S(r)}{1-\rho_k r}\,g - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{f^*-h^*S(e^{i\theta})}{1-e^{i\theta}}\;\frac{I-S^*(e^{i\theta})\,S(r)}{1-re^{-i\theta}}\,g +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,h^*\frac{I-S(e^{i\theta})\,S^*(e^{i\theta})}{(1-e^{i\theta})\,(1-re^{-i\theta})}\,S(r)\,g\right]\frac{1-e^{i\theta}}{1-\rho_k e^{i\theta}}\,d\theta\right| \leqslant \frac{4K}{1-r}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}}+\varepsilon\right),$$

$$k \geqslant N_\varepsilon,\ \forall\varepsilon > 0, \tag{19}$$

из которого усматривается, что

$$\frac{[f^*-h^*S(r)\,]\,g}{1-r} = \lim_{\rho_k\to 1-0} f\,\frac{I-S^*(\rho_k)\,S(r)}{1-\rho_k r}\,g =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{f^*-h^*S(e^{i\theta})}{1-e^{i\theta}}\,\frac{I-S^*(e^{i\theta})\,S(r)}{1-re^{-i\theta}}g + h^*\frac{I-S(e^{i\theta})\,S^*(e^{i\theta})}{(1-e^{i\theta})\,(1-re^{-i\theta})}S(r)g\right]d\theta. \tag{20}$$

Наконец, покажем, что существует

$$\lim_{r\to 1-0}\frac{f^*f-h^*S(r)\,f}{1-r}$$

и справедливо равенство

$$\lim_{r\to 1-0}\frac{f^*f-h^*S(r)f}{1-r}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{f^*-h^*S(e^{i\theta})}{1-e^{i\theta}}\,\frac{f-S^*(e^{i\theta})h}{1-e^{-i\theta}}+\right.$$

$$\left.+h^*\frac{I-S(e^{i\theta})S^*(e^{i\theta})}{|1-e^{i\theta}|^2}h\right]d\theta. \tag{21}$$

Для этого, как и при выводе равенства (14), оценим при $r\to 1-0$ разность

$$\left|\frac{f^*f-h^*S(r)f}{1-r}-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f^*-h^*S(e^{i\theta})}{1-e^{i\theta}}\,\frac{f-S^*(e^{i\theta})h}{1-e^{-i\theta}}+\right.$$

$$\left.+h^*\frac{I-S(e^{i\theta})S^*(e^{i\theta})}{|1-e^{i\theta}|^2}h\right]\frac{1-e^{-i\theta}}{1-re^{-i\theta}}\,d\theta\Bigg|=$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{f^*-h^*S(e^{i\theta})}{1-e^{i\theta}}\,\frac{I-S^*(e^{i\theta})S(r)}{1-re^{-i\theta}}f+h^*\frac{I-S(e^{i\theta})S^*(e^{i\theta})}{(1-e^{i\theta})(1-re^{-i\theta})}S(r)f\right]\times\right.$$

$$\times\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f^*-h^*S(e^{i\theta})}{1-e^{i\theta}}\,\frac{f-S^*(e^{i\theta})h}{1-e^{-i\theta}}+h^*\frac{I-S(e^{i\theta})S^*(e^{i\theta})}{|1-e^{i\theta}|^2}h\Bigg]\times$$

$$\left.\times\frac{1-e^{-i\theta}}{1-re^{-i\theta}}\,d\theta\right|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{h^*-f^*S^*(e^{i\theta})}{1-e^{i\theta}}\,\frac{S(r)f-h}{1-re^{-i\theta}}\,d\theta\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\|\frac{h^*-f^*S^*(e^{i\theta})}{1-e^{i\theta}}\right\|\left\|\frac{S(r)f-h}{1-re^{-i\theta}}\right\|d\theta. \tag{22}$$

Для оценки последнего интеграла воспользуемся следующими соображениями:

1) Так как

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{h^*-f^*S^*(e^{i\theta})}{1-e^{i\theta}}\,\frac{h-S(e^{i\theta})f}{1-e^{-i\theta}}\,d\theta<\infty,$$

то для $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{h^*-f^*S^*(e^{i\theta})}{1-e^{i\theta}}\,\frac{h-S(e^{i\theta})f}{1-e^{-i\theta}}\,d\theta<\varepsilon^2; \tag{23}$$

2) $$\left\|\frac{S(r)f-h}{1-re^{-i\theta}}\right\|\leqslant 2K\frac{\sqrt{1-r^2}}{|1-re^{-i\theta}|}\ \text{(см. (12))}, \tag{24}$$

а для $|\theta|>\delta$

$$\left\|\frac{S(r)f-h}{1-re^{-i\theta}}\right\|\leqslant 2K\frac{\sqrt{1-r^2}}{\delta}. \tag{25}$$

Теперь

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\|\frac{h^*-f^*S^*(e^{i\theta})}{1-e^{i\theta}}\right\|\left\|\frac{S(r)f-h}{1-re^{-i\theta}}\right\|d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta|\leqslant\delta}\left\|\frac{h^*-f^*S^*(e^{i\theta})}{1-e^{i\theta}}\right\|\times$$
$$\times\left\|\frac{S(r)f-h}{1-re^{-i\theta}}\right\|d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta|>\delta}\left\|\frac{h^*-f^*S^*(e^{i\theta})}{1-e^{i\theta}}\right\|\left\|\frac{S(r)f-h}{1-re^{-i\theta}}\right\|d\theta\leqslant$$
$$\leqslant\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{h^*-f^*S^*(e^{i\theta})}{1-e^{i\theta}}\,\frac{h-S(e^{i\theta})f}{1-e^{-i\theta}}d\theta\right\}^{1/2}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}4K^2\frac{1-r^2}{|1-re^{-i\theta}|^2}d\theta\right\}^{1/2}+$$
$$+2K\frac{\sqrt{1-r^2}}{\delta}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta|>\delta}\frac{h^*-f^*S^*(e^{i\theta})}{1-e^{i\theta}}\,\frac{h-S(e^{i\theta})f}{1-e^{-i\theta}}d\theta\right\}^{1/2}<$$
$$<\varepsilon 2K+2K^2\frac{\sqrt{1-r^2}}{\delta}. \tag{26}$$

Из неравенства (22) и неравенства (26) и вытекает существование

$$\lim_{r\to 1-0}\frac{f^*f-h^*S(r)f}{1-r}$$

и равенство (21).

3) Существование предела

$$\lim_{r\to 1-0}f^*\frac{I-S^*(r)S(r)}{1-r^2}f$$

и равенство

$$\lim_{r\to 1-0}f^*\frac{I-S^*(r)S(r)}{1-r^2}f=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{f^*-h^*S(e^{i\theta})}{1-e^{i\theta}}\,\frac{f-S^*(e^{i\theta})h}{1-e^{-i\theta}}+\right.$$
$$\left.+h^*\frac{I-S(e^{i\theta})S^*(e^{i\theta})}{|1-e^{i\theta}|^2}h\right]d\theta. \tag{27}$$

доказывается аналогично. Теорема доказана полностью.

Замечание 1. Так как из равенств

$$\lim_{r\to 1-0}S(r)f_1=h_1,\quad \lim_{r\to 1-0}S(r)f_2=h_2$$

вытекает существование предела

$$\lim_{r\to 1-0}S(r)f=h,$$

где $f=\alpha f_1+\beta f_2$, $h=\alpha h_1+\beta h_2$, то совокупность векторов $\{f_k\}$, для которых существуют

$$\lim_{r\to 1-0}S(r)f_k=h_k,\quad (f_k^*f_k=h_k^*h_k),\quad \lim_{r\to 1-0}f_k^*\frac{I-S^*(r)S(r)}{1-r^2}f_k=$$
$$=\lim_{r\to 1-0}\frac{f_k^*f_k-h_k^*S(r)f_k}{1-r},$$

образуют линейное подпространство пространства m-мерных векторов-столбцов.

Если размерность этого подпространства равна m, то можно говорить о пределах матриц

$$\lim_{r\to 1-0} S(r) = S_0, \quad S_0^* S_0 = I,$$

$$\lim_{r\to 1-0} \frac{I - S_0^* S(r)}{1-r} = \lim_{r\to 1-0} \frac{I - S^*(r)\, S(r)}{1-r^2} = \Lambda \geqslant 0,$$

$$\Lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{I - S_0^* S(e^{i\theta})}{1-e^{i\theta}} \, \frac{I - S^*(e^{i\theta})\, S_0}{1-e^{-i\theta}} + S_0^* \frac{I - S(e^{i\theta})\, S^*(e^{i\theta})}{|1-e^{i\theta}|^2} S_0 \right] d\theta.$$

Замечание 2. Все приведенные рассуждения и доказательства остаются в силе и для случая любой точки $\zeta_0 = e^{i\alpha_0}$ единичной окружности (вместо точки $\zeta_0 = 1$) и для любого углового предела:

$$\lim_{z\to\zeta_0} S(z)\, f = h, \quad (f^* f = h^* h),$$

$$\lim_{z\to\zeta_0} f^* \frac{I - S^*(z)\, S(z)}{1 - \bar{z} z} f = \lim_{z\to\zeta_0} \frac{f^* f - h^* S(z)\, f}{1 - \bar{\zeta}_0 z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{f^* - h^* S(e^{i\theta})}{1-e^{i\theta}} \, \frac{f - S^*(e^{i\theta})\, h}{1-e^{-i\theta}} + h^* \frac{I - S(e^{i\theta})\, S^*(e^{i\theta})}{|1-e^{i\theta}|^2} h \right] d\theta.$$

2. Лемма Жюлиа

Если для сжимающей в $|\zeta| < 1$ матрицы-функции $S(\zeta)$ существует конечный угловой предел

$$\lim_{z\to\zeta_0} f^* \frac{I - S^*(z)\, S(z)}{1 - \bar{z} z} f = f^* \Lambda f$$

($f^*\Lambda f \geqslant 0$, *f — фиксированный вектор), то для любого вектора g и для любой точки ζ ($|\zeta| < 1$) справедливо неравенство*

$$\begin{bmatrix} f^*\Lambda f & \dfrac{f^* g - h^* S(\zeta)\, g}{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta} \\ \dfrac{g^* f - g^* S^*(\zeta)\, h}{1 - \bar{\zeta}\zeta_0} & g^* \dfrac{I - S^*(\zeta)\, S(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}\zeta} g \end{bmatrix} \geqslant 0 \qquad (28)$$

где $h = \lim\limits_{z\to\zeta_0} S(z)\, f \quad (f^* f = h^* h)$.

В самом деле, рассматривая неравенство Шварца—Пика для $S(\zeta)$ в точках z, ζ ($|z| < 1$, $|\zeta| < 1$),

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \dfrac{I - S^*(z)\, S(z)}{1 - \bar{z} z} & \dfrac{I - S^*(z)\, S(\zeta)}{1 - \bar{z}\zeta} \\ \dfrac{I - S^*(\zeta)\, S(z)}{1 - \bar{\zeta} z} & \dfrac{I - S^*(\zeta)\, S(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}\zeta} \end{bmatrix} \geqslant 0$$

и переходя в неравенстве

$$\begin{bmatrix} f^* & 0 \\ 0 & g^* \end{bmatrix} \boldsymbol{H} \begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix} \geqslant 0$$

к пределу при $z \to \zeta_0$ по любому некасательному пути, приходим к неравенству (28).

Замечание 1. Если

$$\lim_{z \to \zeta_0} f^* \frac{I - S^*(z) S(z)}{1 - \bar{z}z} f = f^* \Lambda f = 0, \; f \neq 0, \tag{29}$$

то внутри единичного круга $|\zeta| < 1$ форма $I - S(\zeta) S^*(\zeta)$ вырождается, т. е. существует вектор $\hat{f} \neq 0$ такой, что $\hat{f}^* [I - S(\zeta) \times$

$$\times S^*(\zeta)] \hat{f} = 0 \; (\forall \zeta : |\zeta| < 1).$$

В самом деле, из неравенства (28) и условия (29) вытекает равенство $g^* [f - S^*(\zeta) h] = 0$ для $\forall g \neq 0$, $\forall |\zeta| < 1$, откуда $f = S^*(\zeta) h$ $(f^*f = h^*h)$. Но тогда $f^*f = h^* S(\zeta) S^*(\zeta) h$, и значит $h^* [I - S(\zeta) S^*(\zeta)] h = 0$, что и требовалось.

Замечание 2. Если существует конечный угловой предел

$$\lim_{z \to \zeta_0} f^* \frac{I - S^*(z) S(z)}{1 - \bar{z}z} f = f^* \Lambda f$$

для любого вектора $f \neq 0$, то существуют угловые пределы матриц

$$\lim_{z \to \zeta_0} \frac{I - S^*(z) S(z)}{1 - \bar{z}z} = \Lambda, \; (\Lambda \geqslant 0),$$

$$\lim_{z \to \zeta_0} S(z) = S_0, \; (S_0^* S_0 = I),$$

$$\lim_{z \to \zeta_0} \frac{I - S_0^* S(z)}{1 - \bar{\zeta}_0 z} = \Lambda$$

и неравенство Жюлиа может быть записано в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \Lambda & \dfrac{I - S_0^* S(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta} \\ \dfrac{I - S^*(\zeta) S_0}{1 - \bar{\zeta}\zeta_0} & \dfrac{I - S^*(\zeta) S(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}\zeta} \end{bmatrix} \geqslant 0. \tag{30}$$

При этом мы вправе считать, что $\Lambda > 0$, так как в соответствии с замечанием 1 вырождение $\Lambda \geqslant 0$ влечет за собой вырождение формы $I - S(\zeta) S^*(\zeta) \geqslant 0$, что противоречит нашему соглашению о том, что $I - S(\zeta) S^*(\zeta) > 0$ $(I - S^*(\zeta) S(\zeta) > 0)$ $\forall |\zeta| < 1$.

Замечание 3. Если матрица-функция $S(\zeta)$ $(|\zeta| < 1)$ удовлетворяет неравенству Жюлиа (30), то

1) справедливо неравенство

$$0 \leqslant \frac{(1-|\zeta|^2)^2}{4|1-\bar{\zeta}_0\zeta|^2}\,\frac{I-S^*(\zeta)S(\zeta)}{1-\bar{\zeta}\zeta} \leqslant \Lambda;$$

2) существует конечный угловой предел

$$\lim_{\zeta\to\zeta_0} f^*\frac{I-S^*(\zeta)S(\zeta)}{1-\bar{\zeta}\zeta}f = f^*Mf,\ \ \forall f\neq 0,\ \ M\geqslant 0;$$

3) существует

$$\lim_{\zeta\to\zeta_0} S(\zeta)f = S_0 f,\quad S_0^*S_0 = I;$$

4) существует

$$\lim_{\zeta\to\zeta^0} f^*\frac{I-S_0^*S(\zeta)}{1-\bar{\zeta}_0\zeta}f = f^*Mf;$$

5) $$f^*Mf \leqslant f^*\Lambda f.$$

Действительно, матрица-функция $S(\zeta)$, удовлетворяющая неравенству Жюлиа, является сжимающей в единичном круге $|\zeta|<1$, и мы, не ограничивая общности, можем считать, что форма $I-S^*(\zeta)S(\zeta)>0$ строго положительна.

Третье условие леммы о неотрицательной блок-матрице сейчас имеет вид

$$\Lambda \geqslant \frac{I-S_0^*S(\zeta)}{1-\bar{\zeta}_0\zeta}\left(\frac{I-S^*(\zeta)S(\zeta)}{1-\bar{\zeta}\zeta}\right)^{-1}\frac{I-S^*(\zeta)S_0}{1-\bar{\zeta}\zeta_0}. \tag{31}$$

Продолжая его с использованием матричного неравенства

$$4(I-S_0^*S(\zeta))(I-S^*(\zeta)S(\zeta))^{-1}(I-S^*(\zeta)S_0) \geqslant I-S^*(\zeta)S(\zeta) \tag{32}$$

(оно будет доказано ниже), получаем

$$\Lambda \geqslant \frac{I-S_0^*S(\zeta)}{1-\bar{\zeta}_0\zeta}\left(\frac{I-S^*(\zeta)S(\zeta)}{1-\bar{\zeta}\zeta}\right)^{-1}\frac{I-S^*(\zeta)S_0}{1-\bar{\zeta}\zeta_0} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\bar{\zeta}_0\zeta|}\right)^2\frac{I-S^*(\zeta)S(\zeta)}{1-\bar{\zeta}\zeta}. \tag{33}$$

Из неравенства

$$0 \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\bar{\zeta}_0\zeta|}\right)^2\frac{I-S^*(\zeta)S(\zeta)}{1-\bar{\zeta}\zeta} \leqslant \Lambda \tag{34}$$

заключаем, что для $\forall f\neq 0$ квадратичная форма

$$f^*\frac{I-S^*(\zeta)S(\zeta)}{1-\bar{\zeta}\zeta}f$$

ограничена при $\zeta\to\zeta_0$:

$$0 \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\bar{\zeta}_0\zeta|}\right)^2 f^*\frac{I-S^*(\zeta)S(\zeta)}{1-\bar{\zeta}\zeta}f \leqslant f^*\Lambda f$$

и тогда по теореме Каратеодори

существует конечный предел

$$\lim_{\zeta\to\zeta_0} f^* \frac{I - S^*(\zeta)\, S(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}\zeta} f = f^* M f \leqslant f^* \Lambda f;$$

существует

$$\lim_{\zeta\to\zeta_0} S(\zeta) f = \hat{S}_0 f, \quad \forall f \neq 0, \; \hat{S}_0^* \hat{S}_0 = I.$$

Записывая далее третье условие леммы о неотрицательной блок-матрице для матричного неравенства

$$\begin{bmatrix} f^* \Lambda f & f^* \dfrac{I - S_0^* S(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta} f \\ f^* \dfrac{I - S^*(\zeta)\, S_0}{1 - \bar{\zeta}\zeta_0} f & f^* \dfrac{I - S^*(\zeta)\, S(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}\zeta} f \end{bmatrix} \geqslant 0 \ (\forall f),$$

$$f^* \frac{I - S^*(\zeta)\, S(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}\zeta} f - f^* \frac{I - S^*(\zeta)\, S_0}{1 - \bar{\zeta}\zeta_0} f\, (f^* \Lambda f)^{-1} f^* \frac{I - S_0^* S(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta} f \geqslant 0, \tag{35}$$

убеждаемся в существовании конечного предела

$$\lim_{\zeta\to\zeta_0} f^* \frac{I - S_0^* S(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta} f,$$

что возможно лишь в том случае, когда

$$\lim_{\zeta\to\zeta_0} S(\zeta) f = S_0 f, \tag{36}$$

т. е. для любого $f \neq 0$ $S_0 f = \hat{S}_0 f$ и значит $\hat{S}_0 f = S_0 f$, $\hat{S}_0 = S_0$.

Для завершения рассуждений этого параграфа остается проверить, что неравенство (32) действительно имеет место.

В самом деле, неравенство (32) является следствием тождества

$$\begin{gathered} 4\,[I - S_0^* S(\zeta)]\,[I - S^*(\zeta)\, S(\zeta)]^{-1}\,[I - S^*(\zeta)\, S_0] - [I - S^*(\zeta)\, S(\zeta)] = \\ = [I - 2S_0^* S(\zeta) + S^*(\zeta)\, S(\zeta)]\,[I - S^*(\zeta)\, S(\zeta)]^{-1}\,[I - 2S^*(\zeta)\, S_0 + \\ + S^*(\zeta)\, S(\zeta)] + 2\,[I - S^*(\zeta)\, S_0]\,[I - S_0^* S(\zeta)]. \end{gathered} \tag{37}$$

Последнее же может быть проверено, например, так: для упрощения записи обозначим $S_0^* S(\zeta) = w$ $(S_0^* S_0 = I,\ I - w^* w > 0)$ и рассмотрим разность $4\,(I - w)\,(I - w^* w)^{-1}\,(I - w^*) - (I - w^* w) =$ $= 4\,(I - w)\,(I - w^* w)^{-1}\,(I - w^*) - [(I - w) + (I - w^*) - (I - w^*) \times$ $\times (I - w)] = (I - w^*)\,(I - w) + 2\,(I - w)\,(I - w^* w)^{-1}\,(I - w^*) +$ $+ [(I - w)\,(I - w^* w)^{-1}\,(I - w^*) - (I - w)] + [(I - w)\,(I - w^* w)^{-1} \times$ $\times (I - w^*) - (I - w^*)] = (I - w^*)\,(I - w) + [(I - w)\,(I - w^* w)^{-1} \times$ $\times (I - w^*) - (I - w)\,(I - w^* w)^{-1}\, w^*\,(I - w) - (I - w^*)\, w\,(I - w^* w)^{-1} \times$ $\times (I - w^*) + (I - w^*)\, w\,(I - w^* w)^{-1}\, w^*\,(I - w)] + [(I - w)\,(I - w^* w)^{-1} \times$ $\times (I - w^*) - (I - w^*)\, w\,(I - w^* w)^{-1}\, w^*\,(I - w)] = (I - w^*)\,(I - w) +$

$$+ (I - 2w + w^*w)(I - w^*w)^{-1}(I - 2w^* + w^*w) + [(I-w)(I-w^*w)^{-1} \times$$
$$\times (I - w^*) - (I - w^*) w (I - w^*w)^{-1} w^* (I - w)] = (I - w^*)(I-w) +$$
$$+ (I - 2w + w^*w)(I-w^*w)^{-1}(I - 2w^* + w^*w) + (I - w^*)(I - w).$$

Замечание 4. Для того чтобы матрица-функция $S(\zeta)$, удовлетворяющая неравенству Жюлиа, обладала тем свойством, что угловой предел

$$\lim_{\zeta \to \zeta_0} f^* \frac{I - S^*(\zeta) S(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}\zeta} f = f^* M f \quad (\forall f \neq 0)$$

достигает наибольшего значения $M = \Lambda$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\zeta \to \zeta_0} f^* \left[\frac{I - S^*(\zeta) S(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}\zeta} - \frac{I - S^*(\zeta) S_0}{1 - \bar{\zeta}\zeta_0} \Lambda^{-1} \frac{I - S_0^* S(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta} \right] f = 0.$$

Определение. *Если для любого $f \neq 0$ выполняется равенство*

$$\lim_{\zeta \to \zeta_0} f^* \frac{I - S_0^* S(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta} f = f^* M f \quad (M > 0),$$

то матрицу M будем называть «граничной производной» сжимающей матрицы-функции $S(\zeta)$ в точке ζ_0 $(|\zeta_0| = 1)$.

Список литературы: 1. *Julia G.* Extension d'un lemme de Schwarz, Acta math, 1920, **42**, p. 9—15. 2. *Caratheodory C.* Über die Winkelderivierten von beschränkten analytischen Funktionen, Sitz. der prenss. Akad, 1929, B. 32, S.3—8. 3. *Nenanlinna R.* Über beschränkte analytische Funktionen, Ann, Acad. Sci. Fennicae, 1929, A. 32, S. 11—16. 4. *Потапов В. П.* Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1955, **4**, с. 125—236 5. *Ефимов А. В., Потапов В. П.* J-растягивающие матрицы-функции и их роль в теории электрических цепей.— Усп. мат. наук, 1973, вып. 1 (169), с. 65—130. 6. *Ковалишина И. В.* О «граничной производной» аналитической сжимающей в круге матрицы-функции.— Рукопись деп. в ВИНИТИ 20.05.83, № 2709.

Поступила в редколлегию 16.12.82.