УДК 517.5

В. Э. КАЦНЕЛЬСОН

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭРМИТОВО ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЯДЕР СМЕШАННОГО ТИПА И ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА НЕХАРИ. 1

1°. Настоящая работа является развитием работы [1]. Мы занимаемся задачей об интегральном представлении эрмитово положительных (э. п.) ядер, непрерывных и дискретных, смешанного, теплице-ганкелевого типа. Речь идет (в континуальном случае) о ядрах вида

$$K(x, y)=\begin{bmatrix} T_1(x-y) & H(x+y) \\ H^*(x+y) & T_2(x-y) \end{bmatrix} \ (x, y \text{ — вещественны}), \qquad (1.1)$$

где T_1, T_2 — квадратные ($p \times p$ и $q \times q$), а H — прямоугольная ($p \times q$) матрицы-функции. Ядро (1.1) рассматриваем как на конечном ($0 \leqslant x, y \leqslant l$, $l < \infty$) промежутке (в этом случае $T_1(\xi)$, $T_2(\xi)$ — заданные на $[-l, l]$, а $H(\xi)$ — на $[0, 2l]$), так и на полубесконечном ($0 \leqslant x, y < \infty$) промежутке (в этом случае функции $T_1(\xi)$, $T_2(\xi)$ должны быть заданы на всей вещественной оси, а $H(\xi)$ — на положительной полуоси). Пусть

$$u(x, \lambda)=\exp\{-ix\lambda\Omega\}, \qquad (1.2)$$

$$\text{где } \Omega=\begin{bmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{bmatrix}. \qquad (1.3)$$

Мы докажем, что как для конечного, так и для полубесконечного промежутка непрерывное э. п. ядро вида (1.1) имеет интегральное представление

$$K(x, y)=\int_{-\infty}^{\infty} u(x, \lambda)\, d\Sigma(\lambda)\, u^*(y, \lambda), \qquad (1.4)$$

где блок-матричная мера $d\Sigma(\lambda)$ удовлетворяет условиям

$$d\Sigma(\lambda)=\|d\sigma_{m, n}\|_{1 \leqslant m, n \leqslant 2} \geqslant 0 \quad (1.5); \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sp} d\Sigma(\lambda) < \infty. \qquad (1.6)$$

Будет дано описание представляющих ядро K мер $d\Sigma$. Аналогично, в дискретном случае изучаются ядра

$$K(j, k)=\begin{bmatrix} T_1(j-k) & H(j+k) \\ H^*(j+k) & T_2(j-k) \end{bmatrix} \quad (j, k \text{ — целые}) \qquad (1.7)$$

э. п. как на конечном ($0 \leqslant j,\ k \leqslant N,\ N < \infty$) промежутке (в этом случае $T_1(m)$, $T_2(m)$ заданы при $-N \leqslant m \leqslant N$, а $H(m)$ — при $0 \leqslant m \leqslant 2N$), так и на полубесконечном промежутке ($0 \leqslant j,\ k < < \infty$), в этом случае $T_1(m)$, $T_2(m)$ заданы при всех целых m, а $H(m)$ — при целых $m \geqslant 0$. Мы докажем, что как в случае конечного, так и в случае полубесконечного промежутка дискретное э. п. ядро вида (1. 7) представимо в виде

$$K(j,\ k) = \int\limits_{|\zeta|=1} u(j,\ \zeta)\, d\Sigma(\zeta)\, u^*(k,\ \zeta), \tag{1.8}$$

$$\text{где } u(j,\ \zeta) = \begin{bmatrix} \zeta^{-j} & 0 \\ 0 & \zeta^{j} \end{bmatrix}, \tag{1.9}$$

$$d\Sigma(\zeta) = \| d\sigma_{m,\ n}(\zeta) \|_{1 \leqslant m,\ n \leqslant 2} \geqslant 0 \tag{1.10}$$

— мера на единичной окружности.

Как обычно в задачах об интегральном представлении, нам удобно иметь дело не непосредственно с мерами, а со связанными с этими мерами аналитическими функциями. Если речь идет о континуальном случае, то с мерой $d\Sigma(\lambda)$ на вещественной оси, удовлетворяющей условию (1.6), мы будем ассоциировать матрицу-функцию

$$W_\Sigma(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z}\, d\Sigma(\lambda). \tag{1.11}$$

Такая функция принадлежит классу ($\boldsymbol{R}$) голоморфных в $\operatorname{Im} z \neq 0$ матриц-функций $W(z)$, удовлетворяющих там условиям

$$\frac{W(z) - W^*(z)}{z - \bar{z}} \geqslant 0 \quad \textbf{(1.12)}; \quad W(z) = W^*(\bar{z}), \tag{1.13}$$

точнее подклассу ($\boldsymbol{R}_0$) класса ($\boldsymbol{R}$), состоящему из матриц-функций, удовлетворяющих помимо (1.12), (1.13) еще и условию

$$\overline{\lim}\, |z| \cdot \| W(z) \| < \infty \quad (|z| \to \infty,\ \arg z = \pm \pi/2). \tag{1.14}$$

Если речь идет о дискретном случае, то с мерой $d\Sigma(\zeta)$ (1.10) на единичной окружности мы будем ассоциировать голоморфную вне этой окружности функцию

$$W_\Sigma(z) = \int\limits_{|\zeta|-1} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\Sigma(\zeta). \tag{1.15}$$

Такая $W(z)$ удовлетворяет в $|z| \neq 1$ условиям

$$\frac{W(z) + W^*(z)}{1 - z\bar{z}} \geqslant 0 \quad \textbf{(1.16)}; \quad W(z) + W^*(\bar{z}^{-1}) \neq 0 \tag{1.17}$$

и условию $W(0) \geqslant 0$ **(1.18).**

Обратим внимание на то, что уже в самой простейшей, наименьшей по размерности ($p = q = 1$) постановке задача об интегральном представлении смешанных, теплице-ганкелевых ядер является матричной, размера 2×2, в то время как задача об интегральном представлении теплицевых ядер: $K(x, y) = T(x - y)$ в простейшей постановке является скалярной (т. е. функция $T(\xi)$ скалярна). Поэтому, исследуя уже простейшую задачу об интегральном представлении ядер вида (1.1) или (1.7), следует иметь в виду возможность не только определенной ситуации (когда представляющая мера $d\Sigma$ единственна) и вполне неопределенной ситуации (когда множество представляющих мер $d\Sigma$ «полноразмерно», т. е. в каждой невещественной точке z множество значений ассоциированных функций $W_\Sigma(z)$ заполняет «телесный» матричный круг — круг с невырожденными, ранга 2, правым и левым радиусами). Возможна и промежуточная, «полуопределенная» ситуация, когда множество представляющих мер бесконечно, но множество значений $W_\Sigma(z)$ заполняет «вырожденный» матричный круг, радиусы которого имеют ранг 1. На конечном промежутке возможна любая ситуация.

На полубесконечном промежутке ситуация для теплицево-ганкелевых ядер может быть как определенной, так и полуопределенной; вполне неопределенная ситуация здесь невозможна. (Напомним, что для теплицевых ядер ситуация здесь обязательно определенная).

2^0. В случае полубесконечного промежутка рассматриваемая нами задача может быть трактована как задача, родственная задаче Нехари (меньшей размерности). При этом вполне неопределенной ситуации в этой обобщенной задаче Нехари отвечает как раз полуопределенная ситуация в задаче об интегральном представлении теплицево-ганкелевых ядер.

Обобщенная задача Нехари (в дискретном случае) формулируется так: *на единичной окружности* $\mathbf{T}$ *даны две матричные меры* $d\sigma_{11}(\zeta) \geqslant 0$ *(размера* $p \times p$*) и* $d\sigma_{22}(\zeta) \geqslant 0$ *(размера* $q \times q$*), и последовательность* $p \times q$ *матриц* $H(k)$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. *Ищется комплекснозначная* $p \times q$ *матричная мера* $d\sigma_{12}(\zeta)$ *такая, что, во-первых, она подчинена мерам* $d\sigma_{11}$ *и* $d\sigma_{22}$, *т. е. выполняется*

$$\| d\sigma_{mn}(\zeta) \|_{1 \leqslant m,\, n \leqslant 2} \geqslant 0, \qquad (d\sigma_{21} \overset{\text{def}}{=} d\sigma_{12}^{*}), \tag{2.1}$$

во-вторых, для коэффициентов Фурье $\sigma_{12}(k)$ *выполнено*

$$\hat{\sigma}_{12}(k) = H(k); \; (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.2}$$

(Коэффициенты Фурье меры $d\sigma(\zeta)$ определены как $\hat{\sigma}(k) \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbf{T}} \zeta^{-k} d\sigma(\zeta)$).

Эта задача рассматривалась в [2]. Если $d\sigma_{11}$ и $d\sigma_{22}$ — это меры Лебега (т. е. $d\sigma_{11}(\zeta) = |d\zeta|$, $d\sigma_{22}(\zeta) = |d\zeta|$), то из условия подчинения (2.1) вытекает, что $d\sigma_{12}(\zeta) = \varphi(\zeta)\,|d\zeta|$, где $\varphi(\zeta)\varphi^*(\zeta) \leqslant 1$. Обобщенная задача Нехари в этом случае превращается в традиционную: ищется $\varphi(\zeta)$ с $\varphi(\zeta)\varphi^*(\zeta) \leqslant 1$ на $\boldsymbol{T}$ такая, что $H(k) = \int\limits_{\mathrm{T}} \zeta^{-k}\varphi(\zeta)\,|d\zeta|$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Основополагающие результаты в проблематике, связанной с задачей Нехари, получили В. М. Адамян, Д. З. Аров и М. Г. Крейн в известном цикле работ конца 60-х годов.

Поясним связь между обобщенной задачей Нехари и задачей об интегральном представлении теплицево-ганкелевых ядер. Данным обобщенной задачи Нехари: $d\sigma_{11} \geqslant 0$, $d\sigma_{22} \geqslant 0$, $H(k)$, $(k=0, 1, 2, \ldots)$ отвечает ядро вида (1.7) на полубесконечном промежутке с этим $H(k)$ и с $T_1(m) \overset{\text{def}}{=} \hat{\sigma}_{11}(m)$, $T_2(m) \overset{\text{def}}{=} \hat{\sigma}_{22}(-m)$. Эрмитова положительность ядра (1.7) является необходимым и достаточным условием разрешимости обобщенной задачи Нехари. Действительно, если мера $d\sigma_{12}(\zeta)$ решает обобщенную задачу Нехари, то мера $d\Sigma(\zeta) = \| d\sigma_{mn} \| \geqslant 0$ дает представление (1.8) ядра (1.7), и следовательно, это ядро эрмитово положительно при $0 \leqslant j,\ k < \infty$. Наоборот, пусть ядро (1.7), соответствующее данным задачи Нехари, является эрмитово положительным при $0 \leqslant j,\ k < \infty$. Тогда, согласно сформулированной теореме это ядро представимо в виде (1.8) с $d\Sigma(\zeta) \geqslant 0$. Диагональные элементы $d\sigma_{11}$, $d\sigma_{22}$ представляющей $\boldsymbol{K}$ меры $d\Sigma$ обязаны совпадать с изначально заданными мерами $d\sigma_{11}$, $d\sigma_{22}$, так как эти меры представляют теплицевы ядра k_{11}, k_{22}, а для теплицевых ядер ситуация на полубесконечном промежутке определенная. Сравнивая 12—элементы равенства (1.8), приходим к (2.2). Таким образом, элемент $d\sigma_{12}$ любой представляющей это ядро $\boldsymbol{K}$ меры $d\Sigma$ дает решение обобщенной задачи Нехари. Описание всех мер $d\Sigma$, представляющих ядро $\boldsymbol{K}$, соответствующее данным Нехари, есть в то же время описание решений задачи Нехари. (Как мы видели, элементы $d\sigma_{11}$, $d\sigma_{22}$ представляющей меры определены однозначно; вся возможная неоднозначность заключена в элементе $d\sigma_{12} = d\overset{*}{\sigma}_{21}$).

Таким образом, один из подходов к исследованию обобщенной задачи Нехари заключается в переходе от нее к эквивалентной задаче большей размерности о представлении теплицево-ганкелевого ядра. Мы уверены, что подход, связанный с «повышением размерности», именно трактовка исходной задачи как предельной, вырожденной или касательной по отношению к задаче большей размерности, полезен не только в задаче Нехари. Представляет интерес поиск таких задач, где подобный подход плодотворен. Для этих исследований понадобится дальнейшее развитие теории полуопределенных ситуаций, вырожденных и касательных задач. (См. в связи с этим работы [3], [4].)

3^0. Приведем еще одну формулировку обобщенной задачи Нехари.

Задача о достройке. *Даны матрицы-функции* $w_{11}(z)$, $w_{22}(z)$, $w_{12}(z)$ *соответственно размеров* $p \times p$, $q \times q$, $p \times q$, *голоморфные в круге* $|z| < 1$. *Когда возможна достройка неполной матрицы-функции*

$$\begin{bmatrix} w_{11}(z) & w_{12}(z) \\ ? & w_{22}(z) \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

голоморфной в $|z| < 1$ *матрицей-функцией* $w_{21}(z)$ *так, чтобы «достроенная» матрица-функция*

$$W(z) = \begin{bmatrix} w_{11}(z) & w_{12}(z) \\ w_{21}(z) & w_{22}(z) \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

имела в круге $|z| < 1$ *неотрицательную вещественную часть, т. е. чтобы в этом круге для нее выполнялось неравенство* (1.16) *и как описать все такие «достраивающие»* $w_{21}(z)$?

Поясним связь между задачей о достройке и обобщенной задачей Нехари. В постановке задачи о достройке можно сразу считать, что

$$w_{11}(z) + w_{11}^*(z) \geqslant 0, \ w_{22}(z) + w_{22}^*(z) \geqslant 0, \ (|z| < 1). \tag{3.3}$$

(В противном случае эта задача, очевидно, неразрешима.) Голоморфные в $|z| < 1$ функции $w_{11}(z)$, $w_{22}(z)$ с положительной вещественной частью представимы там в виде

$$w_{jj}(z) = \int_{\mathbf{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\sigma_{jj}(\zeta), \ (|z| < 1), \ j = 1, 2, \tag{3.4}$$

где $d\sigma_{11} \geqslant 0$, $d\sigma_{22} \geqslant 0$. Наоборот, если заданы меры $d\sigma_{11} \geqslant 0$, $d\sigma_{22} \geqslant 0$, то построенные по ним согласно (3.4) функции $w_{11}(z)$, $w_{22}(z)$ голоморфны в $|z| < 1$ и удовлетворяют (3.3). Так как

$$\frac{\zeta + z}{\zeta - z} = 1 + 2 \sum_{1 \leqslant k < \infty} z^k \zeta^{-k}, \ (\zeta \in \boldsymbol{T}, \ |z| < 1),$$

то какова бы ни была (комплексная) мера $d\sigma(\zeta)$, построенная по этой мере функция

$$w(z) = \int_{\mathbf{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\sigma(\zeta), \ (|z| < 1) \tag{3.5. a}$$

определяется в $|z| < 1$ лишь коэффициентами Фурье $\hat{\sigma}(k)$ с $k = 0, 1, 2, \ldots$:

$$w(z) = \hat{\sigma}(0) + 2 \sum_{1 \leqslant k < \infty} \hat{\sigma}(k) z^k \quad (|z| < 1). \tag{3.5. b}$$

Это мотивирует конструкцию: по заданной последовательности $H(k)$, $(k=0, 1, 2, \ldots)$ строим функцию

$$w_{12}(z)=H(0)+2\sum_{1\leqslant k<\infty} H(k)\,z^k,\ (|z|<1). \tag{3.6}$$

Наоборот, если задана функция $w_{12}(z)$, голоморфная в $|z|<1$, то из ее тейлоровского разложения, согласно (3.6), определяется последовательность $H(k)$, $(k=0, 1, 2, \ldots)$.

Таким образом, имеется взаимно-однозначное соответствие между «недостроенными» матрицами-функциями (3.1), голоморфными в $|z|<1$ и со свойством (3.3), и тройками $d\sigma_{12}\geqslant 0$, $d\sigma_{22}\geqslant 0$, $H(k)$ — данными задачи Нехари.

Допустим, что обобщенная задача Нехари с данными $d\sigma_{11}$, $d\sigma_{22}$, $H(k)$ разрешима, и мера $d\sigma_{12}$ является ее решением. Тогда для функции $w_{12}(z)$, определенной первоначально рядом (3.6), ввиду (2.2) будет справедливо интегральное представление

$$w_{12}(z)=\int_T \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,d\sigma_{12}(\zeta),\ (|z|<1). \tag{3.7}$$

Положим

$$w_{21}(z)\overset{\text{def}}{=}\int_T \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,d\overset{*}{\sigma}_{12}(\zeta),\ (|z|<1). \tag{3.8}$$

Функции $w_{11}(z)$, $w_{22}(z)$ из (3.4) вместе с этими функциями $w_{12}(z)$, $w_{21}(z)$ образуют «полную» матрицу-функцию $W(z)$, (3.2), причем по построению эта $W(z)$ допускает представление (1.15) с мерой $d\Sigma(\zeta)=\|d\sigma_{mn}\|\geqslant 0$, $(d\sigma_{21}\overset{\text{def}}{=}d\overset{*}{\sigma}_{12})$, а значит, в $|z|<1$ выполняется (1.16).

Наоборот, пусть функция $w_{21}(z)$ является решением задачи о достройке неполной матрицы (3.1), соответствующей данным $d\sigma_{11}$, $d\sigma_{22}$, $H(k)$ задачи Нехари. Достроенная этой функцией w_{21} матрица-функция $W(z)$ (3.2) голоморфна в $|z|<1$, и ввиду (1.16) представима интегралом (1.15) с мерой $d\Sigma(\zeta)\geqslant 0$. При этом диагональные элементы $d\sigma_{11}$, $d\sigma_{22}$ матричной меры $d\Sigma$ обязаны совпадать с изначально данными мерами $d\sigma_{11}$, $d\sigma_{22}$, а для элемента $d\sigma_{12}$ выполняется (2.2), т. е. $d\sigma_{12}$ является решением задачи Нехари.

Приведенное рассуждение показывает, что имеется взаимно-однозначное соответствие между решениями обобщенной задачи Нехари и задачи о достройке.

Приведенная формулировка задачи Нехари как «задачи о достройке» привлекательна тем, что имеет дело непосредственно с аналитическими функциями. Задача о достройке может быть сформулирована для функций на римановых поверхностях, функций многих комплексных переменных в различных областях, и в ряде иных ситуаций.

Критерий разрешимости обобщенной задачи Нехари — эрмитова положительность соответствующего ядра (1.7) на полубесконечном промежутке — может быть сформулирован непосредственно в терминах «неполной матрицы» (3.1) исходных данных задачи о достройке. Этот критерий имеет вид

$$\int_T \chi(r\zeta) \begin{bmatrix} p_1(r\zeta) & w_{12}(r\zeta) \\ w_{12}^*(r\zeta) & p_2(r\zeta) \end{bmatrix} \chi^*(r\zeta) \, | d\zeta | \geqslant 0, \quad (\forall r \in [0, 1]), \qquad (3.9)$$

где $p_j(z) = w_{jj}(z) + w_{jj}^*(z)$, $j = 1, 2$; $\chi(z) = [\bar{z}\varphi^*(z), \quad \psi(z)]$, $\varphi\psi$ — любые голоморфные в $|z| < 1$.

4⁰. Мы будем исследовать задачу об интегральном представлении теплицево-ганкелевых ядер (и несколько более общих ядер) методом, основы которого были заложены В. П. Потаповым. Следуя пути, указанному Мастером, мы сопоставляем задаче Основное Матричное Неравенство, которое решаем методом факторизации.

Используются бра-кэт-обозначения типа использованных в [5], с очевидными матричными модификациями: так, если $f(x)$, $g(x)$ — матрицы-функции надлежащей размерности, а $\langle f|$, $|g\rangle$ — соответствующие им «бра» и «кэт» векторы, точнее, «бра» и «кэт» матрицы, то их произведением $\langle f | g \rangle$ является матрица $\int f(\xi) g(\xi) \, d\xi$.

5⁰. Ядро $K(x, y)$ вида (1.1) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\begin{bmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{bmatrix} \frac{\partial K(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} \begin{bmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{bmatrix} = 0.$$

(Если K негладко, то уравнение понимается в обобщенном смысле.) Мы исследуем более общие, чем (1.1), ядра.

Пусть Ω, $R(x)$, $(0 \leqslant x \leqslant l)$ — $n \times n$ матрицы:

$\Omega = \Omega^*$ — не зависит от x и обратима, (5.1)

$R(x) > 0$, $(0 \leqslant x \leqslant l)$ — неравенство строгое, $R(x) \in L^1[0, l]$. (5.2)

Пусть $n \times n$ матрица $u(x, \lambda)$ — решение канонической системы

$$i\Omega \frac{du(x, \lambda)}{dx} = \lambda R(x) u(x, \lambda); \; u(0, \lambda) = 1. \qquad (5.3)$$

Теорема. *Эрмитово положительное непрерывное при* $0 \leqslant x$, $y \leqslant l$ *ядро** $K(x, y)$, *удовлетворяющее там дифференциальному уравнению*

$$\Omega \frac{dK(x, y)}{dx} R(y) + R(x) \frac{dK(x, y)}{dy} \Omega = 0, \qquad (5.4)$$

допускает интегральное представление

$$K(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, \lambda) \, d\Sigma(\lambda) \, u^*(y, \lambda), \qquad (5.5)$$

* $K(x, y)$ при каждых x, y — $n \times n$-матрица.

где $u(x, \lambda)$ *определено в* (5.3), $d\Sigma(\lambda) \geqslant 0 - n \times n$ *матричная мера, интеграл в* (5.5) *сходится равномерно при* $0 \leqslant x, y \leqslant l$.

Уместно отметить, что для решения $u(x, \lambda)$ канонической системы (5.3) выполнено условие $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant l} \ln^+ \| u(x, \lambda) \|) \frac{d\lambda}{1 + \lambda^2} < \infty$.

Разъяснение. Если K негладко, то уравнение (5.4) понимается в следующем обобщенном смысле: *непрерывная функция* $K(x, y)$ *удовлетворяет, по определению, уравнению* (5.4), *если существуют последовательность гладких функций* $K_n(x, y)$ *и последовательность непрерывных функций* $R_n(x)$ *такие, что* $K_n(x, y)$ *сходится к* $K(x, y)$ *равномерно при* $0 \leqslant x, y \leqslant l$, $R_n(x)$ *сходится к* $R(x)$ *в* $L^1[0, l]$, *и при каждом* n *выполняется уравнение, получающееся из* (5.4) *заменой* K *на* K_n, R *на* R_n.

Непрерывное ядро вида (1.1) является обобщенным в этом смысле решением соответствующего дифференциального уравнения (приведенного в начале этого п^0).

Замечание. Нетрудно проверить справедливость обратного к теореме предложения: ядро $K(x, y)$, представимое равномерно сходящимся интегралом (5.5), где $u(x, \lambda)$ — решение канонической системы (5.3), является обобщенным решением уравнения (5.4). Гладкие ядра, которыми аппроксимируется заданное интегралом (5.5) ядро $K(x, y)$, можно строить так. На первом этапе аппроксимации заменяем бесконечные пределы интегрирования в (5.5) конечными пределами $-N, N$, где N достаточно велико и фиксировано. Аппроксимация обеспечивается равномерной сходимостью интеграла (5.5). На втором этапе приближаем в метрике $L^1[0, l]$ заданную изначально суммируемую $R(x)$ непрерывной функцией $R_n(x)$ столь хорошо, что для решения $u_n(x, \lambda)$ канонической системы, получающейся из (5.3) заменой $R(x)$ на $R_n(x)$, величина $\| u_n(x, \lambda) - u(x, \lambda) \|$ будет равномерно малой при $0 \leqslant x \leqslant l$, $-N \leqslant \lambda \leqslant N$. Ядро $K_{n, N}(x, y)$, задаваемое интегралом, получающимся из (5.5) заменой пределов интегрирования на $-N, N$, функции $u(x, \lambda)$ на $u_n(x, \lambda)$, и с той же самой, что и в (5.5), мерой $d\Sigma(\lambda)$, будет ядром, близким к $K(x, y)$ равномерно при $0 \leqslant x, y \leqslant l$, гладким и удовлетворяющим дифференциальному уравнению типа (5.4) с $R(x)$ замененным на $R_n(x)$.

6^0. Введем в рассмотрение основные объекты, связанные с задачей об интегральном представлении непрерывного эрмитово положительного ядра $K(x, y)$, удовлетворяющего уравнению (5.4). Все операторы рассматриваются в $L^2[0, l]$. $\boldsymbol{K}$ — интегральный оператор с ядром $K(x, y)$, об интегральном представлении которого идет речь. $\boldsymbol{G}(\lambda)$ — интегральный оператор с ядром $G(x, y; \lambda)$, где $G(x, y; \lambda) = -iu(x, \lambda) u^{-1}(y, \lambda) \Omega^{-1} R(y)$, если $y < x$;

$G(x, y; \lambda)=0$, если $y>x$ **(6.1)**. $G(x, y; \lambda)$ — функция Коши дифференциального пучка: если $v(x, \lambda)$ — решение задачи Коши

$$i\Omega \frac{dv(x, \lambda)}{dx}-\lambda R(x) v(x, \lambda)=R(x) f(x), \ (x \geqslant 0); \ v(0, \lambda)=0,$$

$$\text{то } v(x, \lambda)=\int_0^x \mathrm{G}(x, \xi; \lambda) f(\xi) d\xi.$$

Так как уравнение (5.3) можно записать в виде

$$i\Omega \frac{du(x, \lambda)}{dx}-\mu R(x) u(x, \lambda)=(\lambda-\mu) R(x) u(x, \lambda),$$

то, учитывая, что $u(0, \lambda)=1$, и беря $f(x)=(\lambda-\mu) u(x, \lambda)$, получим

$$u(x, \lambda)=u(x, \mu)+(\lambda-\mu) \int_0^x \mathrm{G}(x, \xi; \mu) u(\xi, \lambda) d\xi. \tag{6.2}$$

Как резольвента $\boldsymbol{G}(\lambda)$ удовлетворяет тождеству Гильберта

$$\frac{\boldsymbol{G}(\mu_1)-\boldsymbol{G}(\mu_2)}{\mu_1-\mu_2}=\boldsymbol{G}(\mu_1) \boldsymbol{G}(\mu_2). \tag{6.3}$$

В бра-кэт-обозначениях (6.2) имеет вид

$$\frac{|u(\mu_1\rangle-|u(\mu_2)\rangle}{\mu_1-\mu_2}=|\boldsymbol{G}(\mu_1| u(\mu_2)\rangle. \tag{6.4}$$

Положим $M(x, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^x G(x, \xi; \lambda) K(\xi, 0) d\xi$, или в бра-кэт-обозначениях

$$|M(\lambda)\rangle=|\boldsymbol{G}(\lambda)| \boldsymbol{K} | \delta_{+0}\rangle, \tag{6.5}$$

где δ_{+0} — матричная дельта-функция, сосредоточенная в точке $\xi=+0$. Из (6.5) и из тождества Гильберта (6.3) следует, что

$$\frac{|M(\mu_1\rangle-|M(\mu_2)\rangle}{\mu_1-\mu_2}=|\boldsymbol{G}(\mu_1| M(\mu_2)\rangle. \tag{6.6}$$

Переходя к эрмитово-сопряженным величинам и заменяя μ на $\bar{\mu}$, получим из (6.3), (6.4), (6.6) равенства

$$\frac{\boldsymbol{G}^*(\bar{\mu}_1)-\boldsymbol{G}^*(\bar{\mu}^2)}{\mu_1-\mu_2}=\boldsymbol{G}^*(\bar{\mu}_1) \boldsymbol{G}^*(\bar{\mu}_2), \tag{6.7}$$

$$\frac{\langle u^*(\bar{\mu}_1)|-\langle u^*(\bar{\mu}_2)|}{\mu_1-\mu_2}=\langle u^*(\bar{\mu}_2)| \boldsymbol{G}^*(\bar{\mu}_1)|, \tag{6.8}$$

$$\frac{\langle M^*(\bar{\mu}_1)|-\langle M^*(\bar{\mu}_2)|}{\mu_1-\mu_2}=\langle M^*(\bar{\mu}_2)| \boldsymbol{G}^*(\bar{\mu}_1). \tag{6.9}$$

Операторы $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{G}(z)$ и векторы $u(z)$, $M(z)$ будут тем материалом, из которого мы будем строить структуры, фигурирующие при исследовании задачи об интегральном представлении, такие, как основное матричное неравенство, основное тождество, преобразованное основное матричное неравенство, цепное тождество, резольвентная матрица.

7^0. Получим так называемое **Основное Тождество** (ОТ). Оно играет центральную роль, во-первых, при доказательстве адекватности основного неравенства исходной задаче, во-вторых, при получении факторизационных соотношений, возникающих при решении основного матричного неравенства. Получение Основного Тождества — по существу единственное место, где используется индивидуальность задачи об интегральном представлении. Все остальные построения носят общий характер, не связаны или почти не связаны со спецификой рассматриваемой конкретной задачи, и могут быть аксиоматизированы. (Такой аксиоматизации мы посвятим специальную работу.)

Основное Тождество (ОТ) имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{G}(z)\boldsymbol{K}-\boldsymbol{K}\boldsymbol{G}^*(\bar{z})=|M(\bar{z})\rangle\langle u^*(\bar{z})|-|u(\bar{z})\rangle\langle M^*(\bar{z})| \qquad (7.1)$$

и может рассматриваться как условие симметрии $\Phi(z)=\Phi^*(\bar{z})$ для $\Phi(z)\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{K}\boldsymbol{G}^*(\bar{z})+|M(z)\rangle\langle u^*(\bar{z})|$. Из справедливости ОТ для какого-нибудь z следует справедливость ОТ для любого z, и даже более общее тождество

$$\boldsymbol{G}(z_1)\boldsymbol{K}-\boldsymbol{K}\boldsymbol{G}^*(\bar{z}_2)-(z_1-z_2)\boldsymbol{G}(z_1)\boldsymbol{K}\boldsymbol{G}^*(\bar{z}_2)=$$
$$=|M(z_1)\rangle\langle u^*(\bar{z}_2)|-|u(z_1\rangle\langle M^*(\bar{z}_2)|. \qquad (7.2)$$

Нужно умножить (7.1) слева на $\boldsymbol{I}+(z_1-z)\boldsymbol{G}(z_1)$, спра а — на $I+(z_2-z)\boldsymbol{G}^*(\bar{z}_2)$ и воспользоваться тождествами (6.3), (6.4), (6.6) — (6.9). Достаточно, таким образом, доказать ОТ рассматриваемой нами задачи лишь при $z=0$.

Исходим из дифференциального уравнення (5.4). Интегрируя, получим

$$\int_0^x\int_0^y\left[\frac{\partial K(\xi,\eta)}{\partial\xi}R(\eta)\Omega^{-1}+\Omega^{-1}R(\xi)\frac{\partial K(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right]d\xi d\eta\equiv 0.$$

Записывая каждый из двух двойных интегралов как повторный (в нужном порядке) и применяя формулу Ньютона-Лейбница, получим

$$\int_0^x\Omega^{-1}R(\xi)[K(\xi,y)-K(\xi,0)]d\xi+\int_0^y[K(x,\eta)-$$
$$-K(0,\eta)]R(\eta)\Omega^{-1}d\eta\equiv 0,$$

а так как $K(\xi, \eta) = K(\eta, \xi)^*$, $u(x, 0) = 1$, $G(t, \tau; 0) = -i\Omega^{-1}R(\tau)$, $(t > \tau)$, то

$$\int_0^x \mathrm{G}(x, \xi; 0) K(\xi, y)\, d\xi - \int_0^y K(x, \eta)\, G^*(y, \eta)\, d\eta = \tag{7.3}$$

$$= \int_0^x \mathrm{G}(x, \xi;\ 0)\, K(\xi, 0)\, d\xi\, u^*(y, 0) - u(x, 0) \int_0^y K^*(\eta, 0)\, G^*(y, \eta; 0)\, d\eta,$$

а это и есть тождество (7.1) при $z = 0$. ОТ доказано.

Замечание. При доказательстве ОТ мы рассуждали так, как будто бы $K(x, y)$ — гладкое решение уравнения (5.4). Если $K(x, y)$ — не гладкое, а лишь обобщенное (в описанном смысле) решение уравнения (5.4), то все рассуждения нужно сначала проделать для аппроксимирующих функцию $K(x, y)$ гладких решений $K_n(x, y)$ аппроксимирующего дифференциального уравнения, получить для них равенство, аналогичное (7.3), а затем сделать в нем предельный переход.

В частном случае ядра $K(x, y)$ вида (1.1) ОТ было получено нами ранее непосредственным вычислением [1, § 5].

8^0. **Основное матричное неравенство** (ОМН), конечно, имеет вид

$$\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{K} & |u(z)\rangle W(z) + |M(z)\rangle \\ \hline * & \dfrac{W(z) - W^*(z)}{z - \bar{z}} \end{array}\right] \geqslant 0, \tag{8.1}$$

где $\boldsymbol{K}$, $u(z)$, $M(z)$ — введены в п^0. 6, $W(z)$ — $n \times n$ матрица-функция, голоморфная в $\operatorname{Im} z \neq 0$ и удовлетворяющая там соотношению симметрии $W(z) = W^*(\bar{z})$.

По определению, ОМН (8.1) выполняется в точке z, $(z \neq \bar{z})$, если при умножении матрицы в (8.1) слева на любой вектор вида $[\langle \varphi |, \alpha]$ и справа на эрмитово сопряженный к нему получим неотрицательное число. Здесь $\langle \varphi |$ — n-компонентный вектор, компоненты которого — функции из $L^2[0, l]$, α — вектор пространства $\boldsymbol{C}^n$.

Теорема. *Если ядро $K(x, y)$ допускает интегральное разложение (5.5) с неотрицательной мерой $d\Sigma(\lambda)$ по решениям $u(x, \lambda)$ канонической системы (5.3), равномерно сходящееся при $0 \leqslant x$, $y \leqslant l$, то для ассоциированной с этой мерой матрицы-функции $W(z)$ всюду в $\operatorname{Im} z \neq 0$ выполняется ОМН (8.1).*

Замечание. Из сходимости интеграла (5.5) при $x = 0$, $y = 0$ следует (так как $u(0, \lambda) = 1$), что для меры $d\Sigma(\lambda)$ выполняется (1.6), так что ассоциированная функция $W(z)$ определена.

Доказательство. Положим

$$\boldsymbol{K}_\Sigma \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |u(\lambda)\rangle\, d\Sigma(\lambda)\, \langle u^*(\lambda)|, \tag{8.2}$$

$$| M_\Sigma(z)\rangle \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{G}(z)\cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(\lambda)\rangle\, d\Sigma(\lambda) \tag{8.3}$$

(интеграл в (8.3) справа сходится — это интеграл (5.5) при $y=0$). Так как $\langle u^*(\lambda)\,|\,\delta_{+0}\rangle = 1$, то

$$| M_\Sigma(z)\rangle = |\,\boldsymbol{G}(z)\,|\,\boldsymbol{K}_\Sigma\,|\,\delta_{+0}\rangle. \tag{8.4}$$

Матрица $W_\Sigma(z)$ определена в (1.11). Имеем

$$A \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} |u(\lambda)\rangle \\ \dfrac{1}{\lambda - z} \end{bmatrix} d\Sigma(\lambda) \left[\langle u^*(\lambda)|,\ \frac{1}{\lambda - \bar z}\right] \geqslant 0 \tag{8.5}$$

(1 — единичная $n\times n$ матрица). Очевидно, $a_{11} = \boldsymbol{K}_\Sigma$, $a_{22} = \dfrac{W_\Sigma(z) - W_\Sigma^*(z)}{z - \bar z}$, $a_{12} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{|u(\lambda)\rangle}{\lambda - z}\, d\Sigma(\lambda)$. Согласно, (6.4) $\dfrac{|u(\lambda)\rangle}{\lambda - z} = |u(z)\rangle \dfrac{1}{\lambda - z} + |\,\boldsymbol{G}(z)\,|\,u(\lambda)\rangle$. Интегрируя последнее равенство по $d\Sigma(\lambda)$, получаем $a_{12} = |u(z)\rangle W_\Sigma(z) + |M_\Sigma(z)\rangle$. Таким образом, с любой (обеспечивающей существование интегралов) мерой $d\Sigma(\lambda) \geqslant 0$ связано матричное неравенство (ОМН$_\Sigma$):

$$\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{K}_\Sigma & |u(z)\rangle W_\Sigma(z) + |M_\Sigma(z)\rangle \\ \hline * & \dfrac{W_\Sigma(z) - W_\Sigma^*(z)}{z - \bar z} \end{array}\right] \geqslant 0. \tag{8.6}$$

По условию теоремы, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_\Sigma$. Но тогда, согласно (8.3), и $|M(z)\rangle = |M_\Sigma(z)\rangle$. Таким образом, для ассоциированной функции $W(z) = W_\Sigma(z)$ выполняется ОМН (8.1). Теорема доказана.

9°. Обратное к этой теореме утверждение — если для оператора $\boldsymbol{K}$ и функции $W(z)$ выполняется ОМН, то $W(z)$ имеет вид W_Σ (см. (1.11)), и $\boldsymbol{K}$ представимо в виде (5.5) с этой мерой $d\Sigma$ — доказывается гораздо сложнее. Для извлечения этой информации из ОМН (8.1) рассматриваемой задачи (как и вообще для извлечения информации из ОМН любой задачи*), его нужно подвергнуть специальному преобразованию. Преобразование такого рода для иных задач в несколько иной форме делалось нами в [6] и [1]. Здесь методика преобразования ОМН по сравнению с [6] и [1] усовершенствована.

С $n\times n$ матрицей $W(z)$ свяжем оператор $\boldsymbol{W}_{\text{Пр}}(z)$:

$$\boldsymbol{W}_{\text{Пр}}(z) \overset{\text{def}}{=} |u(z)\rangle W(z) \langle u^*(\bar z)| + |M(z)\rangle\langle u^*(\bar z)| + \boldsymbol{K}\boldsymbol{G}^*(\bar z). \tag{9.1 a}$$

* В ряде сравнительно простых задач, используя их специфику, при извлечении информации из ОМН задачи можно обойтись и без его преобразования, но преобразование ОМН является универсальным приемом извлечения информации из ОМН.

Асимметрия в определении $\boldsymbol{W}_{\text{Пр}}(z)$ кажущаяся: ввиду ОТ также и

$$\boldsymbol{W}_{\text{Пр}}(z) = | u(z) \rangle W(z) \langle u^*(\bar{z}) | + | u(z) \rangle \langle M^*(\bar{z}) | + \boldsymbol{G}(z)\boldsymbol{K}. \qquad (9.1\,b)$$

Пусть z', z'' — любые невещественные. Из ОТ (7.2) и из (6.4), (6.6), (6.8), (6.9), используя выражение (9.1 a) для $\boldsymbol{W}_{\text{Пр}}(z)$, получаем

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}_{\text{Пр}}(z') - \boldsymbol{W}^*_{\text{Пр}}(z'') = | u(\bar{z}'') \rangle [W(z') - W^*(z'')] \langle u^*(\bar{z}') | +\\ + (z' - \bar{z}'') [\boldsymbol{G}(\bar{z}'') \boldsymbol{K} \boldsymbol{G}^*(\bar{z}') + | u(\bar{z}'') \rangle \langle B^*(z'') | \boldsymbol{G}^*(\bar{z}') +\\ + \boldsymbol{G}(\bar{z}'') | B(z') \rangle \langle u^*(\bar{z}') |, \qquad (9.2)\end{aligned}$$

где

$$| B(z) \rangle = | u(z) \rangle W(z) + | M(z) \rangle. \qquad (9.3)$$

Из (9.2) следует, что если $W(z)$ удовлетворяет условию симметрии (1.13), то и $\boldsymbol{W}_{\text{Пр}}(z) = \boldsymbol{W}^*_{\text{Пр}}(\bar{z})$. Из (9.2) следует также, что

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & \boldsymbol{W}_{\text{Пр}}(z) \\ \boldsymbol{W}^*_{\text{Пр}}(z'') & \dfrac{\boldsymbol{W}_{\text{Пр}}(z') - \boldsymbol{W}^*_{\text{Пр}}(z'')}{z' - \bar{z}''} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ \boldsymbol{G}(\bar{z}'') & | u(\bar{z}'') \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & | B(z') \rangle \\ \langle B^*(z'') | & \dfrac{W(z') - W^*(z'')}{z' - \bar{z}''} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I} & \boldsymbol{G}^*(\bar{z}') \\ 0 & \langle u^*(\bar{z}') | \end{bmatrix}. \qquad (9.4)$$

Преобразованное Основное Матричное Неравенство (ПОМН) имеет вид

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & \boldsymbol{W}_{\text{Пр}}(z) \\ \boldsymbol{W}^*_{\text{Пр}}(z) & \dfrac{\boldsymbol{W}_{\text{Пр}}(z) - \boldsymbol{W}^*_{\text{Пр}}(z)}{z - \bar{z}} \end{bmatrix} \geqslant 0. \qquad (9.5)$$

Теорема. *$W(z)$ удовлетворяет в точке z ОМН (8.1) тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{W}_{\text{Пр}}(z)$ удовлетворяет в этой же точке z ПОМН (9.5)*

Доказательство. Импликация ОМН $\to$ ПОМН следует из (9.4) при $z' = z'' = z$. Для вывода ПОМН $\to$ ОМН нужно учесть, что из выражения (9.1a) для $W_{\text{Пр}}(z)$ и из равенств $\langle \delta_{+0} | u(z) \rangle = 1$, $\langle u^*(z) | \delta_{+0} \rangle = 1$, $\langle \delta_{+0} | M(z) \rangle = 0$, $| G^*(\bar{z}) | \delta_{+0} \rangle = 0$ вытекают равенства $W_{\text{Пр}}(z) | \delta_{+0} \rangle = | u(z) \rangle W(z) + | M(z) \rangle$, $\langle \delta_{+0} | W_{\text{Пр}}(z) | \delta_{+0} \rangle = W(z)$. Теорема доказана.

10°. **Теорема.** *Если голоморфная в $\operatorname{Im} z \neq 0$ $n \times n$ матрица-функция $W(z)$ удовлетворяет всюду там ОМН (8.1) и соотношению симметрии (1.13), то*

а) $W(z)$ представим в $\operatorname{Im} z \neq 0$ в виде (1.11), где $n \times n$ матричная мера $d\Sigma(\lambda) \geqslant 0$ удовлетворяют условию (1.6);

в) интеграл в правой части равенства

$$K_\Sigma(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, \lambda)\, d\Sigma(\lambda)\, u^*(y, \lambda) \qquad (10.1)$$

сходится равномерно при $0 \leqslant x, y \leqslant l$ и определяет непрерывное эрмитово положительное там ядро $K_\Sigma(x, y)$;

c) выполнено равенство

$$K(x, y) = K_\Sigma(x, y) + P(x, y), \tag{10.2}$$

где $P(x, y)$ — некоторое непрерывное эрмитово положительное ядро при $0 \leqslant x, y \leqslant l$.

Доказательство. Образуем $\boldsymbol{W}_{\text{Пр}}(z)$ по формуле (9.1*a*). Согласно п°. 9, для $\boldsymbol{W}_{\text{Пр}}(z)$ всюду в $\operatorname{Im} z \neq 0$ выполняется ПОМН (9.5), и соотношение симметрии $\boldsymbol{W}_{\text{Пр}}(z) = \boldsymbol{W}_{\text{Пр}}^*(\bar{z})$. Из ПОМН следует, что при любой функции* f на $[0, l]$ функция $\langle f \mid \boldsymbol{W}_{\text{Пр}}(z) \mid f^* \rangle$ будет $n \times n$ матрицей-функцией класса $(\boldsymbol{R})$ в $\operatorname{Im} z \neq 0$, и для нее будут выполняться неравенства

$$|\operatorname{Im} \langle f \mid \boldsymbol{W}_{\text{Пр}}(z) \mid f^* \rangle| \leqslant |\operatorname{Im} z|^{-1} \langle f \mid \boldsymbol{K} \mid f^* \rangle, \tag{10.3}$$

$$\| \langle f \mid \boldsymbol{W}_{\text{Пр}}(z) \mid f^* \rangle \| \leqslant |\operatorname{Im} z|^{-1} \| \langle f \mid \boldsymbol{K} \mid f^* \rangle \|. \tag{10.4}$$

При $f = \delta_{+0}$ неравенство (10.4) превращается в неравенство

$$\| W(z) \| \leqslant |\operatorname{Im} z|^{-1} \| K(0, 0) \|.$$

Отсюда и из (1.12), (1.13) следует принадлежность функции $W(z)$ подклассу $(\boldsymbol{R}_0)$ класса $(\boldsymbol{R})$, а значит, ее представимость в виде (1.11) с $n \times n$ матричной мерой $d\Sigma(\lambda) \geqslant 0$, удовлетворяющей (1.6). Из (10.4) следует, что при любом f $n \times n$ матрица-функция

$$\langle f \mid \boldsymbol{W}_{\text{Пр}}(z) \mid f^* \rangle$$

является функцией класса $(\boldsymbol{R}_0)$ и, значит, представима в виде

$$\langle f \mid \boldsymbol{W}_{\text{Пр}}(z) \mid f^* \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\langle f \mid d\Sigma_{\text{Пр}}(\lambda) \mid f^* \rangle}{\lambda - z}, \ (\operatorname{Im} z \neq 0,) \tag{10.5}$$

где $\langle f \mid d\Sigma_{\text{Пр}}(\lambda) \mid f^* \rangle \geqslant 0$ — $n \times n$-матричная мера на вещественной оси**, причем ввиду (10.3) выполняется неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle f \mid d\Sigma_{\text{Пр}}(\lambda) \mid f^* \rangle \leqslant \langle f \mid K \mid f^* \rangle. \tag{10.6}$$

Так как функции класса $(\boldsymbol{R}_0)$ $\langle f \mid \boldsymbol{W}_{\text{Пр}}(z) \mid f^* \rangle$ и $W(z)$ связаны соотношением (см. (9.1*a*).

$$\langle f \mid \boldsymbol{W}_{\text{Пр}}(z) \mid f^* \rangle = \langle f \mid u(z) \rangle W(z) \langle u^*(z) \mid f^* \rangle + \\ + \langle f \mid M(z) \rangle \langle u^*(\bar{z}) \mid f^* \rangle + \langle f \mid \boldsymbol{K} \boldsymbol{G}^*(\bar{z}) \mid f^* \rangle,$$

---

* f не обязательно матрица-функция из $L^2\,[0, l]$, а может быть и обобщенной функцией-мерой.

** Мы не придаем самостоятельного смысла выражению $d\Sigma_{\text{Пр}}(\lambda)$ как операторнозначной мере (хотя такой смысл и можно придать), а рассматриваем при каждом f выражение $\langle f \mid d\Sigma_{\text{Пр}}(\lambda) \mid f^* \rangle$ целиком, как $n \times n$-матричную меру.

а функции $\langle f \mid u(z)\rangle$, $\langle u^*(\bar{z}) \mid f^*\rangle$, $\langle f \mid M(z)\rangle$, $\langle \boldsymbol{G}^*(z) \mid f^*\rangle$ голоморфны вблизи вещественной оси, то по обобщенной формуле Стилтьеса (см. [7, § 2]) получим, что меры, представляющие функции $W(z)$ и $\langle f \mid \boldsymbol{W}_{\text{Пр}}(z) \mid f^*\rangle$, связаны соотношением

$$\langle f \mid d\Sigma_{\text{Пр}}(\lambda) \mid f^*\rangle = \langle f \mid u(\lambda)\rangle\, d\Sigma(\lambda)\, \langle u^*(\lambda) \mid f\rangle. \tag{10.7}$$

Отсюда и из (10.6) следует, что для любой f выполнено неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle f \mid u(\lambda)\rangle\, d\Sigma(\lambda)\, \langle u^*(\lambda) \mid f^*\rangle \leqslant \langle f \mid \boldsymbol{K} \mid f^*\rangle. \tag{10.8}$$

Выбирая $f = \delta_x$ — дельта-функцию, сосредоточенную в точке x, получим, что при любом $x \in [0, l]$ сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, \lambda)\, d\Sigma(\lambda)\, u^*(x, \lambda) \quad (\leqslant K(x, x)).$$

Отсюда и из неравенства Коши — Буняковского следует, что при любых $x, y \in [0, l]$ сходится интеграл (10.1). Этот интеграл, очевидно, задает эрмитово-положительное при $0 \leqslant x, y \leqslant l$ ядро $K_\Sigma(x, y)$. (Эрмитова положительность ядра $K_\Sigma(x, y)$ понимается в смысле «поточечного», а не «интегрального» определения, так как непрерывность ядра $K_\Sigma(x, y)$ как функции от x, y пока не установлена). Выбирая в (10.8) f вида $f = \Sigma \xi_j \delta_{x_j}$ — конечные линейные комбинации дельта-функций, получим

$$K(x, y) = K_\Sigma(x, y) + P(x, y), \tag{10.9}$$

где $P(x, y)$ — некоторое эрмитово-положительное (в смысле поточечного определения) при $0 \leqslant x, y \leqslant l$ ядро. Если непрерывное эрмитово положительное ядро разложено в сумму двух эрмитово положительных ядер, то эти слагаемые также непрерывны. Так как, по условию, $K(x, y)$ — непрерывная функция при $0 \leqslant x, y \leqslant l$, то и функции $K_\Sigma(x, y)$, $P(x, y)$ непрерывны при $0 \leqslant x, y \leqslant l$. По теореме Дини, интеграл (10.1) сходится равномерно на диагонали $0 \leqslant x = y \leqslant l$, а тогда, по неравенству Коши — Буняковского, и равномерно в квадрате $0 \leqslant x, y \leqslant l$. Теорема доказана.

Замечание. При доказательстве этой теоремы нигде не использовалось, что функция $R(x)$ из (5.3) строго положительна почти всюду, теорема справедлива, если $R(x)$ лишь неотрицательна.

11°. **Теорема.** *Пусть голоморфная в* $\operatorname{Im} z \neq 0$ $n \times n$ *матрица-функция* $W(z)$ *удовлетворяет там ОМН (8.1) и соотношению симметрии (1.13), где оператор* $\boldsymbol{K}$ *— «информационный блок ОМН» — определяется непрерывным эрмитово-положительным ядром* $K(x, y)$, $(0 \leqslant x, y \leqslant l)$ *— обобщенным решением дифференциального уравнения (5.4),* $u(x, \lambda)$ *— решение канонической системы (5.3), функция* $R(x)$ *почти всюду строго положительна на* $[0, l]$.

Тогда ядро $K(x, y)$ при $0 \leqslant x, y \leqslant l$ представим равномерно сходящимся там интегралом (5.5) с мерой $d\Sigma(\lambda) \geqslant 0$, дающей интегральное представление (1.11) функции $W(z)$.

Доказательство. Согласно п°. 10, $W(z) = W_\Sigma(z)$ для некоторой удовлетворяющей (1.6) меры $d\Sigma(\lambda) \geqslant 0$, и для этой меры $d\Sigma(\lambda)$ равномерно при $0 \leqslant x, y \leqslant l$ сходится интеграл в (10.1) справа. Поэтому можно образовать оператор K_Σ и вектор $|M_\Sigma(z)\rangle$, как в п°. 8. Из определения K_Σ и M_Σ и из (6.4), (6.8) следует

$$|u(z)\rangle W(z)\langle u^*(\bar{z})| + |M_\Sigma(z)\rangle\langle u^*(\bar{z})| + K_\Sigma G^*(\bar{z}) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |u(\lambda)\rangle \frac{d\Sigma(\lambda)}{\lambda - z} \langle u^*(\lambda)|, \quad (\operatorname{Im} z \neq 0). \tag{11.1}$$

С другой стороны, из (9.1*a*), (10.5) и (10.7) следует, что

$$|u(z)\rangle W(z)\langle u^*(\bar{z})| + |M(z)\rangle\langle u^*(\bar{z})| + \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{G}^*(z) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |u(\lambda)\rangle \frac{d\Sigma(\lambda)}{\lambda - z} \langle u^*(\lambda)|, \quad (\operatorname{Im} z \neq 0). \tag{11.2}$$

Сравнивая (11.1) и (11.2), получаем

$$(\boldsymbol{K} - \boldsymbol{K}_\Sigma)\,\boldsymbol{G}^*(\bar{z}) = |M_\Sigma(z) - M(z)\rangle\langle u^*(\bar{z})|, \ (\operatorname{Im} z \neq 0). \tag{11.3}$$

Так как $\langle u^*(\bar{z}) | \delta_{+0}\rangle = 1$, $|\boldsymbol{G}^*(\bar{z}) | \delta_{+0}\rangle = 0$, то умножая (11.3) справа на $|\delta_{+0}\rangle$, получим $|M_\Sigma(z) - M(z)\rangle = 0$, и

$$\boldsymbol{G}(z)(\boldsymbol{K} - \boldsymbol{K}_\Sigma) = 0 \quad (\operatorname{Im} z \neq 0) \tag{11.4}$$

Применяя к (11.4) слева дифференциальный оператор $i\,\Omega \frac{d}{dx} - z\,R(x)$, получаем (см. п°. 6)

$$R(x)(K(x, y) - K_\Sigma(x, y)) \equiv 0. \tag{11.5}$$

Так как матрица-функция $P(x, y) = K(x, y) - K_\Sigma(x, y)$ непрерывна, а матрица $R(x)$ строго положительна почти всюду на $[0, l]$, то $K(x, y) = K_\Sigma(x, y)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Утверждение теоремы останется справедливым и при более слабых ограничениях на $R(x)$, чем строгая положительность почти всюду. Годится любое условие на $R(x)$, при котором из (11.5) следует $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_\Sigma$, например такое: пересечение множества тех x, где $R(x)$ строго положительно, с любым открытым подмножеством промежутка $[0, l]$ имеет положительную лебегову меру.

Замечание 2. Мы получили утверждение теоремы, предполагая, что ОМН выполняется всюду в $\operatorname{Im} z \neq 0$. При этом использовалось весьма скромное аналитическое средство: обобщенная формула обращения Стилтьеса. Если же предполагать, что ОМН выполняется не всюду, а лишь при подходе z к $+i\infty$ и к $-i\infty$, то нужны более изощренные аналитические средства (см. [8, 6]).

12°. Теоремы п°п° 8 и 11 сводят задачу об интегральном представлении ядра $K(x, y)$ к задаче исследования ОМН. Для исследования ОМН нужно сначала провести его регуляризацию, затем решить регуляризованное ОМН и, наконец, совершить предельный переход по параметру регуляризации. Для ядер вида (1.1) это было подробно проделано в [1].

Список литературы: 1. *Кацнельсон В. Э.* Интегральные представления эрмитово положительных ядер смешанного типа и обобщенная задача Нехари. I. — Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 05.07.83. № 685. 2. *Arocena R., Cotlar M.* Generalized Toeplitz Kernels and Adamjan-Arov-Krein Moment Problems. — Toeplitz Centennial (Operator Theory, Advances and Applications) Birkhäuser Verlag, 1982, **4**, p. 37-55. 3. *Орлов С. А.* Параметризация предельных матричных кругов, аналитически зависящих от параметра. — Теория функций, функц. анализ и их прил., 1984, вып. 41, с. 96 — 107. 4. *Дубовой В. К.* Индефинитная метрика в интерполяционной задаче Шура для аналитических функций. 4. — Теория функций, функц. анализ и их прил., 1984, вып. 42, с. 55 — 64. 5. *Кацнельсон В. Э.* Методы J-теории в континуальных интерполяционных задачах анализа. Ч. 1. — Рукопись деп. в ВИНИТИ 11.01.83, № 171. 6. *Кацнельсон В. Э.* Континуальные аналоги теоремы Гамбургера—Неванлинны и основные матричные неравенства классических задач. 4. — Теория функций, функц. анализ и их прил., 1983, вып. 40, с. 79 — 90. 7. *Кац И. С.* и *Крейн М. Г.* R-функции — аналитические функции, отображающие верхнюю полуплоскость в себя: — Доп. 1 к русскому переводу монографии Ф. Аткинсона «Дискретные и непрерывные граничные задачи». — М.: Мир, 1968. — 749 с. 8. *Кацнельсон В. Э.* Континуальные аналоги теоремы Гамбургера — Неванлинны и основные матричные неравенства классических задач. 3. — Теория функций, функц. анализ и их прил., 1983, вып. 39, с. 61 — 73.

Поступила в редколлегию 30.05.83.