УДК 517.535.4

Н. В. ГОВОРОВ

ОБ ОДНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКЕ СНИЗУ МОДУЛЯ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ

1. Пусть $f(z)$ — некоторая целая функция порядка $0 < \rho < \infty$ и нормального типа σ_f. Рассмотрим ее индикатор

$$h_f(\theta) = \overline{\lim_{r \to \infty}} h_f(r, \theta), \text{ где } h_f(r, \theta) = r^{-\rho} \ln |f(re^{i\theta})|. \tag{1}$$

Известно [1, с. 97], что для любого $\varepsilon > 0$ равномерно по θ выполняется асимптотическая оценка

$$h_f(r, \theta) < h_f(\theta) + \varepsilon, \quad r > r_\varepsilon, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi. \tag{2}$$

В дальнейшем функцию $h_f(r, \theta)$ будем называть подвижным индикатором функции $f(z)$. Естественно высказать предположение о том, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такую последовательность $\{r_n\} \uparrow \infty$, для которой равномерно по θ выполняется аналогичная оценка снизу

$$h_f(r_n, \theta) > h_f(\theta) - \varepsilon. \tag{3}$$

Однако это предположение является неверным (см., напр., [2, 6]).

Поскольку $h_f(\theta)$ тригонометрически ρ-выпукла [1, с. 74; 3, с. 134], то

$$h_f(\theta) \geqslant \sigma_f \cos\rho(\theta-\theta_*) \text{ при } |\theta-\theta_*| < \pi/(2\rho), \tag{4}$$

где $\sigma_f = \max\limits_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} h_f(\theta) = h_f(\theta_*)$. Поэтому можно сделать предположение, что для любого $\varepsilon > 0$ подвижный индикатор удовлетворяет более слабому, чем (3), неравенству $h_f(r_n, \theta) \geqslant \sigma_f \cos\rho(\theta - \theta_*) - \varepsilon$ при $|\theta-\theta_*| \leqslant \pi/(2\rho)$ для зависящей от ε последовательности $\{r_n\}\uparrow\infty$. Но в настоящей статье будет показано, что и это предположение является неверным. Мы построим такую целую функцию $F(z)$ порядка $0<\rho<\infty$ нормального типа σ_F, для которой существуют такие θ_1 и θ_2, $|\theta_j - \theta_*| \leqslant \pi/(2\rho)$ и такая последовательность $\{x_n\}\uparrow\infty$, что при некотором постоянном $\varepsilon>0$ и $n=1, 2, 3, \ldots$

$$h_F(r, \theta_1) < \sigma_F \cos\rho(\theta_1-\theta_*) - \varepsilon_0, \quad x_{2n-1} \leqslant r \leqslant x_{2n}, \tag{5}$$

$$h_F(r, \theta_2) < \sigma_F \cos\rho(\theta_2-\theta_*) - \varepsilon_0, \quad x_{2n} \leqslant r \leqslant x_{2n+1}. \tag{6}$$

(Для простоты выбирается $\theta_2 = \theta_* = \pi$).

2. Рассмотрим следующую гармоническую в $\operatorname{Im} z > 0$ функцию:

$$\tilde{u}(z) = (\tau/\pi) \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' u_n(z)$$

(всюду в дальнейшем штрих означает пропуск члена, соответствующего $n=0$). Здесь положено

$$u_n(z) = \frac{2ra_n^{\omega+1}\sin\theta}{a_n^2 - 2a_n r \operatorname{sgn} n \cos\theta + r^2}, \quad a_n = 2^{2|n|},$$

$$z = re^{i\theta}, \quad 0<\theta<\pi, \quad \tau>0, \quad 0<\omega<1; \quad \tau, \omega = \mathrm{const}.$$

Обозначая

$$\varphi_n(r) = r^{-\omega} u_n(ri) = \frac{2(a_n/r)^{1+\omega}}{1+(a_n/r)^2}, \quad r_n = a_n\sqrt{\frac{1-\omega}{1+\omega}},$$

легко получить

$$\max_{r>0} \varphi_n(r) = \varphi_n(r_n) = (1+\omega)^{(1+\omega)/2}(1-\omega)^{(1-\omega)/2}. \tag{7}$$

Поскольку $\varphi_n(a_n) = 1$, то

$$\varphi_n(r_n) > 1. \tag{8}$$

Пусть

$$s_n = (\omega^2/8)^{1/(1-\omega)} a_n, \quad t_n = a_n/\sqrt{1+\omega}. \tag{9}$$

Нетрудно убедиться, что $s_n < r_n < t_n < a_n$, а при $n \geqslant n_0(\omega)$ выполняется $a_n < s_{n+1}$.

Очевидно,

$$\varphi_n(s_n) = (\omega^2/4)\left[(\omega^2/8)^{2/(1-\omega)} + 1\right]^{-1} < \omega^2/4 < 1, \tag{10}$$

$$\varphi_n(t_n) = 2(2+\omega)^{-1}(1+\omega)^{(1+\omega)/2} = \exp\int_0^\omega \left[\frac{1}{2}\ln(1+x) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} - \frac{1}{2+x}\right] dx > \exp\int_0^\omega (x/2)\,dx > \exp\int_0^\omega \frac{2x}{x^2+4}\,dx = 1 + (\omega^2/4). \tag{11}$$

Обозначим

$$c_{\omega,1} = \frac{2}{\pi}(1+\omega)^{(1+\omega)/2}(1-\omega)^{(1-\omega)/2}, \quad c_{\omega,2} = \frac{4}{\pi}\,\frac{(1+\omega)^{(1+\omega)/2}}{2+\omega}. \tag{12}$$

Тогда из монотонности функции $\varphi_n(x)$ при $x < r_n$ и $x > r_n$ и из (10) вытекает, что

$$\max_{s_n \leqslant x \leqslant a_n} \varphi_n(x) = \frac{\pi}{2} c_{\omega,1}, \quad \max_{t_n \leqslant x \leqslant a_n} \varphi_n(x) = \frac{\pi}{2} c_{\omega,2}, \quad \max_{a_n \leqslant x \leqslant s_{n+1}} \varphi_n(x) = 1, \tag{13}$$

$$\max_{a_n \leqslant x \leqslant s_{n+1}} \varphi_{n+1}(x) < \omega^2/4, \quad n \geqslant n_0(\omega). \tag{14}$$

Лемма 1. *Имеют место следующие соотношения:*

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \max_{s_n \leqslant x \leqslant t_n} x^{-\omega}\tilde{u}(xi) = \tau c_{\omega,1}, \tag{15}$$

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \max_{t_n \leqslant x \leqslant s_{n+1}} x^{-\omega}\tilde{u}(xi) = \tau c_{\omega,2}.$$

Доказательство. Так как]

$$r^{-\omega}\tilde{u}(ri) = (2\tau/\pi)\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(r), \tag{16}$$

и, в силу (10), (11), (14), с учетом характера монотонности $\varphi_k(r)$

$$\max_{a_n \leqslant r \leqslant s_{n+1}} [\varphi_n(r) + \varphi_{n+1}(r)] \leqslant 1 + (\omega^2/4) < \varphi_{n+1}(t_{n+1}) = \frac{\pi}{2} c_{\omega,2},$$

то, принимая во внимание (13) и (14), мы видим, что для доказательства леммы достаточно установить такие оценки ($n \to \infty$):

$$\sum_{k=1}^{n-1} \max_{s_n \leqslant r \leqslant a_n} \varphi_k(r) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \max_{s_n \leqslant r \leqslant a_n} \varphi_k(r) \equiv \sigma_{n,1} + \sigma_{n,2} = o(1) \tag{17}$$

и

$$\sum_{k=1}^{n-1} \max_{a_n \leqslant r \leqslant s_{n+1}} \varphi_k(r) + \sum_{k=n+2}^{\infty} \max_{a_n \leqslant r \leqslant s_{n+1}} \varphi_k(r) \equiv \lambda_{n,1} + \lambda_{n,2} = o(1). \tag{18}$$

Обозначая число точек $a_n \in [0, r]$ через $\tilde{n}(r)$ и опираясь на соотношения

$$s_n^{\omega+1} < (\omega^2/8)\, a_n^{\omega+1}, \quad a_{n+1} = a_n^2,$$

имеем
$$\lambda_{n,\,1} < \sigma_{n,\,1} < \max_{s_n < r < a_n} \frac{2}{r^{\omega+1}} \int\limits_{4-0}^{a_{n-1}} x^{\omega+1}\, d\tilde{n}(x) <$$
$$< 2a_{n-1}^{\omega+1} s_n^{-\omega-1} \tilde{n}(a_{n-1}) < 2\,(8/\omega^2)^{(1+\omega)/(1-\omega)}\,(n-1)\, a_{n-1}^{\omega+1} a_n^{-\omega-1} <$$
$$< 2\,(8/\omega^2)^{(1+\omega)/(1-\omega)} 2^{-(\omega+1)2^{n-1}} = o(1), \quad n \to \infty. \tag{19}$$

Далее, поскольку $\tilde{n}(x) = [\log_2 \log_2 x] < x^{(1-\omega)/4}$ при $x > x_\omega$, то для достаточно больших n

$$0 < \sigma_{n,\,2} < 2a_n^{1-\omega} \int\limits_{a_{n+1}}^{\infty} x^{\omega-1}\, d\tilde{n}(x) < 2\,(1-\omega)\, a_n^{1-\omega} \times$$
$$\times \int\limits_{a_{n+1}}^{\infty} \tilde{n}(x)\, x^{\omega-2}\, dx < 2\,(1-\omega)\, a_n^{1-\omega} \int\limits_{a_{n+1}}^{\infty} x^{\frac{3}{4}(\omega-1)-1}\, dx =$$
$$= (8/3)\, a_n^{(\omega-1)/2} = o(1), \quad n \to \infty. \tag{20}$$

Аналогично получаем $\lambda_{n,\,2} = o(1)$, $n \to \infty$.
Тогда из (19) и (20) следует лемма.

3. Изучим теперь гармоническую функцию в $\operatorname{Im} z > 0$:

$$u(z) = \frac{r \sin \theta}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' a_n^{\omega} \int\limits_{b_n - \tau a_n}^{b_n + \tau a_n} \frac{1 + \cos \dfrac{\pi}{a_n \tau}(x - a_n)}{x^2 - 2xr\cos\theta + r^2}\, dx, \tag{21}$$

где приняты обозначения раздела 2, а $b_n = a_n \operatorname{sgn} n$.

Лемма 2. *При* $0 < \tau < 1/7$ и $r > 0$ *справедлива оценка*

$$|u(ri) - \tilde{u}(ri)| < 2{,}92\tau\tilde{u}(ri). \tag{22}$$

Действительно,

$$|u(ri) - \tilde{u}(ri)| \leqslant \frac{4}{\pi} r\tau \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\omega+1} \max_{|x-a_n| < a_n\tau} \left| \frac{1}{x^2 + r^2} - \frac{1}{a_n^2 + r^2} \right| <$$
$$< \frac{4r\tau^2\,(2+\tau)}{\pi\,(1-\tau)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{\omega+1}}{a_n^2 + r^2} < 3\tau\tilde{u}(ri).$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Имеет место следующее неравенство:*

$$c_{\omega,\,1} - c_{\omega,\,2} > c_{\omega,\,1}\omega^2/9.$$

В самом деле,

$$1 - c_{\omega,2}/c_{\omega,1} = 1 - (1-\omega)^{(\omega-1)/2}(1+\omega/2)^{-1} =$$
$$= 1 - \exp\int_0^{\omega}\left[\frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2+x}\right]dx >$$
$$> 1 - \exp\int_0^{\omega}(-x/4)\,dx > 1 - \exp\int_0^{\omega}\left(-\frac{2x}{x^2+8}\right)dx =$$
$$= 1 - (1+\omega^2/8)^{-1} > \omega^2/9,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Если $0 < \tau < \omega^2/9$, то при достаточно больших n верны следующие соотношения:*

$$M_n \equiv \max_{s_n < r < t_n} r^{-\omega} u(ri) \geqslant \tau c_{\omega,1}(1-3\tau), \tag{23}$$

$$M_n \leqslant \tau c_{\omega,1}(1+3\tau), \tag{24}$$

$$m_n \equiv \max_{t_n < r < s_{n+1}} r^{-\omega} u(ri) \leqslant \tau c_{\omega,2}(1+3\tau). \tag{25}$$

Лемма 4 вытекает из лемм 1 и 2.

Заметим, что

$$M \equiv \overline{\lim_{n\to\infty}}\, M_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, r^{-\omega} u(ri). \tag{26}$$

Лемма 5. *Если $0 < \tau \leqslant 0{,}001\omega^2$, то при достаточно больших n в обозначениях (23) и (25)*

$$M_n > m_n + \tau\omega^2/16, \quad M > m_n + \tau\omega^2/16.$$

Действительно, опираясь на леммы 3 и 4, при $\tau \leqslant 0{,}001\omega^2$ для достаточно больших n и k получим

$$M_n - m_n \geqslant \tau(c_{\omega,1} - c_{\omega,2}) - 6\tau^2 c_{\omega,1} > \tau\left(\frac{\omega^2}{9} - \frac{24}{\pi}\tau\right) > \tau\omega^2/16.$$

Отсюда легко получается лемма.

Всюду в дальнейшем мы будем считать

$$\tau = 0{,}001\omega^2. \tag{27}$$

Тогда при достаточно больших n

$$M_n > m_n + \frac{\omega^4}{16000}, \quad M > m_n + \frac{\omega^4}{16000}. \tag{28}$$

Лемма 6. *Пусть M определено из (26), а*

$$\theta_0 = 0{,}06\omega^2(1-\omega). \tag{29}$$

Тогда при достаточно больших n

$$\max_{s_n < r < t_n} r^{-\omega} u(re^{i\theta_0}) \leqslant (M/2)\cos(\omega\pi/2).$$

Доказательство. Пусть $s_n \leqslant r \leqslant t_n$, $n \geqslant 1$. Тогда

$$r^{-\omega} u(re^{i\theta_0}) \leqslant \sum_{k \neq 0,\, n} \max_{s_n \leqslant r \leqslant t_n} \left\{ \frac{2}{\pi} r^{1-\omega} a_k^{\omega} \sin\theta_0 \int\limits_{b_k - \tau a_k}^{b_k + \tau a_k} \frac{dx}{(x-r)^2} \right\} +$$
$$+ \frac{2\tau}{\pi} \frac{t_n^{1-\omega} a_n^{\omega+1} \sin\theta_0}{[a_n(1-\tau) - t_n]^2} \equiv \eta_{n,\,1} + \eta_{n,\,2}.$$

Аналогично тому, как это делалось в (19) и (20), можно показать, что

$$\lim_{n \to \infty} \eta_{n,\,1} = 0. \tag{30}$$

Согласно второму из равенств (9)

$$\eta_{n,\,2} = \frac{2\tau}{\pi} (1+\omega)^{(1+\omega)/2} \frac{\sin\theta_0}{[(1-\tau)\sqrt{1+\omega} - 1]^2}.$$

Принимая во внимание (23), (12) и (30), мы видим теперь, что лемма будет доказана после установления неравенства

$$\theta_0 < \frac{1}{2}(1-3\tau)(1-\omega)^{(1-\omega)/2}\left[(1-\tau)\sqrt{1+\omega} - 1\right]^2 \cos(\omega\pi/2). \tag{31}$$

На основании исследования на экстремум

$$(1-\omega)^{(1-\omega)/2} > e^{-1/(2e)} > 0{,}8.$$

Далее, так как принято условие (27) и $0 < \omega < 1$, то $(1-\tau)\sqrt{1+\omega} - 1 > (1 - 0{,}001\omega^2)\left[1 + (\sqrt{2}-1)\omega\right] - 1 > (\sqrt{2} - 1)\omega - 0{,}001\sqrt{2}\,\omega^2 > \omega(0{,}999\sqrt{2} - 1)$.

Поэтому $\frac{1}{2}(1-3\tau)(1-\omega)^{(1-\omega)/2}\left[(1-\tau)\sqrt{1+\omega} - 1\right]^2 \times \cos(\omega\pi/2) > 0{,}4 \cdot 0{,}997\,(0{,}999\sqrt{2} - 1)^2\omega^2(1-\omega) > 0{,}06\omega^2(1-\omega)$.

Но теперь, в силу (29) и (31), мы получаем требуемое.

Теорема 1. *Пусть функция $u(z)$ задана формулой (21), а $v(z)$ — ее сопряженная функция. Тогда подвижный индикатор аналитической в $\operatorname{Im} z > 0$ функции*

$$g(z) = \exp[u(z) + iv(z)] \tag{32}$$

при достаточно больших n ($n > N$) удовлетворяет неравенствам

$$h_g(r,\ \theta_0) < M\cos\omega\left(\theta_0 - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\omega^4(1-\omega)}{1600}, \quad s_n \leqslant r \leqslant t_n, \tag{33}$$

$$h_g\left(r,\ \frac{\pi}{2}\right) < M - \frac{\omega^4(1-\omega)}{1600}, \quad t_n \leqslant r \leqslant s_{n+1}, \tag{34}$$

где θ_0 определено формулой (29).

Отметим, что неравенства (33) и (34) не совсем аналогичны неравенствам (5) и (6), так как, во-первых, $g(z)$ — функция не целая, а во-вторых,

$$M \equiv \overline{\lim_{r\to\infty}} h_g\left(r, \frac{\pi}{2}\right) < \sigma_g \equiv \max_{0\leqslant\theta\leqslant\pi} h_g(\theta),$$

ибо простой подсчет дает $\sigma_g \geqslant h_g(0) \geqslant 2$.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим случай, когда $s_n \leqslant r \leqslant t_n$. Так как, в силу (12) и (27),

$$\frac{\tau}{2} c_{\omega,1}(1-4\tau) > \frac{\tau}{\pi}(1-4\tau) > \frac{\omega^2}{1000\pi}\,0{,}996 > \frac{\omega^4(1-\omega)}{1600},$$

то по леммам 6 и 4 при $n > N_1$

$$h_g(r, \theta_0) < M\cos\omega\left(\theta_0 - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\tau}{2} c_{\omega,1}(1-4\tau) <$$

$$< M\cos\omega\left(\theta_0 - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\omega^4(1-\omega)}{1600}.$$

Пусть теперь $t_n \leqslant r \leqslant s_{n+1}$. Тогда на основании (28) при $n > N_2$

$$h_g\left(r, \frac{\pi}{2}\right) \leqslant m_n < M - \frac{\omega^4}{1600} < M - \frac{\omega^4(1-\omega)}{1600}.$$

Для завершения доказательства теоремы остается положить $N = \max(N_1, N_2)$.

4. Определение. *Будем говорить, что функция* $g(x)$ *удовлетворяет на вещественной оси (или полуоси) условию Гельдера* ($g \in H(\mu)$), *если при* $-a \leqslant x_k \leqslant a$, $a > 0$,

$|g(x_1) - g(x_2)| < A|x_1 - x_2|^\mu$; A, $\mu = \mathrm{const}$, $A > 0$, $0 < \mu \leqslant 1$, *а при* $x_k < -a/2$ *и* $x_k > a/2$

$$|g(x_1) - g(x_2)| < A|x_1^{-1} - x_2^{-1}|^\mu.$$

Очевидно, фиксированное число a можно выбирать произвольно, от этого может лишь изменяться постоянная A.

Лемма 7. *Если функция* $\mu(x)$, *заданная при* $x \geqslant 1$, *имеет производную и* $|\mu'(x)| < Ax^{-1-\sigma}$, $0 < \sigma \leqslant 1$, *то* $\mu \in H(\sigma)$.

Лемма вытекает из таких оценок [5, с. 24]:

$$|\mu(x_1) - \mu(x_2)| \leqslant \left|\int_{x_1}^{x_2} |\mu'(x)|\,dx\right| \leqslant (A/\sigma)|x_1^{-\sigma} - x_2^{-\sigma}| \leqslant (A/\sigma)|x_1^{-1} - x_2^{-1}|^\sigma.$$

Лемма 8. *Пусть* $u(x)$ *есть граничное значение гармонической функции (21) на* $-\infty < x < \infty$. *Тогда* $u'(x) \in H(1-\omega)$, *причем*

$$u'(\pm\infty) = 0. \tag{35}$$

Доказательство. На основании формулы решения задачи Дирихле для полуплоскости

$$u(x)=\begin{cases}\left[1+\cos\frac{\pi}{a_n\tau}(x-a_n)\right]a_n^{\omega},\ x\in[b_n-\tau a_n,\ b_n+\tau a_n],\ n=\pm1,\ldots\\ 0,\ x\bar{\in}\bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty}{}'\,[b_k-\tau a_k,\ b_k+\tau a_k].\end{cases}\tag{36}$$

Достаточно доказать, что $u'(x)\in H(1-\omega)$ при $x\geqslant 1$ и что $u'(+\infty)=0$, так как $u'(x)=-u'(-x)$ и $u'(x)\equiv 0$ при $|x|\leqslant 4$. Легко проверить, что

$$|u'(x)|\leqslant\frac{(1+\tau)^{1-\omega}\pi}{\tau x^{1-\omega}}<\frac{2\pi}{\tau x^{1-\omega}},\ |u''(x)|\leqslant\frac{4\pi^2}{\tau^2 x^{2-\omega}}.\tag{37}$$

Применив теперь лемму 7, получаем требуемое.

Лемма 9. *Если гармоническая в* $\operatorname{Im} z>0$ *функция* $v(z)$ *сопряжена с* $u(z)$, *то*

$$v'(x)\in H(1-\omega),\ v'(\pm\infty)=0.$$

В самом деле, $v(z)$ в $\operatorname{Im} z>0$ имеет вид

$$v(z)=\operatorname{Im}\left[\frac{z}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t)\,dt}{t(t-z)}\right]+C,\ C=\text{const}.\tag{38}$$

Сходимость интеграла при $t=0$ следует из (36), а при $t=\pm\infty$ вытекает из оценки

$$0<u(t)<2(1+\tau)^{-\omega}t^{\omega}<3t^{\omega},\tag{39}$$

получающейся также из (36). Тогда на основании формул Сохоцкого [4, с. 41] и условия $u(t)=u(-t)$ имеем два представления:

$$v(x)=\frac{x}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t)\,dt}{t(x-t)}+C=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t)}{x-t}\,dt+C,\tag{40}$$

где интегралы берутся в смысле главного значения по Коши (первый при $t=x$, второй — при $t=x$ и $t=\infty$). Докажем, что

$$v'(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{u'(t)}{x-t}\,dt.\tag{41}$$

Положим $c_n=(a_{n+1}+a_n)/2$ и выберем n столь большим, что $2|x|<c_n$. Дополним отрезок $[-c_n,\ c_n]$ до замкнутого гладкого контура L_n с помощью некоторой гладкой кривой l_n, лежащей в полукольце $(c_n<|z|<\frac{5}{4}c_n)\cap(\operatorname{Im} z>0)$. Затем, полагая

$$\psi(z)=\begin{cases}u(z),\ -c_n<z<c_n,\\ 0,\ z\in L_n,\end{cases}$$

можно записать

$$v(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{L_n} \frac{\psi(t)}{x-t}\, dt + \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \geqslant cn} \frac{u(t)}{x-t}\, dt.$$

Но так как $\psi \in H$ на L_n, то [4, с. 46]

$$v'(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{L_n} \frac{\psi'(t)}{x-t}\, dt + \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \geqslant cn} \frac{u(t)}{(x-t)^2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \leqslant cn} \frac{u'(t)}{x-t}\, dt + \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \geqslant cn} \frac{u(t)}{(x-t)^2}\, dt.$$

Для получения (41) остается устремить $n \to \infty$ и воспользоваться оценкой (39).

Интересно отметить, что формула

$$v'(x) = \frac{x}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u'(t)}{t(x-t)}\, dt,$$

вообще говоря, не верна; она справедлива только при условии

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u'(t)\, t^{-1}\, dt = 0.$$

Применяя теперь лемму 8 и свойства интеграла типа Коши со степенной особенностью его плотности [4, с. 81]*, из (41) получаем то, что требовалось доказать.

Следствие. *В условиях леммы 8 верна оценка*

$$|v'(t)| < Bt^{\omega-1} \ (t \geqslant 0), \ B = \text{const}. \tag{42}$$

Лемма 10. *В предположениях леммы 8*

$$u(t)/t \in H(1-\omega), \ \lim_{t \to \pm\infty} u(t)/t = 0, \tag{43}$$

$$v(t)/t \in H(1-\omega), \ \lim_{t \to \pm\infty} v(t)/t = 0. \tag{44}$$

Действительно, на основании (37) и (39) $|[u(x)/x]'| \leqslant 4\pi/(\tau x^{2-\omega})$, откуда по лемме 7 получаем (43). Далее, в силу первого из равенств (40) и свойств предельных значений интеграла типа Коши [4, с. 52, 81], $v(x)/x \in H(1-\omega)$ при $|x| \geqslant 1$. Кроме того, $v(-x) = -v(x)$ и, как видно из (40), $v(x)$ при $-4 < x < 4$ дифференцируема, поэтому $v(x)/x \in H(1-\omega)$ и на $|x| \leqslant 1$. Второе из соотношений (44) доказывается аналогично с помощью (40).

* Здесь целесообразно разбить промежуток интегрирования на три: $|t| \leqslant 1$, $t > 1$, $t < -1$ и в последних двух из получившихся интегралов сделать замену переменных: $\zeta = 1/x$, $s = 1/t$.

Лемма 11. *Если выполнены условия леммы 8, то*

$$|u(z)| < K|z|^{\omega}, \quad |v(z)| < K|z|^{\omega}, \quad K = \text{const}. \tag{45}$$

Доказательство. Пусть $g(z) = u(z) + iv(z)$. Из леммы 10 следует, что $g(x)/x \in H(1-\omega)$. Но тогда, как доказано в [5, с. 87], $g(z)/z \in H(1-\omega)$ и в $\operatorname{Im} z > 0$*, а значит, в частности,

$$|g(z)/z| < K|z|^{\omega-1}, \text{ ибо } \lim_{x\to\infty} g(x)/x = 0.$$

Отсюда и следует лемма.

5. Исследуем теперь в $\operatorname{Im} z > 0$, исходя из (32), аналитические функции

$$\nu(z) = g(z) + l(-iz)^{\omega}, \quad \beta(z) = e^{\nu(z)}, \tag{46}$$

где $(-iz)^{\omega} > 0$ при $z/i > 0$, а

$$l = B(\omega \sin(\omega\pi/2))^{-1}. \tag{47}$$

Здесь B — та же постоянная, что и в (42). При $x > 0$

$$[\arg \beta(x)]' = v'(x) - l\omega x^{\omega-1} \sin(\omega\pi/2) < 0,$$

т. е. $\operatorname{Im} \nu(x)$ монотонно убывает при $x \to +\infty$. Далее

$$h_{\beta}(r,\theta) \equiv r^{-\omega} \ln|\beta(re^{i\theta}) = r^{-\omega} u(re^{i\theta}) + l \cos\omega\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \tag{48}$$

откуда в соответствии с (26)

$$h_{\beta}(\pi/2) = M + l. \tag{49}$$

Из дальнейшего станет ясно, что

$$h_{\beta}(\pi/2) = \max_{0<\theta<\pi} h_{\beta}(\theta). \tag{50}$$

Лемма 12. *Если N выбрано тем же, что и в теореме 1, то при $n > N$*

$$h_{\beta}(r, \theta_0) < (M+l)\cos\omega\left(\theta_0 - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\omega^4(1-\omega)}{1600}, \quad s_n \leqslant r \leqslant t_n,$$

$$h_{\beta}(r, \pi/2) < (M+l) - \frac{\omega^4(1-\omega)}{1600}, \quad t_n \leqslant r \leqslant s_{n+1}.$$

Лемма вытекает из теоремы 1 и равенства (48).

Отобразим теперь полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на плоскость ζ с разрезом $0 \leqslant t \leqslant \infty$ с помощью функции $z^2 = \zeta$. В области $0 < \arg\zeta < 2\pi$ получим функцию

$$\nu_0(\zeta) = \nu(\sqrt{\zeta}), \tag{51}$$

* При этом сначала нужно с помощью отображения, например $\zeta = 1/(z + i)$ перейти к конечной области.

где $\sqrt{\zeta} > 0$ на верхнем берегу разреза. Пусть

$$\operatorname{Re} \nu_0(\zeta) = u_0(\zeta), \ \operatorname{Im} \nu_0(\zeta) = v_0(\zeta).$$

Предельные значения последних двух функций сверху и снизу на контуре $0 < t < \infty$ связаны соотношениями $u_0^+(t) = u_0^-(t)$, $v_0^+(t) = -v_0^-(t)$. Следовательно, $\nu_0(\zeta)$ является решением краевой задачи Римана со скачком [4, гл. II]:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = 2iv_0^+(t), \ 0 < t < \infty.$$

Тогда легко показать [4, гл. II; 7], что $\nu_0(\zeta)$, как одно из ее решений, представимо в виде

$$\nu_0(\zeta) = I(\zeta) + \Gamma(\zeta), \ I(\zeta) = \frac{\zeta}{\pi} \int_0^\infty \frac{v_0^+(t)\, dt}{t(t-\zeta)}, \tag{52}$$

где $\Gamma(\zeta)$ — некоторая целая функция. Обозначим $\omega/2 = \rho$. Опираясь на (51) и леммы 10 и 11, можно заключить, что при $t \geqslant 1$

$$|[v_0^+(t)/t]'| \leqslant |\nu'(\sqrt{t})|/(2t^{3/2}) + |\nu(\sqrt{t})|/t^2 \leqslant Lt^{\rho-2}.$$

Значит, по лемме 7

$$v_0^+(t)/t \in H(1-\rho) \ \text{при} \ t \geqslant 1, \ \lim_{t\to\infty} v_0^+(t)/t = 0.$$

Кроме того, $v_0^+(t) \in H(1/2)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $v_0^+(0) = 0$. Тогда так же, как в лемме 11, можно показать, что $I(\zeta) = O(|\zeta|^\rho)$ $(\zeta \to \infty)$.

Но так как, в силу (46), (51) и леммы 11, $\nu_0(\zeta) = O(|\zeta|^\rho)$ $(\zeta \to \infty)$ и $\nu_0(0) = I(0) = 0$, то $\Gamma(\zeta) \equiv 0$, т. е.

$$\nu_0(\zeta) = \frac{\zeta}{\pi} \int_0^\infty \frac{v_0^+(t)}{t(t-\zeta)}\, dt.$$

Положим теперь $n(x) = [-v_0^+(x)/\pi]$ $(x \geqslant 0)$.

Так как $\operatorname{Im} \nu(x)$ монотонно убывает, то $n(x)$ монотонно растет, причем $n(x) \equiv 0$ при $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$ для малого $\varepsilon > 0$. На основании этого функции $\nu_0(\zeta)$ и

$$\mu(\zeta) = -\zeta \int_0^\infty \frac{n(t)}{t(t-\zeta)}\, dt$$

при $0 < \alpha < \pi$ связаны неравенством

$$|\mu(re^{i\alpha}) - \nu_0(re^{i\alpha})| \leqslant r \int_\varepsilon^\infty \frac{dt}{t\,|t - re^{i\alpha}|} < C_\alpha \ln r. \tag{53}$$

Рассмотрим теперь целую функцию с положительными нулями

$$F_\rho(\zeta) = \exp\{\mu(\zeta)\}. \tag{54}$$

Из изложенного следует, что ее порядок равен ρ, $0 < \rho < 1/2$, причем, если принять во внимание (53), то при $r \to \infty$

$$r^{-\rho} \ln |F_\rho(re^{i\theta})| = R^{-\omega} \ln |\beta(Re^{i\alpha})| + o(1), \tag{55}$$

где $R = \sqrt{r}$, $\alpha = \theta/2$. Сопоставляя это с (49), найдем

$$\sigma_{F_\rho} \equiv \max_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} h_{F_\rho}(\theta) = h_{F_\rho}(\pi) = M + l. \tag{56}$$

Введем теперь последовательность $x_n \uparrow \infty$, полагая $x_{2n-1} = s_{n+N}^2$, $x_{2n} = t_{n+N}^2$, $n = 1, 2, \ldots$, где N — то же самое, что и в теореме 1. Тогда из леммы 12 и соотношения (55) вытекает

Теорема 2. *Если функция $F_\rho(\zeta)$ задана формулой (54), а $\theta_1 = 0{,}48\rho^2(1 - 2\rho)$, $0 < \rho < 1/2$, то при $n = 1, 2, 3, \ldots$*

$$h_{F_\rho}(r, \theta_1) < \sigma_{F_\rho} \cos\rho(\theta_1 - \pi) - 0{,}01\rho^4(1 - 2\rho),\ x_{2n-1} \leqslant r \leqslant x_{2n}, \tag{57}$$

$$h_{F_\rho}(r, \pi) < \sigma_{F_\rho} - 0{,}01\rho^4(1 - 2\rho),\ x_{2n} \leqslant r \leqslant x_{2n+1}. \tag{58}$$

Таким образом, пример целой функции, для которой справедливы неравенства вида (5) и (6), построен для случая $0 < \rho < 1/2$. Функцию порядка $\rho \geqslant 1/2$ с теми же свойствами можно выбрать, например, в такой форме:

$$\tilde{F}(z) = F_{\rho/m}((-1)^{m+1} z^m), \quad \text{где } m = [2\rho] + 1.$$

Сформулируем окончательный результат.

Теорема 3. *Если $0 < \rho < \infty$, а $\theta_1 = \pi\left(1 - \frac{1}{m}\right) + 0{,}48 \times \frac{\rho^2}{m^3}\left(1 - \frac{2\rho}{m}\right)$, то $h_{\tilde{F}}(\pi) = \sigma_{\tilde{F}}$ и при $n = 1, 2, 3, \ldots$*

$$h_{\tilde{F}}(r, \theta_1) < \sigma_{\tilde{F}} \cos\rho(\theta_1 - \pi) - 0{,}01\frac{\rho^4}{m^4}\left(1 - \frac{2\rho}{m}\right),$$
$$x_{2n-1}^{1/m} \leqslant r \leqslant x_{2n}^{1/m};$$

$$h_{\tilde{F}}(r, \pi) < \sigma_{\tilde{F}} - 0{,}01\frac{\rho^4}{m^4}\left(1 - \frac{2\rho}{m}\right),$$
$$x_{2n}^{1/m} \leqslant r \leqslant x_{2n+1}^{1/m}.$$

Список литературы: 1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: Гостехиздат, 1956. — 632 с. 2. *Гольдберг А. А.* Пример целой функции конечного порядка с дефектным неасимптотическим значением. — Науч. зап. Ужгород. ун-та, 1957, **18**, с. 191—194. 3. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. — М.: Физматгиз, 1962. — 200 с. 4. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. — М.: Физматгиз, 1963. — 639 с. 5. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.—М.: Физматгиз, 1962.—599 с. 6. *Аракелян Н. У.*

Целые функции конечного порядка с бесконечным множеством дефектных значений. — Докл. АН СССР, 1966, **170**, № 5, с. 999 — 1002. 7. *Говоров Н. В.* О краевой задаче Римана с бесконечным индексом.—Докл. АН СССР. 1964, **154**, № 6, с. 1247 — 1249.

Поступила в редколлегию 23. 06. 83.