УДК 517.968

Ю. В. ГАНДЕЛЬ, Т. С. ПОЛЯНСКАЯ

СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕКОТОРЫХ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1°. Ряд задач математической физики приводит к так называемым парным рядам Фурье вида

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx = 0, \quad x \in CE, \tag{1}$$

$$bA_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \varepsilon_n)(nA_n \cos nx + nB_n \sin nx) = f(x), \ x \in E, \tag{2}$$

где

$$E = \bigcup_{k=1}^{m} (\alpha_k, \ \beta_k), \quad CE = [-\pi, \ \pi] \setminus E,$$

$$-\pi < \alpha_1 < \beta_1 < \ldots < \alpha_m < \beta_m < \pi;$$

гладкая функция $f(x)$, $x \in \bar{E}$, константа b и последовательность ε_n, $n \in \boldsymbol{N}$ заданы, причем $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$ не медленнее, чем $\frac{c}{n^2}$.

Коэффициенты A_0; A_n, B_n, $n \in \boldsymbol{N}$ подлежат определению. Континуальный аналог уравнений (1) — (2) — парные интегральные уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = 0, \quad x \in CE, \tag{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda| C(\lambda)(1 + \varepsilon(\lambda)) e^{i\lambda x} d\lambda = f(x), \quad x \in E. \tag{4}$$

Здесь

$$E = \bigcup_{k=1}^{m} (a_k, \ b_k), \ CE = \boldsymbol{R} \setminus E; \ -\infty < a_1 < b_1 < \ldots < a_n < b_n < +\infty;$$

$$f(x), \quad x \in E; \quad \varepsilon(\lambda), \quad \lambda \in \boldsymbol{R} -$$

заданные функции; $C(\lambda)$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$ — неизвестная функция.

Следуя установившейся традиции, стараются парные уравнения свести к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. С другой стороны, в связи с задачами дифракции волн на решетках был разработан метод решения парных уравнений типа (1) — (2), основанный на задаче Римана — Гильберта [I].

Для решения прикладных задач аэрогидродинамики был предложен эффективный численный метод решения сингулярных интегральных уравнений — так называемый метод дискретных вихрей [2]. Его обоснованию и дальнейшему развитию посвящено много работ (см., например, [3—4)].

Предложение применить этот метод для приближенного решения парных уравнений (1) — (2) и (3) — (4) было сделано и обосновано в работах [5, 6]. В [7] указанный приближенный метод предлагалось применить для решения следующей смешанной краевой задачи математической физики.

Ищется функция $u = u(x, z)$, непрерывная в замкнутой полосе $|z| \leqslant \frac{H}{2}$, 2π-периодическая по x, удовлетворяющая уравнению Лапласа в открытой полосе

$$\Delta u = 0, \quad |z| < \frac{H}{2}$$

и следующим граничным условиям:

$$\frac{\partial u}{\partial z}\left(x, \frac{H}{2}\right) = f_1(x), \quad x \in E_1,$$

$$u\left(x, \frac{H}{2}\right) = 0, \quad x \in CE_1, \quad \frac{\partial u}{\partial z}\left(x, -\frac{H}{2}\right) = f_2(x), \quad x \in E_2,$$

$$u\left(x, -\frac{H}{2}\right) = 0, \quad x \in CE_2,$$

где

$$E_i = \bigcup_{k=1}^{m_i} (\alpha_{ik}, \beta_{ik}), \quad -\pi < \alpha_{i1} < \beta_{i1} < \ldots <$$

$$< \alpha_{im_i} < \beta_{im_i} < \pi, \; i = 1, 2; \quad f_i(x), \; x \in E. —$$

заданные гладкие функции. Кроме того, для обеспечения единственности решения требуется, чтобы $|\nabla u(x, z)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right)$, где ρ — расстояние от точки (x, z), $x \in \boldsymbol{R}$, $|z| \leqslant \frac{H}{2}$ до границы множества $\left\{(x, z) : x \in E_i, \; z = (-1)^{i-1}\frac{H}{2}, \; i = 1, 2\right\}$. Это так называемые «условия на ребре».

Данная краевая задача приводит к системе парных сумматорных уравнений типа (1) — (2):

$$a_0 + \frac{b_0 H}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n)\cos nx + (C_n + D_n)\sin nx = 0, \; x \in CE_1, \quad (5)$$

$$b_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(nA_n \operatorname{th}\frac{nH}{2}+nB_n \operatorname{cth}\frac{nH}{2}\right)\cos nx+\right.$$

$$\left.+\left(nC_n \operatorname{th}\frac{nH}{2}+nD_n \operatorname{cth}\frac{nH}{2}\right)\sin nx\right\}=f_1(x),\quad x\in E_1, \tag{6}$$

$$a_0-\frac{b_0H}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n-B_n)\cos nx+(C_n-D_n)\sin nx=0,\ x\in CE_2, \tag{7}$$

$$b_0-\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(nA_n \operatorname{th}\frac{nH}{2}-nB_n \operatorname{cth}\frac{nH}{2}\right)\cos nx+\right.$$

$$\left.+\left(nC_n \operatorname{th}\frac{nH}{2}-nD_n \operatorname{cth}\frac{nH}{2}\right)\sin nx\right\}=f_2(x),\quad x\in E_2. \tag{8}$$

Действуя так же, как и при сведении парного уравнения (1)—(2) к сингулярному уравнению [5, 7], вводим в рассмотрение две функции

$$F_i(x)=\sum_{n=1}^{\infty}-n(A_n-(-1)^i B_n)\sin nx+n(C_n-$$
$$-(-1)^i D_n)\cos nx,\ |x|<\pi.$$

Из (5) и (7) следует, что

$$F_i(x)=0,\quad x\in CE_i,\quad i=1,\ 2 \tag{9}$$

и еще m_1+m_2 соотношений

$$\int_{\alpha_{ik}}^{\beta_{ik}} F_i(y)\,dy=0,\quad k=1,\ \ldots,\ m_i;\quad i=1,\ 2. \tag{10}$$

Из представлений для $F_i(x)$, $i=1,\ 2$ с учетом (9) находим

$$A_n-(-1)^i B_n=-\frac{1}{\pi n}\int_{E_i}F_i(y)\sin ny\,dy,\quad i=1,\ 2,$$

$$C_n-(-1)^i D_n=\frac{1}{\pi n}\int_{E_i}F_i(y)\cos ny\,dy,\quad i=1,\ 2,$$

а из (5) и (7) при $x=\pi$

$$a_0-(-1)^i\frac{b_0H}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(A_n-(-1)^i B_n),\quad i=1,\ 2,$$

откуда следует, что все искомые коэффициенты a_0, b_0; A_n, B_n, C_n, D_n, $n\in \boldsymbol{N}$ выражаются через две функции $F_i(x)$, $x\in E_i$, для определения которых из (6) и (8) получаем [7] систему двух сингулярных интегральных уравнений:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{E_1}\frac{F_1(y)\,dy}{y-x}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{E_1}K_1(x,\ y)\,F_1(y)\,dy-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{E_2}K_2(x,\ y)\,F_2(y)\,dy=-f_1(x),\quad x\in E_1,\tag{11}$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{E_2}\frac{F_2(y)\,dy}{y-x}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{E_2}K_1(x,\ y)\,F_2(y)\,dy-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{E_1}K_2(x,\ y)\,F_1(y)\,dy=f_2(x),\quad x\in E_2,\tag{12}$$

где $K_1(x,\ y)=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{y-x}{2}-\frac{1}{y-x}+\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon_{1n}\sin n\,(y-x)+\frac{y}{2H}$;

$$K_2(x,\ y)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_{2n}\sin n\,(y-x)+\frac{y}{2H};\quad \varepsilon_{1n}=\frac{4e^{-2nH}}{1-e^{-2nH}};$$

$$\varepsilon_{2n}=\frac{4e^{-nH}}{1-e^{-nH}}.$$

Решение уравнений (11), (12) в соответствии с «условиями на ребрах», сформулированными выше, ищем в классе функций, сужение которых на интервалы $(\alpha_{ik},\ \beta_{ik})$ представляется в виде

$$F_i(y)\Big|_{y\in(\alpha_{ik},\ \beta_{ik})}\equiv F_{ik}(y)=\frac{u_{ik}(y)}{\sqrt{(\beta_{ik}-y)\,(y-\alpha_{ik})}},\tag{13}$$

$$k=1,\ \ldots,\ m_i;\ i=1,\ 2,\ \text{где}\ u_{ik}(y),\ y\in[\alpha_{ik},\ \beta_{ik}]$$

непрерывна по Гельдеру и не обращается в нуль на границе.

Кроме того, должны выполняться условия (10). При этом, как следует из теории сингулярных интегральных уравнений, характеристические уравнения, соответствующие (11) и (12), однозначно разрешимы.

Приближенное решение рассматриваемой краевой задачи теперь может быть получено с помощью одной модификации метода дискретных вихрей, так называемым методом дискретных особенностей. Это удается благодаря тому, что в каждом из уравнений системы (11) — (12) имеется сингулярный интеграл лишь по одному из множеств E_s, $s=1,\ 2$.

Действуя так же, как и в случае одного сингулярного интегрального уравнения на системе отрезков [4], запишем дискретные аналоги сингулярных интегральных уравнений (11), (12) и дополнительных условий (10).

Пусть $y_i^{(sk)} = \frac{\beta_{sk} - \alpha_{sk}}{2} \cos \frac{2i-1}{2n_{sk}} \pi + \frac{\beta_{sk} + \alpha_{sk}}{2}$, $i = 1, \ldots, n_{sk}$;

$$x_j^{(sk)} = \frac{\beta_{sk} - \alpha_{sk}}{2} \cos \frac{j}{n_{sk}} \pi + \frac{\beta_{sk} + \alpha_{sk}}{2}, \quad j = 1, \ldots, n_{sk} - 1, \quad k = 1, \ldots, m_s, \quad s = 1, 2.$$

Рассматривая уравнения (11) и (12) соответственно при $s = 1$ и $s=2$ в $n_{s1} - 1 + n_{s2} - 1 + \ldots + n_{sm_s} - 1$ точках $x = x_j^{(sk)}$ и заменяя интегралы по каждому из интервалов $(\alpha_{sk}, \beta_{sk})$ с учетом (13) гауссовыми квадратурами, получаем $n - (m_1 + m_2)$, где $n = n_{11} + \ldots + n_{1m_1} + n_{21} + \ldots + n_{2m_2}$ линейных алгебраических уравнений относительно n искомых величин $u_{sk,\, n_{sk}}(y^{(sk)})$ — приближенных значений искомых функций $u_{sk}(y)$ в точках $y_i^{(sk)}$.

Еще $m_1 + m_2$ линейных алгебраических уравнений получаем, подставляя представления (13) в соотношения (10) и заменяя в них интегралы гауссовыми квадратурами.

Решая полученную систему n уравнений с n неизвестными, найдем приближенные значения функций $F_s(y)$, $y \in E_s$, $s = 1, 2$, после чего могут быть вычислены искомые коэффициенты a_0, b_0, A_n, B_n, C_n, D_n, $n \in \boldsymbol{N}$.

Отметим еще, что значения функции $u(x, z)$ на тех участках границы полосы $|z| \leqslant \frac{H}{2}$, где она не задана (а задана ее нормальная производная), могут быть вычислены непосредственно через решение системы сингулярных интегральных уравнений (11) — (12):

$$u\left(x, (-1)^{i-1} \frac{H}{2}\right) = \int_{-\pi}^{x} F_i(y)\, dy, \quad i = 1, 2; \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Обоснованию решения системы сингулярных интегральных уравнений, полученного методом дискретных особенностей, посвящена вся остальная часть работы.

2^0. Пусть заданы n систем интервалов действительной оси $E_i = \bigcup_{k=1}^{m_i} E_{ik}$, где $E_{ik} = (a_{ik}, b_{ik})$, $-\infty < a_{i1} < b_{i1} < \ldots < a_{im_i} < b_{im_i} < +\infty$, $i = 1, \ldots, n$.

Рассматривается система сингулярных интегральных уравнений

$$\frac{1}{\pi} \int_{E_i} \frac{F_i(y)\, dy}{y - x} + \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{n} \int_{E_l} K_{il}(x, y) F_l(y)\, dy = f_i(x), \quad x \in E_i, \tag{14}$$
$$i = 1, \ldots, n,$$

где $f_i(x)$, $x \in \overline{E}_i$ — μ раз непрерывно дифференцируемая функция и ее μ-я производная удовлетворяет условию Гельдера с показателем α, $0 < \alpha \leqslant 1$ (в этом случае мы будем писать $f_i \in C^{\mu+\alpha}$),

$K_{il}(x, y)$, $x \in \overline{E}_i$, $y \in \overline{E}_l$ обладает этим же свойством по каждой из переменных равномерно относительно другой переменной.

Функции $F_i(y)$, $y \in E_i$, $i = 1, \ldots, n$ подлежат определению в классе функций, представимых в виде

$$F_i(y) = \frac{\Phi_i(y)}{\sqrt{\prod\limits_{i=1}^{m_i} |b_{ik} - y| \cdot |y - a_{ik}|}}, \quad y \in E_i. \tag{15}$$

Здесь $\Phi_i(y)$, $y \in \overline{E}_i$ — непрерывная по Гельдеру функция, не обращающаяся в нуль на границе.

Кроме того, функции $F_i(y)$, $y \in E_i$, $i = 1, \ldots, n$ удовлетворяют $m = m_1 + \ldots + m_n$ условиям:

$$\int\limits_{E_{ik}} F_i(y)\, dy = 0, \; k = 1, \ldots, m_i; \quad i = 1, \ldots, n. \tag{16}$$

Преобразуем систему (14) с n неизвестными функциями $F_i(y)$, $y \in E_i$ в систему m уравнений с $m = m_1 + \ldots + m_n$ неизвестными функциями $F_{il}(y) = F_i(y)|_{y \in E_{il}}$, представимыми в соответствии с (15) в виде

$$F_{il}(y) = \frac{u_{il}(y)}{\sqrt{(b_{il} - y)(y - a_{il})}}, \; y \in E_{il}, \; l = 1, \ldots, m_i, \; i = 1, \ldots, n, \tag{17}$$

($u_{il}(y)$, $y \in \overline{E}_{il}$ непрерывны по Гельдеру);

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{E_{is}} \frac{u_{is}(y)}{y - x} \frac{dy}{\sqrt{(b_{is} - y)(y - a_{is})}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^{m_i} \frac{1}{\pi} \int\limits_{E_{ik}} \frac{u_{ik}(y)}{y - x} \frac{dy}{\sqrt{(b_{ik} - y)(y - a_{ik})}} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_l} \frac{1}{\pi} \int\limits_{E_{lj}} K_{il}(x, y)\, u_{lj}(y) \frac{dy}{\sqrt{(b_{lj} - y)(y - a_{lj})}} = f_{is}(x), \; x \in E_{is},$$

$$s = 1, \ldots, m_i; \quad i = 1, \ldots, n, \tag{18}$$

где $f_{il}(x) = f_i(x)|_{x \in E_{il}}$. Отметим еще, что в каждом уравнении системы (18) имеется сингулярный интеграл лишь по одному интервалу E_{is}.

Кроме системы уравнений (18) для неизвестных функций $u_{ik}(y)$ в силу (16), с учетом (17), имеем еще m уравнений:

$$\int\limits_{E_{ik}} \frac{u_{ik}(y)\, dy}{\sqrt{(b_{ik} - y)(y - a_{ik})}} = 0, \quad k = 1, \ldots, m_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{19}$$

Далее в уравнениях (18), (19) произведем в каждом из интегралов по интервалам E_{ij}, $j=1, \ldots, m_i$, $i=1, \ldots, n$ замену переменных

$$g_{ij}:(-1,\ 1)\to E_{ij}:\tau\to \frac{b_{ij}-a_{ij}}{2}\tau+\frac{b_{ij}+a_{ij}}{2}$$

и обозначим

$$u_{ij}(g_{ij}(\tau))=v_{m_1+\ldots+m_{i-1}+j}(\tau),\quad \frac{b_{ij}-a_{ij}}{2}f_{ij}(g_{ij}(t))=$$
$$=h_{m_1+\ldots+m_{i-1}+j}(t),\quad j=1,\ \ldots,\ m;$$

далее при $i\neq l$, а также при $i=l$ и $j=k$:

$$\frac{b_{ij}-a_{ij}}{2}K_{il}(g_{ij}(t),\ g_{lk}(\tau))=Q_{m_1+\ldots+m_{i-1}+j,\ m_1+\ldots+m_{l-1}+k}(t,\ \tau),$$
$$j=1,\ \ldots,\ m_i,\ k=1,\ \ldots,\ m_l;$$

а при $j\neq k$;

$$\frac{b_{ij}-a_{ij}}{2}\left\{\frac{1}{g_{ik}(\tau)-g_{ij}(t)}+K_{ii}(g_{ij}(t),\ g_{ik}(\tau))\right\}=$$
$$=Q_{m_1+\ldots+m_{i-1}+j,\ m_1+\ldots+m_{i-1}+k}(t,\ \tau);\quad j,\ k=1,\ \ldots,\ m_i,\quad i=$$
$$=1,\ \ldots,\ n.$$

Теперь система (18), (19) примет вид

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{v_i(\tau)\,d\tau}{(\tau-t)\sqrt{1-\tau^2}}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{-1}^{1}Q_{ik}(t,\ \tau)\frac{v_k(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=h_i(t),\ t\in(-1,\ 1), \tag{20}$$

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{v_i(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=0,\quad i=1,\ \ldots,\ m, \tag{21}$$

где $h_i(t)\in C^{\mu+\alpha}_{[-1,\ 1]}$, а $Q_{ik}(t,\ \tau)$ обладает тем же свойством по каждой из переменных, равномерно относительно другой переменной.

Далее, используя результаты работы [8], обоснуем алгоритм численного решения систем сингулярных интегральных уравнений, который был описан в предыдущем пункте. Введем обозначения для двух типов интерполяционных полиномов Лагранжа

$$(L_n^{(1)}v)(\tau)=\sum_{i=1}^{n}v(\tau_i^{(n)})\,l_i^{(n)}(\tau),$$

где $\{\tau_i^{(n)}\}_{i=1}^{n}$ — множество нулей полиномов Чебышева первого рода $T_n(\tau)=\cos(n\arccos\tau)$ и

$$(L_{n-1}^{(2)}v)(t)=\sum_{j=1}^{n-1}v(t_j^{(n)})\,l_j^{(n-1)}(t),$$

где $\{t_j^{(n)}\}_{j=1}^{n-1}$ — множество нулей полиномов Чебышева второго рода

$$U_{n-1}(t) = \frac{\sin(n \arccos t)}{\sin(\arccos t)}.$$

Обозначим $v_{k,n}(t) \equiv (L_n^{(1)} v_{k,n})(t)$, $k = 1, \ldots, m$ и рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} v_{k,n}(\tau_i^{(n)}) \left\{ \frac{1}{\tau_i^{(n)} - t_j^{(n)}} + \sum_{l=1}^{m} Q_{kl}(t_j^{(n)}, \tau_i^{(n)}) \right\} \frac{1}{n} = h_k(t_j^{(n)}), \ j = 1, \ldots, n-1; \quad k = 1, \ldots, m; \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_{k,n}(\tau_i^{(n)}) = 0, \ j = n; \quad k = 1, \ldots, m, \tag{23}$$

которая получается из (18), (19) применением к левой и правой частям (18) оператора $L_{n-1}^{(2)}$, заменой $v_k(\tau)$ на $(L_n^{(1)} v_k)(\tau)$ и последующим вычислением интегралов с помощью гауссовых квадратур.

3^0. Оказывается, что если система (18), (19) однозначно разрешима в классе функций, определяемом представлениями (17), то для достаточно больших n система линейных алгебраических уравнений (22) разрешима и ее решение в определенном смысле сходится к решению системы сингулярных интегральных уравнений (18), удовлетворяющему условиям (19).

Обозначим $\omega_1(t) = (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\omega_2(t) = (1 - t^2)^{\frac{1}{2}}$. Как обычно, $L_{\omega_i}^2$ — гильбертово пространство функций на $(-1, 1)$ со скалярным произведением $(u, v)_{\omega_i} = \int_{-1}^{1} u(t)\bar{v}(t)\omega_i(t)\,dt$. Пусть, далее, $\vec{L}_{\omega_i}^2$ — гильбертовы пространства вектор-функций $\vec{v}(t) = (v_k(t))_{k=1}^m$, $v_k \in L_{\omega_i}^2$, $k = 1, \ldots, m$; $i = 1, 2$ со скалярным произведением $(\vec{v}, \vec{u})_{\omega_i} = \sum_{k=1}^{m} (v_k, u_k)_{\omega_i}$ и нормой $\|\vec{v}\|_{\omega_i}^2 = \sum_{k=1}^{m} \int_{-1}^{1} |v_k(t)|^2 \omega_i(t)\,dt$.

Пусть $L_{\omega_i}^{2,0} = \left\{ v(t) \in L_{\omega_i}^2 : \int_{-1}^{1} v(t)\omega_i(t)\,dt = 0 \right\}$ — ортогональное дополнение в $L_{\omega_i}^2$ к функции $u(t) \equiv 1$, $t \in (-1, 1)$ и, наконец, $\vec{L}_{\omega_1}^{2,0} = \{ \vec{v} \in \vec{L}_{\omega_1}^2 : (\vec{v}, \vec{e}_k)_{\omega_1} = 0, \ k = 1, \ldots, m \}$, где вектор-функция $\vec{e}_k(t) = (\delta_{ki})_{i=1}^m$, $t \in (-1, 1)$, а $\delta_{ki} = 1$ при $i = k$ и $\delta_{ki} = 0$ при

$i \neq k$. Как известно, оператор A: $(Av)(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{v(\tau)\,d\tau}{(\tau - t)\sqrt{1-\tau^2}}$ непрерывно обратим в паре пространств $(L^{2,\,0}_{\omega_1},\ L^2_{\omega_2})$, поэтому и оператор $(\hat{A}\vec{v})(t) = ((Av_k)(t))_{k=1}^m$ непрерывно обратим в паре пространств $(\vec{L}^{2,\,0}_{\omega_1},\ \vec{L}^2_{\omega_2})$.

Введем еще два оператора:

$$(Q_{ik}v_k)(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} Q_{ik}(t,\ \tau)\, v_k(\tau)\, \omega_1(\tau)\, d\tau,$$

где функции $Q_{ik}(t,\ \tau)$ были определены выше, и

$$(\hat{Q}\vec{v})(t) = \Big(\sum_{k=1}^{m} (Q_{ik}v_k)(t)\Big)_{i=1}^m.$$

Теперь систему сингулярных интегральных уравнений (20) можно переписать в операторных обозначениях

$$(\hat{A} + \hat{Q})\vec{v} = \vec{h}, \tag{24}$$

где $\vec{h}(t) = (h_i(t))_{i=1}^m \in \vec{L}^2_{\omega_2}$, а условия (21) означают, что $\vec{v} \in \vec{L}^{2,\,0}_{\omega_1}$. Таким образом, уравнение (24) следует рассматривать в паре пространств $(\vec{L}^{2,\,0}_{\omega_1},\ \vec{L}^2_{\omega_2})$.

Для того чтобы записать в операторной форме и систему линейных алгебраических уравнений (22), введем следующие обозначения: $\vec{P}_n$ — множество вектор-функций $\vec{v}_n(t) = (v_{n,\,k}(t))_{k=1}^m$, где $v_{n,\,k}(t)$ — полином степени не выше $n-1$, $\vec{P}^0_n = \vec{P}_n \cap \vec{L}^{2,\,0}_{\omega_1}$.

Пусть далее $(\hat{L}^{(2)}_{n-1}\vec{v})(t) \equiv ((L^{(2)}_{n-1}v_k)(t))_{k=1}^m$,

$$(\hat{Q}_{n-1,\,n}\vec{v}_n)(t) \equiv \left(\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m} L^{(2)}_{n-1}\int\limits_{-1}^{1} L^{(1)}_{n\tau} Q_{ik}(t,\ \tau)\, v_{n,\,k}(\tau)\, \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\right)_{i=1}^m,$$

очевидно, что $\hat{L}^{(2)}_{n-1}\vec{v} \in \vec{P}_{n-1}$ и $\hat{Q}_{n-1,\,n}\vec{v}_n \in \vec{P}_{n-1}$.
Теперь система (22) примет вид

$$(\hat{L}^{(2)}_{n-1}\hat{A} + \hat{Q}_{n-1,\,n})\vec{v}_n = \hat{L}^{(2)}_{n-1}\vec{h}, \tag{25}$$

причем, в силу условий (23), уравнение (25) следует рассматривать в паре пространств $(\vec{P}^0_n,\ \vec{P}_{n-1})$.

Используя результаты первой части работы [8], можно показать, что имеет место следующая

Теорема. *Пусть* $h_k(t) \in C^{\mu+\alpha}$ *и* $Q_{ik}(t, \tau) \in C^{\mu+\alpha}$ *по каждой из переменных равномерно относительно другой. Тогда, если оператор* $\hat{A} + \hat{Q}$ *непрерывно обратим в паре пространств* $(\vec{L}^{2,0}_{\omega_1}, \vec{L}^{2}_{\omega_2})$, *то при достаточно большом* n *система линейных алгебраических уравнений (22) при выполнении условий (23) однозначно разрешима (или, что то же самое, оператор* $\hat{L}_{n-1}\hat{A} + \hat{Q}_{n-1,n}$ *обратим в паре* $(\vec{P}^0_n, \vec{P}_{n-1})$*), причем имеет место оценка*

$$\|\vec{v} - \vec{v}_n\|_{\omega_1} = O\left(\frac{1}{n^{\mu+\alpha}}\right), \quad n \to \infty.$$

Список литературы: 1. *Шестопалов В. П.* Метод задачи Римана — Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн.— Х.: Вища шк., Изд-во при Харьк. ун-те, 1971.— 400 с. 2. *Белоцерковский С. М.* Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа.— М.: Наука, 1965.— 224 с. 3. *Лифанов И. К.* О сингулярных интегральных уравнениях с одномерными и кратными интегралами типа Коши.— Докл. АН СССР, 1978, **239**, № 2, с. 265—268. 4. *Лифанов И. К., Матвеев А. Ф.* О сингулярном интегральном уравнении на системе отрезков.— Теория функций, функц. анализ и их прил., 1983, вып. 40, с. 104—110. 5. *Гандель Ю. В.* О парных рядах Фурье некоторых смешанных краевых задач математической физики.— Теория функций, функц. анализ и их прил., 1982, вып. 38, с. 15—18. 6. *Гандель Ю. В.* О парных интегральных уравнениях, приводящих к сингулярному интегральному уравнению на системе интервалов.— Теория функций, функц. анализ и их прил., 1983, вып. 40, с. 33—36. 7. *Гандель Ю. В., Галина А. В.* О решении одной смешанной краевой задачи теории потенциала в полосе.— Рукопись деп. в ВИНИТИ 12.09.82, № 6198. 8. *Junghanns P., Silbermann B.* Zur Theorie der Näherungsverfahren für singuläre Integralgleichungen auf Intervallen.— Math. Nachr., 103, 1981, S. 199—244.

Поступила в редколлегию 20.09.83.