УДК 517.937 : 962

М. БЕНАБДАЛЛАХ,
А. Г. РУТКАС, А. А. СОЛОВЬЕВ

ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ $Ax_{n+1}+Bx_n=f_n$ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1°. Рассматривается система уравнений (1а) с начальным условием (1б):

$$\text{а) } Ax_{n+1}+Bx_n=f_n \quad (n=0,\ 1,\ 2\ \ldots), \quad \text{б) } x_0=a, \tag{1}$$

где A, B — замкнутые линейные операторы, действующие из банахова пространства X в банахово пространство Y, с областями определения D_A, D_B соответственно. Уравнение (1а) встречается в прикладных задачах и является дискретным аналогом дифференциального уравнения $Ax'(t)+Bx(t)=f(t)$ [1—4].

При ограниченном операторе B и $A=I$ задачу естественно исследовать с помощью сходящихся степенных рядов (иначе, методом Z-преобразования) [4]; в общем случае этим методом можно получить те решения уравнения (1а), которые имеют экспоненциальный рост при $n\to\infty$. В статье изучаются быстро растущие решения уравнения (1а) с использованием формальных степенных рядов и спектральных свойств пучка операторов $zA+B$.

Через $\sigma_p(A, B)$ обозначим множество собственных чисел пучка $zA+B$ и при $z \notin \sigma_p(A, B)$ введем два типа резольвент: $\gamma_z = (zA+B)^{-1}$, $R_z = (zA+B)^{-1}A$.

Как известно, функция γ_z (R_z) голоморфна на открытом множестве $\rho(A, B)$ ($\rho_л(A, B)$) регулярных (леворегулярных) точек пучка. По определению $z \in \rho(A, B)$ ($\rho_л(A, B)$), если оператор γ_z (R_z) определен и ограничен на $Y(D_A)$ [1, 2].

*Локальным Z-преобразованием** последовательности $\{x_n\}_0^\infty$ назовем вектор-функцию $w(z)$ ($\sigma < z < \infty$), асимптотическое разложение которой в окрестности точки $z = \infty$ имеет коэффициенты x_k:

$$w(z) = \sum_{k=0}^{n} z^{-k}x_k + \omega(z, n) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$
$$\|\omega(z, n)\| \leqslant L_n z^{-n-1}, \quad \forall z > M_n. \tag{2}$$

Последовательность $\{x_n\}_0^\infty$ назовем *оригиналом* для $w(z)$.

Локальное Z-преобразование по оригиналу определено неоднозначно, например $w(z)$ и $w(z) + e^{-z}$. Но в силу единственности асимптотического разложения оригинал по заданному локальному Z-преобразованию $w(z)$ восстанавливается однозначно. В частности, можно использовать следующий рекуррентный процесс ($n = 1, 2\ldots$):

$$x_0 = \lim_{z\to\infty} w(z), \quad x_n = \lim_{z\to\infty} [w(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{-k}x_k] z^n. \tag{3}$$

Другой способ восстановления оригинала содержится в теореме 1, аналогичной теореме обращения локального преобразования Лапласа из [5].

Теорема 1. *Для локального Z-преобразования $w(z)$ ($z > \sigma$) функция*

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{w(z)}{\ln z} z^{\xi-1}\,dz, \quad \operatorname{Re}\xi < 0, \quad \sigma_0 > \max\{1, \sigma\}$$

аналитически продолжается до некоторой функции $\Phi(\xi)$ на всю плоскость с разрезом $[0, \infty)$. Оригинал $\{x_n\}_0^\infty$ выражается через граничные значения функции $F(\xi) = \Phi(\xi) - \Phi(\xi - 1)$:

$$x_n = \lim_{\tau\searrow 0} [F(n+\theta+i\tau) - F(n+\theta-i\tau)], \quad 0 < \theta < 1, \quad n = 0, 1\ldots$$

2°. Установим достаточные условия, при которых решение системы (1a) допускает локальное Z-преобразование $w(z)$, и вычислим его.

---

* По аналогии с локальным преобразованием Лапласа, с помощью которого Ю. И. Любич исследовал эволюционное уравнение [5].

Теорема 2. *Если луч* $\{z > \sigma\}$ *содержится в* $\rho(A, B)$,

$$\| (zA+B)^{-1} \| = O(z^{\alpha}) \quad (z \to \infty, \ \alpha \in \boldsymbol{R}) \tag{4}$$

и $f(z)$ — *локальное* Z-*преобразование последовательности* $\{f_n\}_0^{\infty}$ $(z > \sigma_0)$, *то всякое решение* $\{x_n\}_0^{\infty}$ *задачи* (1*а*, *б*) *допускает локальное* Z-*преобразование вида*

$$w(z) = (zA+B)^{-1}[zAx_0 + f(z)], \quad z > \max\{\sigma, \sigma_0\}. \tag{5}$$

Действительно, функция (5) имеет смысл. Если $\{x_n\}_0^{\infty}$ — решение (1а), то

$$\sum_{k=0}^{n} z^{-k}x_k = (zA+B)^{-1}[zAx_0 - z^{-n}Ax_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} z^{-k}f_k].$$

Подставляя сюда $\sum\limits_{k=0}^{n} z^{-k}f_k = f(z) - \varphi(z, n)$, где $\varphi(z, n)$ — остаточный член, получаем

$$w(z) = \sum_{k=0}^{n} z^{-k}x_k + \omega(z, n) \quad \forall n = 0, 1, 2 \ldots,$$

$$\omega(z, n) = z^{-n}(zA+B)^{-1}Ax_{n+1} + (zA+B)^{-1}\varphi(z, n).$$

Благодаря оценке (4) роста резольвенты $\| \omega(z, n) \| \leqslant \Pi_n z^{-n+\alpha}$, при $z > \max\{\sigma, \sigma_0, 1\}$, $n = 0, 1, 2 \ldots$, что эквивалентно оценкам $\| \omega(z, n) \| \leqslant L_n z^{-n-1}$. Действительно, при $\alpha > -1$ положим $j = n + 2 + [\alpha]$. Поскольку $z_j^{\alpha-[\alpha]-1} < 1$, то

$$\| \omega(z, n) \| = \| \omega(z, j) + \sum_{k=n+1}^{j} z^{-k}x_k \| \leqslant$$

$$\leqslant \Pi_j z^{-j+\alpha} + \sum_{k=n+1}^{j} \| x_k \| z^{-n-1} \leqslant L_n z^{-n-1}.$$

Аналогично доказывается

Теорема 2′. *Пусть на луче* $z > \sigma$ *выполнено*

$$z \in \rho_{л}(A, B), \ \| (zA+B)^{-1}A \| = O(z^{\beta})/z \to \infty, \ \beta \in \boldsymbol{R}/,$$

и последовательности $\{f_n\}_0^{\infty}$ *отвечает такая функция* $f(z)$, *что*

$$\sum_{k=0}^{n} z^{-k}f_k = f(z) + A\psi(z, n), \quad z > \sigma_0, \quad n = 0, 1, 2 \ldots,$$

$\| \psi(z, n) \| = O(z^{\delta-n})$, $\delta \in \boldsymbol{R}$. *Тогда всякое решение* $\{x_n\}_0^{\infty}$ *задачи* (1*а*, *б*) *допускает локальное* Z-*преобразование вида* (5).

Следствие. *В условиях теорем 2 или 2′ решение задачи* (1*а*, *б*) *единственно.*

3°. Приведем метод построения решений $\{x_n\}_0^\infty$ и нахождения допустимых начальных векторов x_0.

Теорема 3. *Пусть $f(z)$ — локальное Z-преобразование последовательности $\{f_n\}_0^\infty$ правых частей системы (1а) ($z > \sigma$), и для некоторого $v \in D_A$ определена такая вектор-функция $w(z)$, что*

$$(zA + B)\,w(z) = zAv + f(z) \quad /\forall z > \sigma/. \tag{6}$$

Предположим, функции $w(z)$, $Aw(z)$, $Bw(z)$ допускают асимптотические разложения в окрестности точки $z = \infty$ и $\{x_n\}_0^\infty$ — коэффициенты разложения (оригинал) функции $w(z)$. Тогда $\{x_n\}_0^\infty$ — решение системы (1а), причем $Ax_0 = Av$.

Доказательство. Так как операторы A, B замкнуты, то из представлений типа (3) $x_n \in D_A \cap D_B$ и коэффициентами асимптотических разложений функций $Aw(z)$, $Bw(z)$ являются векторы Ax_n, Bx_n. Вследствие (3), (6)

$$Ax_1 + Bx_0 = \lim_{z\to\infty}[zA(v - x_0) + f(z)].$$

Коль скоро $f(z) \to f_0$, то предел может существовать лишь при $Av = Ax_0$, так что $Ax_1 + Bx_0 = f_0$.

Равенство $Ax_{n+1} + Bx_n = f_n$ проверяется по индукции.

Замечание. Вместо существования асимптотических разложений функций $Aw(z)$, $Bw(z)$ в теореме 3 можно требовать разложимости одной из них одновременно с равенством $Ax_0 = Av$; асимптотическое разложение другой функции получается автоматически. Отсюда вытекает следующая оценка начального многообразия задачи (1а, б): вектор $x_0 = v \in D_A \cap D_B$ является начальным, как только удается построить функцию $w(z)$, удовлетворяющую условию $\lim\limits_{z\to\infty} w(z) = x_0$, равенству (6) и допускающую в окрестности точки $z = \infty$ асимптотическое разложение вместе с одной из функций $Aw(z)$, $Bw(z)$.

Если хотя бы один из операторов A, B ограничен, то в условиях каждой из теорем 2 или 2′ теорема 3 перечисляет все допустимые начальные векторы и решения задачи (1а, б).

Проиллюстрируем теорему 3 на разностном уравнении

$$x_{n+1}(t) + tx_n(t) = 0 \quad (n = 0,\ 1,\ 2\ldots;\ 0 < t < \infty). \tag{7}$$

Здесь B — оператор умножения на независимую переменную в пространстве $L_2(0,\ \infty)$, $A = I$. Условие (6) имеет вид

$$(z + t)\,w_t(z) = zv(t) \quad \text{или} \quad w_t(z) = \frac{z}{z+t}\,v(t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-t)^k\,v(t)\,z^{-k} + \frac{z}{z+t}(-t)^{n+1}\,v(t)\,z^{-n-1}.$$

Очевидно, $w(z)$ обладает асимптотическим разложением тогда и только тогда, когда функции $(-t)^k v(t)$ принадлежат пространству $L_2(0, \infty)$.

По теореме 3 вектор $x_0 = v(t)$ является начальным для решения $x_n = (-t)^n v(t) \in L_2$ разностной схемы (7). Поскольку оператор $A = I$ ограничен и выполнены условия теоремы 2, то здесь перечислены все допустимые начальные векторы. Это видно также непосредственно из уравнения (7).

4°. Пусть X, Y — гильбертовы пространства. Пучок $zA + B$ замкнутых операторов, не имеющих общего ядра, назовем *косоэрмитовым*, если существует пара регулярных точек $\pm 1 \in \rho(A, B)$ и при каждом $x \in D_A \cap D_B$ $\operatorname{Re}(Ax, Bx) = 0$.

Рассмотрим преобразование типа Кэли:

$$V = (B - A)(B + A)^{-1}. \tag{8}$$

Оператор V вполне обратим в Y, $\|Vy\| = \|y\|$ и

$$\frac{V - \xi I}{1 - \xi}(B + A) = zA + B, \quad \xi = \frac{z+1}{z-1}.$$

Поэтому V — унитарный оператор, а спектр пучка лежит на мнимой оси, причем справедлива оценка

$$\|(zA + B)^{-1}\| = O(1), \quad \operatorname{Re} z = z \to \infty. \tag{9}$$

Из теорем 2, 3 вытекает

Следствие 1. *Пусть в задаче (1а, б) пучок $zA + B$ косоэрмитов и $f(z)$ — локальное Z-преобразование правой части $\{f_n\}_0^\infty$ $(z > \sigma_0)$. Тогда начальное многообразие оценивается сверху множеством векторов x_0, для которых функция $w(z) = (zA + B)^{-1} \times$ $\times (zAx_0 + f(z))$ удовлетворяет условию $\lim_{z\to\infty} w(z) = x_0$ и допускает асимптотическое разложение. Оценку снизу доставляют те из указанных векторов x_0, для которых разложима хотя бы одна из функций $Aw(z)$, $Bw(z)$. Если какой-нибудь из операторов A, B ограничен, то оценки сверху и снизу совпадают и полностью описывают начальное многообразие.*

Для ограниченных операторов A, B уточним структуру системы. Предположим, пучок сопряженных операторов $\lambda A^* + B^*$ косоэрмитов, так что $AB^* + BA^* = 0$. Введем подпространства $X_1 =$ $= \operatorname{Ker} A$, $Y_2 = (A + B)(X \ominus X_1)$.

Легко проверить, что в ортогональных разложениях $X = X_1 \oplus$ $\oplus X_2$, $Y_1 = \oplus Y_2$ пучок имеет вид

$$zA + B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ B_{21} & zA_2 + B_2 \end{bmatrix}; \quad \begin{matrix} B_1^{-1} \in [Y_1, X_1], \\ \operatorname{Ker} A_2 = 0. \end{matrix} \tag{10}$$

Здесь пучок $\lambda A_2^* + B_2^*$ также косоэрмитов. Поэтому унитарен двойственный к (8) оператор $T_2 = (B_2 + A_2)^{-1}(B_2 - A_2)$, и для пучка $zA_2 + B_2$ имеет место оценка типа (9).

В обозначениях (10) система (1а) переписывается так:

$$B_1 x_n^1 = f_n^1, \quad A_2 x_{n+1}^2 + B_2 x_n^2 = f_n^2 - B_{21} x_n^1. \tag{11}$$

Следствие 2. *Пусть для задачи (1а, б) с ограниченными операторами A, B пучок сопряженных операторов $\lambda A^* + B^*$ косоэрмитов и $g(z)$ — локальное Z-преобразование последовательности** $g_n^2 = f_n^2 - B_{21} B_1^{-1} f_n^1$. Тогда вектор $x_0 = (x_0^1;\ x_0^2)$ принадлежит начальному многообразию, если и только если $x_0^1 = B_1^{-1} f_0^1$ и функция $w(z) = (zA_2 + B_2)^{-1}[zA_2 x_0^2 + g(z)]$ имеет асимптотическое разложение $\sum_{k=0}^{n} z^{-k} a_k + \omega(z,\ n)$. Решением является последовательность $\{x_n = (B_1^{-1} f_n^1;\ a_n)\}_0^\infty$.*

Подробнее остановимся на втором уравнении в системе (11). Поскольку пучок $\lambda A_2^* + B_2^*$ косоэрмитов, $\operatorname{Ker} A_2^* = 0$, то оператор

$$S = iB_2^* A_2^{*-1} < -iA_2^{-1} B_2 = S^* \tag{12}$$

симметричен, а резольвенты связаны соотношением

$$(S + izI)^{-1} = -iA_2^*(zA_2^* + B_2^*)^{-1}.$$

Отсюда $\pm i \in \rho(S)$, так что S — самосопряженный оператор, и справедлива оценка

$$\|(zA_2 + B_2)^{-1} A_2\| = O(z^{-1}), \quad \operatorname{Re} z = z \to \infty.$$

Если правая часть допускает умножение на A_2^{-1}, второе уравнение (11) превращается в дискретный аналог уравнения Шредингера:

$$x_{n+1}^2 + iSx_n^2 = \varphi_n^2.$$

В частности, начальное многообразие однородной задачи (1а, б) в условиях следствия 2 полностью описывается с помощью спектрального семейства E_t оператора S (12):

$$\{x_0\} = \{x_0^1 = 0;\quad x_0^2 : \int_{-\infty}^{\infty} t^{2n} d(E_t x_0^2,\ x_0^2) < \infty,\ n = 0,\ 1\ \ldots\}.$$

5°. Рассмотрим систему (1а), где A, B — ограниченные операторы в гильбертовых пространствах X, Y, пучок $zA + B$ имеет пару регулярных точек $\pm 1 \in \rho(A,\ B)$, а вещественная часть пучка $\lambda A^* + B^*$ принадлежит идеалу K компактных операторов ($AB^* + BA^* \in K$).

---

* В отличие от предыдущих построений здесь последовательность $f_n = (f_n^1;\ f_n^2)$ может не допускать локального Z-преобразования.

Для преобразования типа Кэли $T=(B+A)^{-1}(B-A)$ пучка $zA+B$ справедливо

$$I-TT^*=2(B+A)^{-1}[AB^*+BA^*](B+A)^{*^{-1}},$$
$$\frac{T-\xi I}{1-\xi}=(B+A)^{-1}(zA+B), \quad \xi=\frac{z+1}{z-1}.$$

Поэтому T есть компактное возмущение унитарного оператора, и вне мнимой оси пучок $zA+B$ может иметь лишь изолированные собственные числа конечной кратности.

Для каждого такого собственного числа z_l введем подпространства X_l, порождаемые цепочками из собственного и присоединенных векторов:

$$X_l=\text{л. о. }\{\overset{l}{h}_j\}_{j=1}^{N_l<\infty}, \quad (z_lA+B)\overset{l}{h}_j=-A\overset{l}{h}_{j-1}, \ \overset{l}{h}_0=0.$$

Здесь некоторые числа в наборе $\{z_l\}$ могут повторяться, а система $\{\overset{l}{h}_j\}$ полна в линейной замкнутой оболочке X^1 всех корневых подпространств, отвечающих собственным числам вне мнимой оси.

Пучок $zA+B$ приводится [1] парой подпространств X_l,

$$Y_l=(A+B)X_l=\text{л. о}\{\overset{l}{g}_j\}_{j=1}^{N_l}; \quad \overset{l}{g}_j=A\overset{l}{h}_j.$$

Очевидно, фундаментальная система решений однородной задачи (1а, б), суженной на подпространства X_l, Y_l, имеет вид ($n=0$, $1\ldots$)

$$\varphi_n=\overset{l}{\varphi}_{nj}=\sum_k C_n^{j-k}z_l^{n-j+k}\overset{l}{h}_k \quad (\max\{1,\ j-n\}\leqslant k\leqslant j).$$

Обозначим через $a(j,\ k)=\overset{l}{a}_m(j,\ k)$ элементы матрицы, обратной к верхне-треугольной матрице биноминальных коэффициентов $(C_m^{j-k})_{k,\,j=1}^{N_l}$. При всяком начальном векторе $x_0=\overset{l}{x}_0=\sum_{j=1}^{N_l}\overset{l}{\chi}_j\overset{l}{h}_j\in X_l$ и произвольных правых частях $f_n=\overset{l}{f}_n=\sum_{j=1}^{N_l}\overset{l}{\gamma}_{nj}\overset{l}{g}_j\in Y_l$ решение суженной на X_l, Y_l задачи (1а, б) единственно и равно ($n=0$, 1, $2\ldots$):

$$\overset{l}{x}_n=\sum_{j=1}^{N_l}[\overset{l}{\chi}_j+\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{N_l}\overset{l}{a}_{m+1}(j,\ k)z_l^{j-m-k-1}\overset{l}{\gamma}_{mk}]\overset{l}{\varphi}_{nj}. \tag{13}$$

Если при каждом $n=0,\ 1\ldots$ сходятся суммы $\sum_l \overset{l}{f}_n=f_n$ правых частей и суммы

$$\sum \overset{l}{x}_n=x_n \tag{14}$$

решений (13) суженных задач, то $\{x_n\}_0^\infty$ есть решение задачи (1а, б) с правыми частями f_n и начальным условием $x_0=\sum_l \overset{l}{x}_0$.

Предположим теперь, что множества векторов $\{h_j^l\}$, $\{g_j^l\}$ образуют базисы своих линейных замкнутых оболочек X^1, Y^1 соответственно. Тогда разложения $X^1 = \sum_l \dot{+} X_l$, $Y^1 = \sum_l \dot{+} Y_l$ приводят пучок $zA_1 + B_1 = zA + B/X^1$, так что в X^1 всякое решение системы с допустимым начальным вектором $x_0 \in X^1$ и правыми частями $f_n \in Y^1$ представимо в виде суммы (14), и притом единственным образом.

На самом деле базисность одного из множеств $\{h_j^l\}$, $\{g_j^l\}$ гарантирует базисность другого, так как оператор $B + A$ взаимно однозначно отображает подпространства X_l, X^1 на Y_l, Y^1 соответственно.

В ортогональных разложениях $X = X^1 \oplus X^2$, $Y = Y^1 \oplus Y^2$ исходный пучок имеет блочно-треугольную форму

$$zA + B = \begin{bmatrix} zA_1 + B_1 & zA_{12} + B_{12} \\ 0 & zA_2 + B_2 \end{bmatrix}, \quad A_2B_2^* + B_2A_2^* \in K.$$

Система (1а, б) переписывается в виде

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ A_1x_{n+1}^1 + A_{12}x_{n+1}^2 + B_1x_n^1 + B_{12}x_n^2 = f_n^1; \\ &\text{б)}\ A_2x_{n+1}^2 + B_2x_n^2 = f_n^2. \end{aligned} \tag{15}$$

Спектр пучка $zA_2 + B_2$ сосредоточен на мнимой оси, и для исследования системы (15б) естественно использовать асимптотическое разложение функции вида (5). Предположим, решение $\{x_n^2\}_0^\infty$ системы (15б) получено. Подставляя его в уравнение (15а) и рассматривая $e_n = f_n^1 - A_{12}x_{n+1}^2 - B_{12}x_n^2$ как правую часть, получим решения x_n^l (13) задач (15а), суженных на X_l, Y_l. При условиях базисности $\{h_j^l\}$, $\{g_j^l\}$ система (15) имеет решение тогда, и только тогда, когда сходятся суммы (14).

В базисах $\{h_j^l\}$, $\{g_j^l\}$ оператор A_1 имеет единичную матрицу, поэтому он невырожден.

Замечание. Результаты п. 5° очевидным образом переносятся на случай пучка с компактной мнимой частью ($AB^* - BA^* \in K$), а результаты п. 4° — на случай самосопряженного пучка:

$$Im\,(Ax, Bx) = 0, \quad \forall x \in D_A \cap D_B, \quad \pm i \in \rho\,(A, B). \tag{16}$$

Самосопряженность (16) пучка замкнутых операторов A, B, не имеющих общего ядра, эквивалентна самосопряженности [6] линейного отношения $\{(Ax; Bx) : x \in D_A \cap D_B\} \subset Y \oplus Y$, порождаемого пучком.

Список литературы: 1. *Руткас А. Г.* Задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$.—Дифференц. уравнения, 1975, **11**, № 11, с. 1996—2010. 2. *Радбель Н. И.* О начальном многообразии и диссипативности задачи Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = 0$.— Рукопись деп. в ВИНИТИ 29.08.78, № 3680. 3. *Favini A.* Laplace transform method for a class of degenerate evolution problems.— Rend. Mat., 1979, **12**. № 3-4, p. 511—536. 4. *Helton J. W.* Discrete Time Systems, Operator Models, and Scattering Theory.— J. Func. Anal., 1974, **16**, № 1, p. 15—38. 5. *Любич Ю. И.* Классическое и локальное преобразование Лапласа в абстрактной задаче Коши. — Усп. мат. наук, 1966, **21**, № 3 (129), с. 3—51. 6. *Arens R.* Operational Calculus of Linear Relations,— Pacific J. Math., Berkeley, 1961, **11**. p. 9—23.

Поступила в редколлегию 29.06.83.