УДК 517.948

АББАУИ ЛИАЗИД

УНИВЕРСАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ СЕМЕЙСТВА ДВАЖДЫ ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В теории несамосопряженных операторов наряду с треугольными моделями используется так называемая универсальная модель [1, 2]. М. С. Бродским [1] была построена универсальная модель для оператора Вольтерра. В монографии [2] рассмотрен более общий случай, когда у оператора кроме спектра в нуле имелся еще дискретный спектр $\{\lambda_k\}$, $\operatorname{Im}\lambda_k \geqslant 0$.

Данная работа содержит построение универсальной модели типа Бродского для семейства дважды перестановочных операторов.

Пусть $0 < b_k < a_k$ и $0 = c_k^{(1)} < c_k^{(2)} < \cdots < c_k^{(N_k)} \to b_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ — разбиение $[0,\ b_k]$ и $f(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ — скалярная функция от n переменных, где $x_k \in [0,\ a_k]$. При фиксированных переменных $x_k\ (k \neq s)$ функция $f(x_1^0,\ \ldots,\ x_s,\ \ldots,\ x_n^0)$ — ступенчатая, непрерывная слева в $[0,\ b_k]$, точки разрыва которой $c_s^{(i)}$ $(i = 1,\ \ldots,\ N_s)$.

Пусть $\mu_k(x_k)$ — ограниченная, неубывающая, ступенчатая непрерывная слева функция в $[0,\ b_k]$, точки разрыва которой $c_k^{(i)}$ $(i = 1,\ \ldots,\ N_k)$, и скачок в этой точке $(\beta_k^{(i)})^2$, на $[b_k,\ a_k]$ $\mu_k(x_k) \equiv \equiv x_k$.

Тогда $L_2\left(\prod_{i=1}^{n} [0,\ a_k];\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_n\right)$ есть совокупность скалярных функций $f(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, $x_k \in [0,\ a_k]$, удовлетворяющих указанным условиям, для которых

$$\int_0^{a_1}\int_0^{a_2}\ldots\int_0^{a_n} |f(x_1,\ \ldots,\ x_n)|^2\, d\mu_1(x_1)\ldots d\mu_n(x_n) < \infty.$$

Скалярное произведение определяется следующим образом:

$$(f(x_1,\ \ldots,\ x_n),\ g(x_1,\ \ldots,\ x_n)) = \\ = \int_0^{a_1}\cdots\int_0^{a_n} f(x_1,\ \ldots,\ x_n)\,\overline{g(x_1,\ \ldots,\ x_n)}\, d\mu_1(x_1)\ldots d\mu_n(x_n).$$

После факторизации по ядру получаем гильбертово пространство

$$L_2 \left(\prod_{k=1}^{n} [0;\ a_k];\quad \mu_1,\ \ldots,\ \mu_n \right).$$

В этом гильбертовом пространстве определим операторы

$$(\tilde{A}_k f)(x_1,\ \ldots,\ x_n) = \alpha_k(x_k) f(x_1,\ \ldots,\ x_n) + $$
$$+ i \int_{x_k}^{a_k} f(\overbrace{x_1,\ \ldots,\ t}^{k},\ \ldots,\ x_n)\, d\mu_k(t),$$

$\alpha_k(x_k)$ на $[0,\ b_k]$ есть ступенчатая, непрерывная слева функция, точки разрыва которой $c_k^{(i)}$ $(i = 1,\ \ldots,\ N_k)$, и скачок в этой точке $\lambda_k^{(i)}$, а на $[b_k,\ a_k]$ $\alpha_k(x_k) \equiv 0$.

Теорема: *Пусть* $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ — *семейство линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве* H *и удовлетворяющих следующим условиям.*

1) *Операторы* A_k $(k = 1,\ \ldots,\ n)$ *дважды перестановочны:* $A_k A_s = A_s A_k$ *и* $A_k^* A_s = A_s A_k^*$ *при* $k \neq s$.

2) A_k $(k = 1,\ \ldots,\ n)$ *вполне несамосопряженные диссипативные операторы.*

3) *Вещественный спектр каждого* A_k $(k = 1,\ \ldots,\ n)$ *сосредоточен в нуле.*

4) *Резольвента* A_k *есть функция экспоненциального типа от* $\lambda = 1/\mu$.

5) *Невещественный спектр оператора* A_k $(k = 1,\ \ldots,\ n)$ *имеет предельные точки лишь на вещественной оси.*

6) $\dim H_0 = 2$, *где* $H_0 = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{2 \operatorname{Im} A_k H}$.

Тогда $(A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n)$ *унитарно эквивалентно сужению на инвариантное подпространство модельного пространства* $\dot{H}$ *системы операторов* $(\dot{A}_1,\ \dot{A}_2,\ \ldots,\ \dot{A}_n)$, *где*

$$\dot{H} = L_2 \left(\prod_{k=1}^{n} [0,\ a_k];\quad \mu_1,\ \ldots,\ \mu_n \right) \dotplus L_2 \left(\prod_{k=1}^{n} [0,\ a_k];\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_n \right),$$

$$\dot{A}_k (f(x_1,\ \ldots,\ x_n);\quad g(x_1,\ \ldots,\ x_n)) =$$
$$= (\tilde{A}_k f(x_1,\ \ldots,\ x_n);\quad \tilde{A}_k g(x_1,\ \ldots,\ x_n)).$$

Доказательство. Пусть $H_k = \bigcap_{s \neq k} 2 \operatorname{Im} A_k H = \bigvee_{m \geqslant 0} A_k^m H_0$ [3], тогда H_k инвариантно относительно A_k, сужение A_k на H_k будем обозначать через $\tilde{A}_k$. $\tilde{A}_k$ обладает свойствами *2—5*, кроме того

$$\dim \tilde{H}_0^{(k)} = 2, \text{ где } \tilde{H}_0^{(k)} = \frac{\tilde{A}_k - \tilde{A}_k^*}{i} H_k$$

(так как $\tilde{H}_0^{(k)} = H_0$ [3]).

Тогда $\tilde{A}_k$ можно включить в узел θ_k:

$$\theta_k = (\tilde{A}_k, \ H_k, \ \Phi_k, \ g_1^{(k)}, \ g_2^{(k)}),$$

характеристическая матрица-функция которого имеет вид

$$W_{\theta_k}(\lambda) = I - i \, \| ((\tilde{A}_k - \lambda I)^{-1} g_\alpha^{(k)}, \ g_\beta^{(k)}) \|_{\alpha, \beta=1}^2.$$

Пусть $H_k^{(2)}$ — линейная оболочка всех инвариантных подпространств, отвечающих невещественным точкам спектра $\tilde{A}_k$, и $H_k^{(1)}$ — его ортогональное дополнение. $H_k^{(2)}$ — инвариантное подпространство, тогда $\tilde{A}_k$ можно рассматривать как сцепление операторов $\tilde{A}_k^{(1)}$ и $\tilde{A}_k^{(2)}$, действующих соответственно в $H_k^{(1)}$ и $H_k^{(2)}$:

$$\tilde{A}_k^{(i)} = P_k^{(i)} \tilde{A}_k \quad (i = 1, \ 2),$$

где $P_k^{(i)}$ — ортопроектор на $H_k^{(i)}$. θ_k можно рассматривать как произведение его проекций на $H_k^{(1)}$ и $H_k^{(2)}$, $\theta_k^{(1)}$ и $\theta_k^{(2)}$, тогда

$$\theta_k^{(i)} = (\tilde{A}_k^{(i)}, \ H_k^{(i)}, \ P_k^{(i)}\Phi_k, \ g_{1i}^{(k)}, \ g_{2i}^{(k)}) \quad (i = 1, \ 2)$$

и $g_{\alpha i}^{(k)} = P_k^{(i)} g_\alpha^{(k)} \quad (\alpha = 1, \ 2)$.

Оператор $\tilde{A}_k^{(1)}$ вполне несамосопряженный, диссипативный, его спектр сосредоточен в нуле и его резольвента — функция экспоненциального типа от $\lambda = \frac{1}{\mu}$ (тип функции — σ_k); тогда из результатов, полученных в [1], вытекает, что $A_k^{(1)}$ унитарно эквивалентен сужению на инвариантное подпространство $G_k^{(1)}$ модельного пространства $L_2[0, \ l_k] \dot{+} L_2[0, \ l_k]$ оператора

$$\mathcal{J}_k^{(1)}(f, \ g) = \left(i \int_x^{l_k} f(t) \, dt, \ i \int_x^{l_k} g(t) \, dt \right), \quad \left(l_k = \sigma_k \right).$$

С другой стороны, $\tilde{A}_k^{(2)}$ вполне несамосопряженный диссипативный оператор, у которого спектр чисто невещественный с предельными точками лишь на вещественной оси; тогда из результатов, полученных в [2], $\tilde{A}_k^{(2)}$ унитарно эквивалентен сужению на инвариантное подпространство $G_k^{(2)}$ модельного пространства

$$l_2([0, \ b_k]; \ \ \mu_k^{(2)}) \dot{+} l_2([0, \ b_k]; \ \ \mu_k^{(2)})$$

оператора $J_k^{(2)}$.

Модельное пространство и модельный оператор определяются следующим образом. Пусть $0 = c_k^{(0)} < c_k^{(1)} < \cdots < c_k^{(N_k)} \to b_k$ — разбиение $[0, b_k]$ и $\mu_k^{(2)}$ — ограниченная, неубывающая, непрерывная слева, ступенчатая со скачками в точках $c_k^{(i)}$ и скачок в точке $c_k^{(i)}$ есть $(\beta_k^{(i)})^2$, где

$\lambda_k^{(i)} = \alpha_k^{(i)} + i\,\dfrac{(\beta_k^{(i)})^2}{2}$ — последовательность невещественных точек спектра $\widetilde{A}_k^{(2)}$; $l_2([0, b_k]; \mu_k^{(2)})$ есть совокупность ступенчатых функций, точки разрыва которых совпадают с точками $c_k^{(i)}$, удовлетворяющими условию $\int\limits_0^{b_k} |f(x)|^2\, d\mu_k^{(2)}(x) < \infty$ со скалярным произведением

$$(f(x),\ g(x)) = \int\limits_0^{b_k} f(x)\,\overline{g(x)}\, d\mu_k^{(2)}(x).$$

$l_2([0, b_k]; \mu_k^{(2)})$ получается после факторизации по ядру

$$\widetilde{J}_k^{(2)} f(x) = \alpha_k^{(2)}(x)\, f(x) + i \int\limits_x^{b_k} f(t)\, d\mu_k^{(2)}(t);$$

$\alpha_k^{(2)}(x)$ — ступенчатая функция со скачками в $c_k^{(i)}$, равными $\lambda_k^{(i)}$. Тогда

$$J_k^{(2)}\{f(x),\ g(x)\} = \{\widetilde{J}_k^{(2)} f(x);\ \ \widetilde{J}_k^{(2)} g(x)\}.$$

При сцеплении операторов $J_k^{(1)}$ и $J_k^{(2)}$ получим модельное пространство

$$L_2([0, a_k]; \mu_k) \dot{+} L_2([0, a_k]; \mu_k)$$

и оператор J_k, действующий в нем, $a_k = b_k + l_k$. Функции из $L_2([0, a_k]; \mu_k)$ являются ступенчатыми функциями на $[0, b_k]$ со скачками лишь в точках $c_k^{(i)}$; $\mu_k(x)$ на $[0, b_k]$ совпадает с $\mu_k^{(2)}$ и на $[b_k, a_k]$ $\mu_k(x) \equiv x$. $L_2([0, a_k], \mu_k]$ получается после факторизации по ядру множества таких функций (ступенчатых на $[0, b_k]$), которые удовлетворяют

$$\int\limits_0^{a_k} |f(x)|^2\, d\mu_k(x) < \infty$$

со скалярным произведением

$$(f(x),\ g(x)) = \int\limits_0^{a_k} f(x)\,\overline{g(x)}\, d\mu_k(x).$$

Модельный оператор определим таким образом:

$$J_k\{f(x),\ g(x)\} = \{\alpha_k(x) f(x) + i\int_x^{a_k} f(t)\, d\mu_k(t);\ \alpha_k(x) g(x) + i\int_x^{a_k} g(t)\, d\mu_k(t)\},$$

$\alpha_k(x)$ на $[0,\ b_k]$ совпадает с $\alpha_k^{(2)}(x)$ и на $[b_k,\ a_k]$ $\alpha_k(x) \equiv 0$.

С другой стороны, $\tilde{A}_k$ — сцепление $\tilde{A}_k^{(1)}$ и $\tilde{A}_k^{(2)}$, которые унитарно эквивалентны соответственно сужениям операторов $J_k^{(1)}$ и $J_k^{(2)}$ на инвариантные подпространства. Тогда $\tilde{A}_k$ унитарно эквивалентен сужению оператора J_k на инвариантное подпространство G_k пространства

$$L_2([0,\ a_k];\ \ \mu_k) \dot{+} L_2([0,\ a_k];\ \mu_k),$$

т. е. существует унитарный оператор $U_k: H_k \to G_k$ такой, что $U_k\tilde{A}_k = J_k U_k$.

Рассмотрим пространство

$$\dot{H} = L_2(D;\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_n) \dot{+} L_2(D;\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_n),$$

где $D = [0,\ a_1] \otimes [0,\ a_2] \otimes \cdots \otimes [0,\ a_n]$. G_k $(k = 1,\ \ldots,\ n)$ можно рассматривать как подпространство $\dot{H}$, и J_k можно тривиально расширить в $\dot{H}$.

Таким образом,

$$\dot{A}_k\{f(x_1,\ \ldots,\ x_n);\ \ g(x_1,\ \ldots,\ x_n)\} =$$

$$= \{\alpha_k(x_k) f(x_1,\ \ldots,\ x_n) + i\int_{x_k}^{a_k} f(\underbrace{x_1,\ \ldots,\ t}_{k},\ \ldots,\ x_n)\, d\mu_k(t);$$

$$\alpha_k(x_k) g(x_1,\ \ldots,\ x_n) + i\int_{x_k}^{a_k} g(\underbrace{x_1,\ \ldots,\ t}_{k},\ \ldots,\ x_n)\, d\mu_k(t)\}.$$

Пусть

$$H_1 \vee H_2 \vee \cdots \vee H_n = (H_1 \ominus H_0) \oplus (H_2 \ominus H_0) \oplus \cdots \oplus (H_n \ominus H_0) \oplus H_0,$$

в этом пространстве определим оператор

$$U(h_1 + h_2 + \cdots + h_n + h_0) = U_1 h_1 + U_2 h_2 + \cdots + U_n h_n + U_0 h_0$$

(на $H_0 = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{2\,\mathrm{Im}\, A_k H}$, U_k совпадают и $U_k h_0 = U_0 h_0$), U, очевидно, является изометрическим оператором.

Пусть G — линейная замкнутая оболочка элементов вида

$$\dot{A}_2^{r_2}\dot{A}_3^{r_3} \cdots \dot{A}_n^{r_n} g_1 + \dot{A}_1^{p_1}\dot{A}_3^{p_3} \cdots \dot{A}_n^{p_n} g_2 + \cdots + \dot{A}_1^{s_1}\dot{A}_2^{s_2} \cdots \dot{A}_{n-1}^{s_{n-1}} g_n,$$

где $r_i \geqslant 0$, $p_i \geqslant 0$, $s_i \geqslant 0$, $g_k \in G_k$ $(i=1, \ldots, n;\ k=1, \ldots, n)$.

G инвариантное относительно каждого A_k $(k=1, \ldots, n)$. Определим оператор $\tilde{U}$ на векторах вида $A_1^{m_1} \cdots A_n^{m_n} h_0$, $m_i \geqslant 0$, $h_0 \in H_0$:

$$\tilde{U}(A_1^{m_1} A_2^{m_2} \cdots A_n^{m_n} h_0) = \dot{A}_1^{m_1} \dot{A}_2^{m_2} \cdots \dot{A}_n^{m_n} \tilde{h}_0, \quad \tilde{h}_0 = U_0 h_0,$$

$\tilde{U}$ — изометрический оператор. В самом деле,

$$(A_1^{m_1} A_2^{m_2} \cdots A_n^{m_n} h_0, \quad A_1^{s_1} A_2^{s_2} \cdots A_n^{s_n} g_0) =$$
$$= ((A_1^*)^{s_1} A_1^{m_1} h_0, (A_2^*)^{m_2} \cdots (A_n^*)^{m_n} A_2^{s_2} \cdots A_n^{s_n} g_0).$$

Так как $(A_1^*)^{s_1} A_1^{m_1} h_0 \in H_1$ и $(A_2^*)^{m_2} \cdots (A_n^*)^{m_n} A_2^{s_2} \cdots A_n^{s_n} g_0 \in L_2$, где

$$L_k = \bigvee_{m_k, \ldots, m_n \geqslant 0} A_k^{m_k} \cdots A_n^{m_n} H_0, \quad L_k \perp H_s \ominus H_0 \ (s < k),$$

то $(A_1^*)^{s_1} A_1^{m_1} h_0 = \sum\limits_{\gamma_1=1}^{2} ((A_1^*)^{s_1} A_1^{m_1} h_0, g_{\gamma_1}) g_{\gamma_1} + h_1$ [3].

Здесь $\{g_1, g_2\}$ — ортонормированный базис в H_0, тогда

$$(A_1^{m_1} \cdots A_n^{m_n} h_0, \quad A_1^{s_1} \cdots A_n^{s_n} g_0) =$$
$$= \sum_{\gamma_1=1}^{2} ((A_1^*)^{s_1} A_1^{m_1} h_0, g_{\gamma_1})(g_{\gamma_1}, (A_2^*)^{m_2} \cdots (A_n^*)^{m_n} A_2^{s_2} \cdots A_n^{s_n} g_0).$$

Повторяя эту процедуру $n-1$ раз, получаем [3]

$$(A_1^{m_1} \cdots A_n^{m_n} h_0, \quad A_1^{s_1} \cdots A_n^{s_n} g_0) =$$
$$= \sum_{\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}=1}^{2} (A_1^{m_1} h_0, A_1^{s_1} g_{\gamma_1})(A_2^{m_2} g_{\gamma_1}, A_2^{s_2} g_{\gamma_2}) \cdots (A_n^{m_n} g_{\gamma_{n-1}}, A_n^{s_n} g_0).$$

Учитывая, что $A_k^{m_k} g_{\gamma_k}$ и $A_k^{s_k} g_{\gamma_{k-1}} \in H_k$, имеем

$$(A_1^{m_1} \ldots A_n^{m_n} h_0, \quad A_1^{s_1} \ldots A_n^{s_n} g_0) =$$
$$= \sum_{\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}=1}^{2} (U_1 A_1^{m_1} U_1^{-1} U_1 h_0, \ U_1 A_1^{s_1} U_1^{-1} U_1 g_{\gamma_1}) \otimes \cdots \otimes$$
$$\otimes (U_n A_n^{m_n} U_n^{-1} U_n g_{\gamma_{n-1}}, \ U_n A_n^{s_n} U_n^{-1} U_n g_0) =$$
$$= \sum_{\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}=1}^{2} (\dot{A}_1^{m_1} \tilde{h}_0, \ \dot{A}_1^{s_1} \tilde{g}_{\gamma_1}) \ldots (\dot{A}_n^{m_n} \tilde{g}_{\gamma_{n-1}}, \ \dot{A}_n^{s_n} \tilde{g}_0),$$

где $\tilde{g}_\alpha = U_0 g_\alpha$ $(\alpha = 0, 1, 2)$, $h_0 = U_0 h_0$.

С другой стороны,

$$(\dot{A}_1^{m_1} \ldots \dot{A}_n^{m_n} \tilde{h}_0, \quad \dot{A}_1^{s_1} \ldots \dot{A}_n^{s_n} g_0) =$$
$$= \sum_{\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}=1}^{2} (\dot{A}_1^{m_1} \tilde{h}_0, \ \dot{A}_1^{s_1} g_{\gamma_1}) \ldots (A_n^{m_n} \tilde{g}_{\gamma_{n-1}}, \ A_n^{s_n} \tilde{g}_0),$$

где $\{\tilde{g}_1, \tilde{g}_2\}$ — ортогональный базис в H_0:

$$\dot{H}_0 = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{2\,\mathrm{Im}\,\dot{A}_k\dot{H}}.$$

Окончательно

$$(A_1^{m_1} \ldots A_n^{m_n} h_0,\ A_1^{s_1} \ldots A_n^{s_n} g_0) = (\dot{A}_1^{m_1} \ldots \dot{A}_n^{m_n} \tilde{h}_0,\ \dot{A}_1^{s_1} \ldots \dot{A}_n^{s_n} \tilde{g}_0),$$

где $\tilde{h} = U_0 h_0$, $\tilde{g}_0 = U_0 g_0$.

Расширяя $\tilde{U}$ по линейности и непрерывности, получаем унитарный оператор $\tilde{U}$:

$$\tilde{U}: \bigvee_{m_1, \ldots, m_n \geqslant 0} A_1^{m_1} \ldots A_n^{m_n} H_0 = H \to \bigvee_{m_1, \ldots, m_n \geqslant 0} \dot{A}_1^{m_1} \ldots \dot{A}_n^{m_n} \dot{H}_0 = G,$$

причем $\tilde{U} A_k = \dot{A}_k \tilde{U}$ $(k = 1, 2, \ldots n)$.

Список литературы: *Бродский М. С.* Треугольные и жордановы представления линейных операторов.— М.: Наука, 1969.— 287 с. 2. *Лифшиц М. С.. Янцевич А. А.* Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. — X.: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1971.—160 с. 3. *Золотарев В. А.* О треугольных моделях систем дважды перестановочных операторов. — Докл. АН АрмССР, 1976, № 3, с. 136—140. 4. *Ваксман Л. Л.* Гармонический анализ многопараметрических полугрупп сжатий.— Математика, 1981, № 1Б1055, с. 9—16. 5. *Янцевич А. А.* Применение теории операторных узлов к исследованию нестационарных случайных процессов и последовательностей. — Материалы Всесоюз. симпоз. по статистике случайных процессов. К., 1973. с. 229—232.

Поступила в редколлегию 20.03.83.