УДК 513.88 : 519.21

А. А. ЯНЦЕВИЧ

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. I. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ТЕОРИЯ

Пусть $x(n)$ — нестационарная случайная последовательность с $M\,|x(n)|^2 < \infty$. Будем рассматривать $x(n)$ как последовательность со значениями в гильбертовом пространстве $H_x = \bigvee\limits_{\pi_1 c_k} c_k x(k)$, тогда корреляционная функция определяется как скалярное произведение в H_x:

$$R(n, m) = (x(n), x(m))_{H_x}. \tag{1}$$

Отметим, что если $x_l(n) \in H_l$, $(l = 1, 2)$ и $R_1(n, m) = R_2(n, m)$, то $x_1(n) = Ux_2(n)$, где U — унитарный оператор $U \in [H_2, H_1]$.

Стационарные случайные последовательности в H_x изучались А. Н. Колмогоровым [1], некоторые классы нестационарных случайных процессов исследовались в монографии [2]. На возможность построения корреляционной теории нестационарных случайных последовательностей указывалось в [3].

Определение. *Последовательность $x(n)$ называется линейно представимой, если*

$$x(n) = T^n x_0, \tag{2}$$

где T — линейный ограниченный оператор $T \in [H_x, H_x]$;

x_0 — фиксированный элемент из H_x.

Определение. *Спектром нестационарной последовательности $x(n)$ будем называть спектр оператора T в представлении (2).*

Очевидно, что если у последовательностей $x_1(n)$ и $x_2(n)$ корреляционные функции совпадают и одна из них линейно представима, то линейно представима и другая последовательность в соответствующем гильбертовом пространстве.

Теорема 1. *Для того чтобы $R(n, m)$ была корреляционной функцией некоторой линейно представимой последовательности, необходимо и достаточно, чтобы*

$$1)\ \sum_{n,m} R(n, m)\,\xi_n\bar{\xi}_m \geqslant 0;$$

$$2)\ \Big|\sum_{l=0}^{N_1}\sum_{k=0}^{N_2} u(l, k)\,a_l\bar{b}_k\Big|^2 \leqslant \mu \sum_{l,p=0}^{N_1} R(l, p)\,a_l\bar{a}_p \sum_{n,q=0}^{N_2} R(n, q)\,b_n\bar{b}_q,$$

где $u(l, k) = R(l+1, k) - R(l, k)$, $0 < \mu < \infty$.

Определение. *Корреляционной разностью последовательности называется выражение*

$$w(n, m) = R(n, m) - R(n+1, m+1). \tag{3}$$

Для линейно представимой последовательности $x(n) = T^n x_0$

$$w(n, m) = ((I - T^*T)\,x(n),\ x(m)). \tag{4}$$

Пусть $\dim(I - T^*T)\,H = r < \infty$, тогда

$$w(n, m) = \sum_{\alpha=1}^{r} \pm\,\Phi_\alpha(n)\,\overline{\Phi_\alpha(m)}, \tag{5}$$

где $\Phi_\alpha(n) = (x(n), g_\alpha)$; g_α — каналовые элементы оператора T.

Рассмотрим квадратичные формы вида

$$\sum_{n,m} w(n, m)\,\xi_n\bar{\xi}_m. \tag{6}$$

Определение. *Случайную последовательность* $x(n)$ *назовем квазистационарной, если квадратичные формы (6) ограничены в совокупности, а наибольший ранг форм (6) назовем рангом нестационарности* ρ.

Теорема 2. *Для того чтобы линейно представимая случайная последовательность была квазистационарной, необходимо и достаточно, чтобы* $\dim(I - T^*T)\,H = r < \infty$ *при этом* $\rho = r$.

Квазистационарную последовательность будем называть диссипативной, если неотрицательны все квадратичные формы $\sum_{n,m} w(n, m)\,\xi_n\bar{\xi}_m \geqslant 0$. Очевидно, что если линейно представимая последовательность $x(n)$ диссипативная, то 1) T являетс сжатием; 2) существует $\lim_{m\to\infty} R(m, m) = \sigma_\infty^2$ (если $\sigma_\infty^2 = 0$, то последовательность будем называть затухающей); 3) существует

$$\lim_{k\to\infty} R(n+k, m+k) = R_\infty(n-m);$$

$$4)\ R(n, m) = R_\infty(n-m) + \sum_{k=0}^{\infty} w(n+k, m+k)$$

(причем для асимптотически затухающей последовательности $R_\infty(n-m) \equiv 0$).

В дальнейшем будем для простоты рассматривать затухающие линейно представимые последовательности первого ранга. Для таких последовательностей

$$w(n, m) = \Phi(n)\,\overline{\Phi(m)}, \tag{7}$$

где $$\Phi(n) = (T^n_{x_0}, g) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \lambda^n (x_0 (T^* - \bar{\lambda} I)^{-1} g)\, d\lambda, \tag{8}$$

γ — контур, охватывающий весь спектр оператора T.

Если воспользоваться треугольной моделью неунитарного оператора T с дискретным спектром первого ранга [4], то в случае $H_x = \bigvee_k T^k g$ получаем

$$\Phi(n) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{0_k} \Lambda_k(n), \quad \sum_{k=1}^{\infty} |f_{0_k}|^2 < \infty, \tag{9}$$

где

$$\Lambda_k(n) = -\frac{1}{2\pi i}\sqrt{1 - |\mu_k|^2}\oint_\gamma \lambda^k \frac{1}{\lambda - \mu_k}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{1 - \lambda\bar{\mu}_j}{\lambda - \mu_j}\frac{|\mu_j|}{\bar{\mu}_j}\, d\lambda, \tag{10}$$

μ_k — собственные значения оператора T.

Из (10) видно, что $\Lambda_k(n)$ строится только по спектру оператора T. Таким образом, имеет место

Теорема 3. *Если $x(n)$ — затухающая линейно представимая случайная последовательность первого ранга, то ее корреляционная функция имеет вид* $$R(n, m) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi(n+k)\overline{\Phi(m+k)}, \tag{11}$$

где $\Phi(n)$ определяется по формулам (9), (10).

Обратно, если задана корреляционная функция вида (11), то существует гауссовская линейно представимая, асимптотически затухающая нестационарная последовательность первого ранга с корреляционной функцией (11). Построение такой последовательности можно осуществить следующим образом: по μ_k, входящим в (11), строится треугольная модель $\dot{T} \in [l_2, l_2]$ оператора T, а затем в l_2 рассматривается последовательность $\dot{z}(n) = T^n \dot{z}_0$, при этом $R_{\dot{z}}(n, m) = R(n, m)$.

Аналогично можно рассмотреть случай непрерывного спектра, а воспользовавшись универсальными моделями для сжимающих операторов, исследовать случай $1 < r \leqslant \infty$.

Список литературы

1. *Колмогоров А. Н.* Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве.—Бюл. МГУ, 1941, 2, № 6, с. 1—40.

2. *Лившиц М. С., Янцевич А. А.* Операторные узлы в гильбертовых пространствах.— Х.: Изд. Харьк. ун-та, 1971.

3. *Янцевич А. А.* Применение теории операторных узлов к исследованию нестационарных случайных процессов и последовательностей.— В кн.: Материалы Всесоюз. симпозиума по статистике случайных процессов. К., 1973, с. 229—232.

4. *Кужель А. В.* Треугольная модель K^I-операторов в пространстве с индефинитной метрикой.— Докл. АН УССР, 1962, 5, с. 572—574.

Поступила в редколлегию 23.11.83.