УДК 517.9+517.4

Х. ШТЕФАН

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ С НЕУБЫВАЮЩИМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

В. А. Марченко найден новый подход к интегрированию нелинейных эволюционных уравнений*.

В связи с этим им была поставлена задача исследования возникающих в этом методе интегральных уравнений и выяснения их роли в теории обратных задач спектрального анализа.

В настоящей работе исследуется одно из таких интегральных уравнений и устанавливается его связь с обратными задачами для некоторого класса операторов Штурма — Лиувилля с неубывающими потенциалами.

Пусть $\rho(\lambda)$ — некоторая монотонно растущая функция, определенная на вещественной оси, которая в дальнейшем будет играть роль меры. Назовем M то множество, на котором сосредоточена мера, а M^+ и M^- — соответствующие подмножества на положительной и отрицательной полуосях.

$$M^+ = M \cap [0, \infty), \; M^- = M \cap (-\infty, 0]. \tag{1}$$

Пусть $\tilde{M}$ то множество, которое лежит симметрично к M относительно нуля:

$$\tilde{M} = \{\lambda \in R \mid -\lambda \in M\}. \tag{2}$$

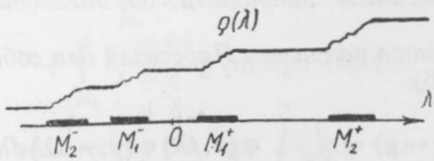
Назовем M_1 то подмножество M, которое с λ содержит также $-\lambda$, а M_2 — дополнение M_1 до M.

Пусть

$$M_1^+ = M_1 \cap M^+; \; M_2^+ = M_2 \cap M^+;$$

$$M_1^- = M_1 \cap M^-; \; M_2^- = M_2 \cap M^-.$$

На рисунке показан случай, когда M_1^+, M_1^-, M_2^+, M_2^-, состоят из одного интервала.



---

* Marchenko W. A. Non lineur and Turbulent processes in Physics.— Harwood Academic Publishers New York, 1984, 4, p. 1503—1514.

Обозначим через $\Delta\rho$ вариацию $\rho(\lambda)$ на вещественной оси:

$$\Delta\rho = \int\limits_M d\rho(\lambda).$$

Имеет место следующая

Теорема. *Пусть $\rho(\lambda)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) $0 \in \overline{M}$, *M ограничено, $\Delta\rho < \infty$, $\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 = \varnothing$;*

2) *M_1 состоит из конечного числа замкнутых интервалов и $\rho(\lambda)$ имеет на M_1 кусочно непрерывную производную,*

$$\exists\alpha(\lambda) \in KC(M_1) : \alpha(\lambda)\,d\lambda = d\rho(\lambda),\ \lambda \in M_1.$$

Тогда:

I. *Для всех вещественных x существует единственное решение $g(x, \lambda)$ уравнения*

$$g(x, \lambda) + \int\limits_M \frac{e^{-x(\lambda+\eta)}}{\lambda+\eta}\, g(x, \eta)\operatorname{sign}\eta\, d\rho(\eta) = e^{-x\lambda},\ \lambda \in M,\ x \in R, \tag{3}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения.

II. *Решение уравнения (3) и функция $\varphi(x, z)$, определенная при всех вещественных x и всех комплексных z, за исключением множества $\widetilde{M}$, формулой*

$$\varphi(x, z) = e^{-xz} - \int\limits_M \frac{e^{-x(z+\eta)}}{z+\eta}\, g(x, \eta)\operatorname{sign}\eta\, d\rho(\eta),\ z \in C \setminus M,\ x \in R, \tag{4}$$

дважды непрерывно дифференцируемы по x и удовлетворяют уравнениям Штурма—Лиувилля

$$-g''(x, \lambda) + q(x)\,g(x, \lambda) = -\lambda^2 g(x, \lambda),\ \lambda \in M,\ x \in R; \tag{5}$$

$$-\varphi''(x, z) + q(x)\,\varphi(x, z) = -z^2\varphi(x, z),\ z \in C \setminus \widetilde{M},\ x \in R, \tag{6}$$

с потенциалом

$$q(x) = 2\frac{d}{dx}\left(\int\limits_M e^{-x\lambda} g(x, \lambda)\operatorname{sign}\lambda\, d\rho(\lambda)\right) \tag{7}$$

(Здесь и в дальнейшем штрихами обозначаются производные по x).

III. *Выполняются равенства Парсеваля для собственных функций задач* (5), (6):

$$\delta(x-y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, i\lambda)\,\varphi(y, -i\lambda)\,d\lambda +$$

$$+ \int\limits_M g(x, \lambda)\,g(y, \lambda)\,d\rho(\lambda),\ x,\ y \in R; \tag{8}$$

$$\delta(x-y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,i\lambda)\varphi(y,-i\lambda)\,d\lambda+$$

$$+\int_{M_2}\varphi(x,\lambda)\varphi(y,\lambda)\,d\rho(\lambda)+\int_{M_1}(\varphi(x,\lambda+i0)\varphi(y,\lambda-i0)+$$

$$+\pi^2\alpha(-\lambda)^2\varphi(x,-\lambda-i0))\frac{\alpha(\lambda)\,d\lambda}{(1+\pi^2\alpha(\lambda)\alpha(-\lambda))^2}-$$

$$-\int_{M_1}(\varphi(x,\lambda+i0)\varphi(y,-\lambda+i0)+\varphi(x,-\lambda-i0)\varphi(x,\lambda-i0))\times$$

$$\times\frac{\pi i\alpha(\lambda)\alpha(-\lambda)\operatorname{sign}(-\lambda)}{(1+\pi^2\alpha(\lambda)\alpha(-\lambda))^2}\,d\lambda,\ x,y\in R,$$

где использованы обозначения:

$$\varphi(t,\lambda\pm i0)=\lim_{\varepsilon\to+0}\varphi(t,\lambda\pm i\varepsilon),\ t\in\{x,y\}.$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение (3) в пространстве $L_2(M,\rho)$ и обозначим это пространство через L. Очевидно, что в силу предположения (1), $e^{-x\lambda}\in L$ для любого вещественного x.

Пусть $F(x)$ — интегральный оператор, зависящий от вещественного параметра x и действующий в L по закону

$$(F(x)\cdot g)(\lambda)=\int_M\frac{e^{-x(\lambda+\eta)}}{\lambda+\eta}g(\eta)\operatorname{sign}\eta\,d\rho(\eta),\tag{9}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения.

Уравнение (3) можно представить в эквивалентном виде

$$(I+F(x))\,g(x,\lambda)=e^{-x\lambda}.\tag{10}$$

Если существует оператор $(I+F(x))^{-1}$ для всех вещественных x, то уравнение (3) имеет единственное решение.

Замечание. В силу предположения (2) выражение (9) можно переписать следующим образом:

$$(F(x)\,g)(\lambda)=\int_{M_1}\frac{e^{-x(\lambda+\eta)}}{\lambda+\eta}g(\eta)\operatorname{sign}\eta\,\alpha(\eta)\,d\eta+$$

$$+\int_{M_2}\frac{e^{-x(\lambda+\eta)}}{\lambda+\eta}g(\eta)\operatorname{sign}\eta\,d\rho(\eta).$$

Интеграл по множеству M_1 при $\lambda\in M_1$ сингулярен. Этот же интеграл при $\lambda\in M_2$ и интеграл по множеству M_2 при всех λ будут обыкновенными интегралами. Поэтому предположения (1), (2) обеспечивают ограниченность оператора $F(x)$ при всех вещественных x.

Введем операторы $A(x)$ и $B(x)$, зависящие от вещественного параметра x и действующие в L по законам

$$(A(x)g)(\lambda)=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_{M^+}\frac{e^{-x(\lambda+\eta)}}{\lambda+\eta}g(\eta)\,d\rho(\eta),\ \lambda\in M^+;\\ \displaystyle-\int\limits_{M_1}\frac{e^{-x(\lambda+\eta)}}{\lambda+\eta}g(\eta)\,d\rho(\eta),\lambda\in M^-,\end{cases}$$

$$(B(x)g)(\lambda)=\begin{cases}\displaystyle i\int\limits_{M^-}\frac{e^{-x(\lambda+\eta)}}{\lambda+\eta}g(\eta)\,d\rho(\eta),\ \lambda\in M^+;\\ \displaystyle-i\int\limits_{M^+}\frac{e^{-x(\lambda+\eta)}}{\lambda+\eta}g(\eta)\,d\rho(\eta),\ \lambda\in M^-.\end{cases}$$

Очевидно, $F(x)=A(x)+iB(x)$.

Рассмотрим скалярные произведения в L.

$((A(x)g)(\lambda),\ f(\lambda))$ и $((B(x)g)(\lambda),\ f(\lambda))$. $((A(x)g)(\lambda),\ f(\lambda))=$

$$=\int\limits_{M^+}\left(\int\limits_{M^+}\frac{e^{-x(\lambda+\eta)}}{\lambda+\eta}g(\eta)\,d\rho(\eta)\right)\overline{f(\lambda)}\,d\rho(\lambda)-$$

$$-\int\limits_{M^-}\left(\int\limits_{M^-}\frac{e^{-x(\lambda+\eta)}}{\lambda+\eta}g(\eta)\,d\rho(\eta)\right)\overline{f(\lambda)}\,d\rho(\lambda)=$$

$$=\int\limits_{M^+}g(\lambda)\overline{\left(\int\limits_{M^+}\frac{e^{-x(\lambda+\eta)}}{\lambda+\eta}f(\eta)\,d\rho(\eta)\right)}\,d\rho(\lambda)+$$

$$+\int\limits_{M^-}g(\lambda)\overline{\left(-\int\limits_{M^-}\frac{e^{-x(\lambda+\eta)}}{\lambda+\eta}f(\eta)\,d\rho(\eta)\right)}\,d\rho(\lambda)=(g(\lambda),\ (A(x)f)(\lambda)).\quad(11)$$

Следовательно, $A(x)=A^*(x)$. Аналогично доказывается, что в интегралах, которые понимаются в смысле главного значения, обеспечивается условием (2).

Полагая в (11) $f(\lambda)=g(\lambda)$, получаем

$$((A(x)g)(\lambda),\ g(\lambda))=\int\limits_x^\infty dt\int\limits_{M^+}\left(\int\limits_{M^+}e^{-t(\lambda+\eta)}g(\eta)\,d\rho(\eta)\right)\overline{g(\lambda)}\,d\rho(\lambda)+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^x dt\int\limits_{M^-}\left(\int\limits_{M^-}e^{-t(\lambda+\eta)}g(\eta)\,d\rho(\eta)\right)\overline{g(\lambda)}\,d\rho(\lambda)=$$

$$=\int\limits_x^\infty\left|\int\limits_{M^+}e^{-t\lambda}g(\lambda)\,d\rho(\lambda)\right|^2dt+\int\limits_{-\infty}^x\left|e^{-t\lambda}g(\lambda)\,d\rho(\lambda)\right|^2dt\geqslant 0.$$

Таким образом, $A(x)\geqslant 0$.

Существование оператора $(I+F(x))^{-1}=(I+A(x)+iB(x))^{-1}$ доказывает следующая

Лемма. *Пусть A и B — два самосопряженных оператора в гильбертовом пространстве, причем $A \geqslant 0$, тогда существует $(I + A + iB)^{-1}$.*

Доказательство. $A \geqslant 0$, следовательно, $I + A \geqslant I > 0$. Поэтому существует такой обратимый, самосопряженный оператор X, что $X^2 = I + A$. Поэтому

$$I + A + iB = X(I + iX^{-1}BX^{-1})X = iX(X^{-1}BX^{-1} - i)X.$$

Пусть $C = X^{-1}BX^{-1}$. Очевидно, C также самосопряжен. Поэтому существует резольвента $(C - i)^{-1}$. Следовательно,

$$(iX(C - i)X)^{-1} = -iX^{-1}(C - i)^{-1}X^{-1}, \text{ т. е.}$$
$$(I + A + iB)^{-1} = -iX^{-1}(C - i)^{-1}X^{-1}.$$

Лемма доказана и, следовательно, также пункт 1 теоремы.

Перепишем уравнения (10) в виде

$$g(x, \lambda) = (I + F(x))^{-1}e^{-x\lambda}. \tag{12}$$

Согласно определению (9) оператора $F(x)$, он имеет любое число непрерывных производных по x. Так как $(I + F(x))^{-1}$ существует для всех x, то и он обладает тем же свойством, а также $g(x, \lambda)$, как видно из (12). В частности, существует $g''(x, \lambda)$.

Пусть

$$H(x, \lambda) = g''(x, \lambda) - q(x)g(x, \lambda) - \lambda^2 g(x, \lambda), \quad x \in R, \ \lambda \in M, \tag{13}$$

где $q(x)$ определен по формуле (7).

Дифференцируя тождество (3) дважды по x, запишем

$$g''(x, \lambda) + \int_M (\lambda + \eta)e^{-x(\lambda+\eta)}g(x, \eta)\operatorname{sign}\eta\, d\rho(\eta) -$$
$$-2\int_M e^{-x(\lambda+\eta)}g'(x, \eta)\operatorname{sign}\eta\, d\rho(\eta) +$$
$$+\int_M \frac{e^{-x(\lambda+\eta)}}{\lambda+\eta}g''(x, \eta)\operatorname{sign}\eta\, d\rho(\eta) = \lambda^2 e^{-x\lambda}.$$

Подставляя сюда вместо $g''(x, \lambda)$ и $g''(x, \eta)$ соответствующие выражения, полученные из (13), после простых преобразований, в которых используется тождество (3), имеем

$$H(x, \lambda) + \int_M \frac{e^{-x(\lambda+\eta)}}{\lambda+\eta}H(x, \eta)\operatorname{sign}\eta\, d\rho(\eta) =$$
$$= -e^{-x\lambda}\left(q(x) - 2\frac{d}{dx}\left(\int_M e^{-x\eta}g(x, \eta)\operatorname{sign}\eta\, d\rho(\eta)\right)\right) = 0,$$
$$x \in R, \ \lambda \in M.$$

В силу единственности решения уравнения (3) получаем

$$H(x, \lambda) = g''(x, \lambda) - q(x) g(x, \lambda) - \lambda^2 g(x, \lambda) = 0,$$
$$\lambda \in M, \quad x \in R.$$

Очевидно, функция $\varphi(x, z)$, определенная формулой (4), дважды непрерывно дифференцируема по x. Обозначая

$$K(x, z) = \varphi''(x, z) - q(x)\varphi(x, z) - z^2\varphi(x, z), \quad x \in R, \quad z \in C \setminus \tilde{M},$$

получаем аналогичным образом, как в предыдущем случае

$$K(x, z) = -\int_M \frac{e^{-x(z+\eta)}}{z+\eta} H(x, \eta) \operatorname{sign} \eta \, d\rho(\eta).$$

Но, так как $H(x, \eta) = 0$ при $\eta \in M$ для всех x, то

$$K(x, z) = \varphi''(x, z) - q(x)\varphi(x, z) - z^2\varphi(x, z) = 0,$$
$$z \in C \setminus \tilde{M}, \quad x \in R.$$

Таким образом, пункт II теоремы доказан.

Определим функцию

$$\psi(x, z) = \int_M \frac{e^{-x\eta}}{z+\eta} g(x, \eta) \operatorname{sign} \eta \, d\rho(\eta), \quad z \in C \setminus \tilde{M}, \quad x \in R,$$

тогда

$$\varphi(x, z) = e^{-xz}(1 - \psi(x, z)). \tag{14}$$

Вычислим интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, i\lambda)\varphi(y, -i\lambda)\, d\lambda. \tag{15}$$

Используя (14), получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, i\lambda)\varphi(y, -i\lambda)\, d\lambda = \delta(x-y) -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(y-x)}\psi(x, i\lambda)\, d\lambda - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(y-x)}\psi(y, -i\lambda)\, d\lambda +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda(y-x)}\psi(x, i\lambda)\psi(y, -i\lambda)\, d\lambda \equiv \delta(x-y) - J_1 - J_2 + J_3.$$

Вычислим отдельно интегралы J_1, J_2, J_3. Они сходятся, потому что $\psi(x, i\lambda)$ и $\psi(y, -i\lambda)$, как функции от λ, принадлежат $L_2(-\infty, \infty)$ и поэтому имеют преобразование Фурье.

Рассмотрим сначала случай $x<y$.

$$J_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(y-x)}\int_M \frac{e^{-x\eta}}{\eta+i\lambda} g(x, \eta)\operatorname{sign}\eta\, d\rho(\eta)\, d\lambda =$$

$$= \int_M e^{-x\eta} g(x, \eta)\operatorname{sign}\eta \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda(y-x)}}{\eta+i\lambda}\, d\lambda\, d\rho(\eta).$$

Известно, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda(y-x)}}{\eta+i\lambda}\, d\lambda = \begin{cases} e^{-\eta(y-x)}, & \eta>0;\\ 0, & \eta<0,\end{cases}$$

поэтому

$$J_1 = \int_{M+} e^{-\eta y} g(x, \eta)\, d\rho(\eta). \tag{16}$$

Аналогично доказывается, что

$$J_2 = \int_{M-} e^{-\eta x} g(y, \eta)\, d\rho(\eta); \tag{17}$$

$$J_3 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(y-x)}\int_M \frac{e^{-x\eta}}{\eta+i\lambda} g(x, \eta)\operatorname{sign}\eta\, d\rho(\eta) \times$$

$$\times\int_M \frac{e^{-y\mu}}{\mu-i\lambda} g(y, \mu)\operatorname{sign}\mu\, d\rho(\mu)\, d\lambda = \int_M e^{-\eta x} g(x, \eta)\operatorname{sign}\eta \times$$

$$\times\int_M e^{-\mu y} g(y, \mu)\operatorname{sign}\mu \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda(y-x)}}{(\eta+i\lambda)(\mu-i\lambda)}\, d\lambda\, d\rho(\mu)\, d\rho(\eta). \tag{18}$$

Известно, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda(y-x)}}{(\eta+i\lambda)(\mu-i\lambda)}\, d\lambda = \begin{cases} \dfrac{e^{-\eta(y-x)}}{\eta+\mu}, & \eta>0,\ \mu>0;\\ \dfrac{e^{-\eta(y-x)}-e^{\mu(y-x)}}{(\mu+\eta)}, & \eta>0,\ \mu<0;\\ 0, & \eta<0,\ \mu>0;\\ -\dfrac{e^{\mu(y-x)}}{\mu+\eta}, & \eta<0,\ \mu<0.\end{cases}$$

Поэтому

$$J_3 = \int_{M+} g(x, \eta)\int_{M+}\frac{e^{-y(\eta+\mu)}}{\eta+\mu} g(y, \mu)\operatorname{sign}\mu\, d\rho(\mu)\, d\rho(\eta) +$$

$$+\int_{M-} g(x, \eta)\operatorname{sign}\eta\int_{M-}\frac{e^{-x(\eta+\mu)}}{\eta+\mu} g(y, \mu)\, d\rho(\mu)\, d\rho(\eta) +$$

$$+\int_{M+} e^{-\eta x} g(x, \eta)\operatorname{sign}\eta\int_{M-} e^{-\mu y} g(y, \mu)\operatorname{sign}\mu \times$$

$$\times\frac{e^{-\eta(y-x)}-e^{\mu(y-x)}}{\eta+\mu}\, d\rho(\mu)\, d\rho(\eta).$$

По сделанному предположению (2) справедливо равенство

$$\int_{M-} e^{-\mu y} g(y, \mu) \operatorname{sign} \mu \frac{e^{-\eta(y-x)} - e^{\mu(y-x)}}{\eta+\mu} d\rho(\mu) =$$

$$= \int_{M-} e^{-\mu y} g(y, \mu) \operatorname{sign} \mu \frac{e^{-\mu(y-x)}}{\eta+\mu} d\rho(\mu) -$$

$$- \int_{M-} e^{-\mu y} g(y, \mu) \operatorname{sign} \mu \frac{e^{\mu(y-x)}}{\eta+\mu} d\rho(\mu),$$

где последние интегралы понимаются в смысле главного значения. Подставляя это равенство в выражение (18) и изменяя порядок интегрирования в двух интегралах, что также возможно в силу предположения (2), получаем

$$J_3 = \int_{M+} g(x, \eta) \int_{M} \frac{e^{-y(\eta+\mu)}}{\eta+\mu} g(y, \mu) \operatorname{sign} \mu \, d\rho(\mu) \, d\rho(\eta) +$$

$$+ \int_{M-} g(y, \eta) \int_{M} \frac{e^{-x(\eta+\mu)}}{\eta+\mu} g(x, \mu) \operatorname{sign} \mu \, d\rho(\mu) \, d\rho(\eta). \qquad (19)$$

Это выражение также справедливо, когда $x = y$, потому что J_3 сходится и в этом случае.

Рассмотрим $J_1 + J_2$, когда $x = y$.

$$J_1 + J_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{M} e^{-x\eta} g(x, \eta) \operatorname{sign} \eta \left(\frac{1}{\eta + i\lambda} + \frac{1}{\eta - i\lambda} \right) d\rho(\eta) \, d\lambda =$$

$$= \int_{M} e^{-x\eta} g(x, \eta) \operatorname{sign} \eta \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta \, d\lambda}{\lambda^2 + \eta^2} d\rho(\eta) =$$

$$= \int_{M} e^{-x\eta} g(x, \eta) \, d\rho(\eta). \qquad (20)$$

Используя выражения (16), (17), (19) и (30), получаем при $x \leqslant y$, а в силу симметричности интеграла (15) относительно замены x и y при всех x и y:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, i\lambda) \varphi(y, -i\lambda) \, d\lambda = \delta(x - y) - \int_{M+} g(x, \eta) \times$$

$$\times \left(e^{-y\eta} - \int_{M} \frac{e^{-y(\eta+\mu)}}{\eta+\mu} g(y, \mu) \operatorname{sign} \mu \, d\rho(\mu) \right) d\rho(\eta) -$$

$$- \int_{M-} g(y, \eta) \left(e^{-x\eta} - \int_{M} \frac{e^{-x(\eta+\mu)}}{\eta+\mu} g(x, \mu) \operatorname{sign} \mu \, d\rho(\mu) \right) d\rho(\eta).$$

Учитывая тождество (3), окончательно

$$\delta(x-y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x, i\lambda)\varphi(y, -i\lambda)\,d\lambda+ \\ +\int_M g(x, \lambda)\,g(y, \lambda)\,d\rho(\lambda). \tag{21}$$

Из тождества (3) и представления (4) для функции $\varphi(x, \lambda)$ следует, что

$$\varphi(x, \lambda)=g(x, \lambda) \tag{22}$$

при $\lambda\in M_2$. В силу предположения (2) существуют предельные значения при $\lambda\in M_1$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\varphi(x, \lambda\pm i\varepsilon)\equiv\varphi(x, \lambda\pm i0).$$

Используя формулу Сохоцкого—Племеля и тождество (3), получаем

$$\varphi(x, \lambda\pm i0)=g(x, \lambda)\mp\pi i g(x, -\lambda)\operatorname{sign}(-\lambda)\,\alpha(-\lambda),\quad \lambda\in M_1. \tag{23}$$

Следовательно,

$$\varphi(x, \lambda+i0)=g(x, \lambda)-\pi i g(x, -i\lambda)\operatorname{sign}(-\lambda)\,\alpha(-\lambda);$$
$$\varphi(x, -\lambda-i0)=g(x, -\lambda)+\pi i g(x, \lambda)\operatorname{sign}\lambda\,\alpha(\lambda),\quad \lambda\in M_1.$$

Эта система решается относительно $g(x, \lambda)$, потому что ее определитель равен $1+\pi^2\alpha(\lambda)\,\alpha(-\lambda)$, а $\alpha(\lambda)\geqslant 0$, так как $\rho(\lambda)$ — монотонно растущая функция. Обозначим через Δ определитель системы, тогда запишем

$$g(x, \lambda)=\frac{1}{\Delta}\left(\varphi(x, \lambda+i0)+\pi i\alpha(-\lambda)\operatorname{sign}(-\lambda)\,\varphi(x, -\lambda-i0)\right), \tag{24}$$

$g(x, \lambda)$ — вещественная функция. В противном случае $\overline{g(x, \lambda)}$ было бы вторым решением уравнения (3), что невозможно в силу его однозначной разрешимости.

Поэтому из выражения (23) заключаем, что

$$\overline{\varphi(x, \lambda+i0)}=\varphi(x, \lambda-i0).$$

Взяв комплексное сопряжение уравнения (24) и меняя x на y, имеем

$$g(y, \lambda)=\overline{g(y, \lambda)}= \\ =\frac{1}{\Delta}\left(\varphi(y, \lambda-i0)-\pi i\alpha(-\lambda)\operatorname{sign}(-\lambda)\,\varphi(y, -\lambda+i0)\right). \tag{25}$$

Используя (22), (24), (25), преобразуем последний интеграл тождества (21), тогда равенство Парсеваля запишется в виде

$$\delta(x-y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x, i\lambda)\varphi(y, -i\lambda)\,d\lambda+$$

$$+\int_{M_2}\varphi(x,\lambda)\,\varphi(y,\lambda)\,d\rho(\lambda)+\int_{M_1}(\varphi(x,\lambda+i0)\,\varphi(y,\lambda-i0)+$$
$$+\pi^2\alpha(-\lambda)^2\,\varphi(x,-\lambda-i0)\,\varphi(y,-\lambda+i0)\,\frac{\alpha(\lambda)\,d\lambda}{(1+\pi^2\alpha(\lambda)\,\alpha(-\lambda))^2}-$$
$$-\int_{M_1}\varphi(x,\lambda+i0)\,\varphi(y,-\lambda+i0)+\varphi(x,-\lambda-i0)\,\varphi(y,\lambda-i0))\times$$
$$\times\frac{\pi i\alpha(\lambda)\,\alpha(-\lambda)\,\mathrm{sign}(-\lambda)}{(1+\pi^2\alpha(\lambda)\,\alpha(-\lambda))^2}.$$

Теорема доказана.

Поступила в редколлегию 01.09.83.