

УДК 517.968

В. А. ЩЕРБИНА

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ТРИ-ПЕРИОДИЧЕСКИМ РЕШЕНИЕМ ДЛЯ
УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В R^3

Пусть e_i ($i = 1, 2, 3$) — базис в R^3 ,

$$\Omega = \{x : x = \sum_{i=1}^3 x^i e_i, 0 \leq x^i < a^i\}$$

— базовая ячейка периодической структуры в R^3 , состоящей из ячеек

$$\Omega(N) = \Omega + Na, \quad Na = \sum_{i=1}^3 n_i a^i e_i, \quad n_i = 0, \pm 1, \dots$$

Под S далее понимается гладкая замкнутая поверхность, лежащая в Ω и делящая её на две связанные части Ω_{in} и Ω_{ex} .

Ниже будут рассматриваться периодические решения первой и второй краевых задач для уравнения Лапласа в $R^3 \setminus \bigcup_N \Omega_{\text{in}}(N)$, удовлетворяющие соответствующим краевым условиям на S , т. е.

$$1) \quad u(x + Na) = u(x), \quad x \in R^3 \setminus \bigcup_N \overline{\Omega_{\text{in}}(N)};$$

$$2) \quad \Delta u(x) = 0, \quad x \in R^3 \setminus \bigcup_N \overline{\Omega_{\text{in}}(N)};$$

$$3) \quad u(x) = f(x) \left(\frac{\partial u(x)}{\partial n} = f(x) \right), \quad x \in S.$$

1. Периодический аналог потенциалов простого и двойного слоев на S .

Периодический аналог фундаментального решения уравнения Лапласа может быть построен методом, предложенным в [1], путем почленного интегрирования абсолютно сходящегося тройного ряда

$$\varphi_{ijk}(x) = \sum_N \partial_i \partial_j \partial_k \frac{1}{|x + Na|}.$$

Как нетрудно показать, функция

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x) = \sum_N \left[\frac{1}{|x + Na|} - \left(x^i - \frac{a^i}{2}\right) \left(x^j - \frac{a^j}{2}\right) \partial_i \partial_j \frac{1}{\left|\frac{a}{2} + Na\right|} - \right. \\ \left. - \left(x^i - \frac{a^i}{2}\right) \partial_i \frac{1}{\left|\frac{a}{2} + Na\right|} - \frac{1}{\left|\frac{a}{2} + Na\right|} \right] \end{aligned} \quad (1)$$

гармонична в R^3 за исключением точек Na , и существуют такие квадратичная $A(x)$ и линейная $L(x)$ формы, что

$$\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x) + A(x) + L(x)$$

периодична, т. е.

$$\varphi(x + Na) = \varphi(x) \text{ для } \forall N.$$

При этом, очевидно,

$$\Delta \varphi(x) = C \text{ при } x \neq Na,$$

и, следовательно, все производные $\varphi(x)$ гармоничны (за исключением полюсов).

Ряд (1) сходится очень медленно, что делает его мало пригодным для табулирования $\varphi(x)$. Можно, однако, указать способ табулирования, основанный на восстановлении $\varphi(x)$ по её производным достаточно высокого порядка:

$$\varphi(x) \cong \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \varphi_m \left(\frac{a}{2} + t \left(x - \frac{a}{2} \right) \right) dt + P_{n-1}(x).$$

Здесь $\varphi_m(x) = \sum_{|n| < m} \frac{1}{|x + Na|}$, а коэффициенты полинома $P_{n-1}(x)$

последовательно определяются из условий периодичности $\varphi(x)$ и её производных.

Детальное обсуждение процедуры табулирования выходит за рамки данной работы.

Введем в рассмотрение три-периодические потенциалы простого

$$(\hat{K}\mu)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \varphi(x-y) \mu(y) dS, \quad x \in \bigcup_N (S + Na)$$

и двойного

$$(\hat{K}_1\nu)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n(y)} \varphi(x-y) \nu(y) dS, \quad x \in \bigcup_N (S + Na)$$

слоев. Здесь $\mu, \nu \in L^2(S)$, так что эти потенциалы — гладкие функции вне $\bigcup_N (S + Na)$, причем

$$\Delta(\hat{K}\mu)(x) = \frac{c}{2\pi} \int \mu ds, \quad \Delta(\hat{K}_1\nu)(x) = 0.$$

Ввиду периодичности достаточно рассмотрение свойств этих потенциалов провести внутри базовой ячейки.

Наряду с $(\hat{K}\mu)(x)$, $(\hat{K}_1\nu)(x)$ введем в рассмотрение вполне непрерывные в $L^2(S)$ операторы K , K_1 , где

$$(K\mu)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \varphi(x-y) \mu(y) ds, \quad x \in S$$

и

$$(K_1\nu)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n(y)} \varphi(x-y) \nu(y) dS, \quad x \in S.$$

2. Предельные свойства потенциала двойного слоя. Если $\nu(x)$ непрерывна на S , n — внешняя по отношению к S нормаль, то, как известно, равномерно по $x \in S$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\hat{K}_1\nu)(x \pm \varepsilon n(x)) = \pm \nu(x) + (K_1\nu)(x). \quad (2)$$

Ниже показано, что это равенство остаётся справедливым для гладкой S и в случае $\forall \nu \in L^2(S)$, только левую часть надо понимать как сильный предел в $L^2(S)$.

Аналогичный результат имеет место и для предельных значений нормальной производной от $(\hat{K}\mu)(x)$.

Введем вполне непрерывный в $L^2(S)$ оператор $K_{1,\varepsilon}$

$$(K_{1,\varepsilon}\nu)(x) = (\hat{K}_1\nu)(x - \varepsilon n(x)), \quad x \in S.$$

Покажем, что справедлива следующая

Лемма 1. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что $\|K_{1,\varepsilon}\| < M$ равномерно по $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.*

Доказательство. Пусть $\{\omega_j\}_{j=1}^N$ — совокупность открытых множеств на S , покрывающих её и таких, что каждое из ω_j взаимно однозначно проектируется на некоторую плоскость, причем координаты проекции и дают гладкую параметризацию $x = x(u)$, $u \in \tilde{\omega}_j \subset R^2$. Пусть теперь $e_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, N$ — гладкое разбиение единицы на S , причем $\text{supp } e_j \subset \omega_j$.

Поскольку, очевидно, если χ_ω — характеристическая функция ω , то $\|(1 - \chi_\omega)(K_{1,\varepsilon}(e_j\nu))\| < c\|\nu\|$, и для доказательства леммы достаточно доказать $\exists \varepsilon > 0$ такого, что

$$\|\chi_{\omega_j} K_{1,\varepsilon}(e_j\nu)\| < C\|\nu\| \quad (3)$$

равномерно по $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Обозначив координаты y через v , запишем

$$(\tilde{K}_{1,\varepsilon}(e_j\nu))(x) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{(x(u) - x(v) - \varepsilon n(u), n(v))}{|x(u) - x(v) - \varepsilon n(u)|^3} e_j(y(v)) \nu(y(v)) dS.$$

Из специального выбора нашей параметризации следует, что

$$m|u - v| > |x(u) - x(v)| > |u - v|.$$

Ясно, что

$$(x(u) - x(v) - \varepsilon n(u), n(v)) = -\varepsilon + O(|u - v|^2)$$

и

$$|x(u) - x(v) - \varepsilon n(u)|^2 > (|u - v|^2 + \varepsilon^2)(1 - \delta),$$

где δ можно сделать сколь угодно малым при надлежащем выборе ω_j . Итак,

$$|(\tilde{K}_{1,\varepsilon}(e_j v)(x(u)))| < C \int \frac{\varepsilon + k(u-v)^2}{(|u-v|^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} |v(y)| e_j(y) d^2 v = \\ = C\Phi_{j,\varepsilon}^1(u) + Ck\Phi_{j,\varepsilon}^2(u) = C\Phi_{j,\varepsilon}(u).$$

Но

$$\int_{u \in \tilde{\omega}_j} |\Phi_{j,\varepsilon}(u)|^2 d^2 u \leq 2 \int [|\Phi_{j,\varepsilon}^1|^2 + k^2 |\Phi_{j,\varepsilon}^2|^2] d^2 u = \\ = 2 \int |\tilde{\Phi}_{j,\varepsilon}^1(\lambda)|^2 d^2 \lambda + 2k^2 \int |\Phi_{j,\varepsilon}^2|^2 d^2 u < C_1 \int_S |v|^2 dS,$$

где $\tilde{\Phi}_{j,\varepsilon}^1(\lambda) = (F\Phi_{j,\varepsilon}^1)(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $\Phi_{j,\varepsilon}^1$. Действительно

$$\left| \int e^{i(u,\lambda)} \frac{\varepsilon d^2 u}{(u^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \right| < C,$$

откуда и следует неравенство (3). Тем самым лемма полностью доказана.

Лемма 2. В метрике $L^2(S) K_{1,\varepsilon} v$ сильно стремится при $\varepsilon \downarrow 0$ к $(K_1 - I)v$.

Доказательство. Это утверждение легко проверяется для гладких v . В общем случае достаточно воспользоваться леммой 1 и представлением $v = v_n + (v - v_n)$, где последовательность гладких функций $v_n \rightarrow v$.

Лемма 3. Если $\frac{\partial}{\partial n}(\hat{K}v)(x)|_{x \in S} = 0$ с внутренней (или внешней) стороны S , то $v = 0$.

Доказательство. Возьмем

$$v(x) = (\hat{K}v)(x) - \frac{1}{|\Omega_{in}|} \int_{\Omega_{in}} \hat{K}v d^3 x.$$

Тогда первая формула Грина дает (с учетом леммы 1 и равенства

$$\Delta(\hat{K}v)(x) = \frac{c}{2\pi} \int_S v ds):$$

$$\int_{\Omega_{in}} |\nabla \hat{K}v|^2 d^3 x = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} v \frac{\partial}{\partial n}(\hat{K}v) ds = 0, \quad S_\varepsilon = \bigcup_{x \in S} (x - \varepsilon n(x)).$$

Таким образом, $(\hat{K}v)(x) = \text{const}$ при $x \in \Omega_{in}$, т. е. $\Delta(\hat{K}v) = 0$ и $(v, e) = 0$. Поэтому $\hat{K}v$ гармонична и в Ω_{ex} , периодична и равна

константе на S . Отсюда немедленно вытекает, что она константа в Ω_{ex} , т. е. $v = 0$.

3. Разрешимость краевых задач и свойства граничных операторов. Наряду с доказательством теорем существования мы покажем некоторые свойства граничных операторов K , K_1 и N_{in} , N_e , которые в три-периодическом случае во многом аналогичны свойствам граничных операторов, доказанным в [2] в непериодическом случае.

Теорема 1. *Периодическая задача Дирихле однозначно разрешима при любом краевом условии.*

Доказательство. Решение будем искать в виде потенциала двойного слоя

$$(\hat{K}_1 v)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial \varphi(x-y)}{\partial n(y)} v(y) dS$$

(n — внешняя нормаль по отношению к Ω_{in}).

В смысле предельного перехода в метрике $L^2(S)$

$$(\hat{K}_1 v)(x + \varepsilon n(x)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} v(x) + (K_1 v)(x) = f(x). \quad (4)$$

Союзное однородное уравнение имеет вид

$$0 = \mu(x) + \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n(x)} \varphi(x-y) \mu(y) dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial n(x)} (\hat{K} \mu)(x - \varepsilon n(x)).$$

По лемме 3 $\mu = 0$.

Итак, уравнение (4) в силу альтернативы Фредгольма однозначно разрешимо, а вместе с ним и три-периодическая задача Дирихле при любом $f \in L^2(S)$.

Теорема 2. *Для разрешимости периодической задачи Неймана необходимо и достаточно, чтобы граничное значение нормальной производной было ортогонально единице в $L^2(S)$.*

Доказательство. Необходимость следует из того, что для периодической гладкой функции f

$$\int_{S_0} \frac{\partial f}{\partial n} dS = 0,$$

где S_0 — граница ячейки Ω .

Итак, решение будем искать в виде $(\hat{K} \mu)(x)$, $x \in x\Omega_{\text{ex}}$, где $(\mu, e) = 0$. Тогда $(\hat{K} \mu)(x)$ гармонична в Ω_{ex} и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial n(x)} (\hat{K} \mu)(x + \varepsilon n(x)) = f(x), \quad (f, e) = 0, \quad x \in S. \quad (5)$$

В силу альтернативы Фредгольма для однозначной разрешимости (5) необходимо и достаточно, чтобы однородное уравнение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial n(x)} (\hat{K} \mu)(x + \varepsilon n(x)) = 0, \quad x \in S$$

имело лишь тривиальное решение в подпространстве $H_1(S)$ функций $\mu \in L^2(S)$, ортогональных константе. Но этот факт доказан в лемме 3.

Обозначим Q оператор проектирования на $H_1(S)$ и введем оператор $K_0 = QKQ$, вполне непрерывный и симметричный в $H_1(S)$.

Лемма 4. *Оператор K_0 обратим в $H_1(S)$.*

Доказательство. Действительно, из $K_0\mu = 0$, $\mu \in H_1(S)$ следует, что $K\mu = \text{const}$. Но $\hat{K}\mu$ гармонична в Ω_{in} , а это значит, что $\hat{K}\mu = \text{const}$, т. е. $\mu = 0$.

Введем в рассмотрение операторы N_{in} , N_{ex} , действующие в пространстве $H_1(S)$, равенствами

$$(N_{\text{in}} K_0 \mu)(x) = \pm \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial n(x)} (\hat{K}\mu)(x \mp \varepsilon n(x)), \quad x \in S.$$

Поскольку $K_0\mu = K\mu - \frac{1}{|S|}(K\mu, e)e$ имеет единственное гармоническое продолжение в Ω_{in} , Ω_{ex} , отличающееся лишь на константу от $\hat{K}\mu$, то наше определение корректно.

Как легко видеть, операторы N_{in} имеют в силу леммы 4 плотную в $H_1(S)$ область определения, симметричны и положительно определены.

Очевидно, что

$$N_{\text{in}} K_0 \mu = (I \pm K_1^*) \mu,$$

и, следовательно, операторы $I \pm K_1^*$ обратимы в $H_1(S)$. Поскольку

$$N_{\text{in}}^{-1} = K_0 (I \pm K_1^*)^{-1}$$

вполне непрерывны, то N_{in} — самосопряженные положительно определенные операторы с дискретным спектром.

Так как $N_{\text{in}} + N_{\text{ex}} = 2K_0^{-1} = 2K_0^{-1}$, то K_0 тоже положительно определен (разумеется, в $H_1(S)$).

Теорема 3. *Периодическая краевая задача для уравнения Лапласа с краевыми условиями*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [u(x - \varepsilon n(x)) - u(x + \varepsilon n(x))] = 0;$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\lambda_1 \frac{\partial u(x - \varepsilon n(x))}{\partial n(x)} - \frac{\partial u(x + \varepsilon n(x))}{\partial n(x)} \lambda_2 \right] = f(x),$$

$$x \in S, \quad \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0$$

однозначно (с точностью до константы) разрешима тогда и только тогда, когда $f \in H_1(S)$.

Доказательство. Необходимость условия теоремы немедленно вытекает из три-периодичности $u(x)$ и ее гармоничности

в $\Omega_{\text{in}}, \Omega_{\text{ex}}$. Для доказательства достаточности будем искать решение в виде $u(x) = (\hat{K}_0 \mu)(x)$, или, что все равно, в виде $u(x) = (\hat{K} \mu)(x)$, $(\mu, e) = 0$.

Тогда второе краевое условие принимает вид

$$(\lambda_1 N_{\text{in}} + \lambda_2 N_{\text{ex}}) K_0 \mu = f,$$

которое однозначно разрешимо при $\forall f \in H_1(S)$. Это уравнение можно переписать в форме

$$\mu + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} K_1 \mu = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} f.$$

Замечание. Из самосопряженности N_{in}^{-1} следует, что $K_1^* K_0 = K_0 K_1$, т. е. оператор $K_0^{1/2} K_1 K_0^{-1/2}$ симметричен. Это значит, что все собственные значения оператора K_1 в H_1 вещественны и в силу доказанной теоремы не превышают единицы.

При решении периодических краевых задач численными методами полезными являются следующие теоремы.

Теорема 4. Пусть S' — гладкая замкнутая поверхность, лежащая в Ω_{in} , и $\hat{K}_{1, S'} \mu$ — потенциал двойного слоя на S' с плотностью $\mu \in L^2(S')$. Тогда множество $\bigcup_{\mu \in L^2(S')} \hat{K}_{1, S'} \mu$ векторов, рассматриваемых как элементы $L^2(S)$, плотно в $L^2(S)$.

Доказательство. Пусть $v \in L^2(S)$ таково, что $(\hat{K}_{1, S'} \mu, v)_{L^2(S)} = 0$ для $\forall \mu \in L^2(S')$.

Тогда $(\mu, \frac{\partial}{\partial n} \hat{K} S v)_{L^2(S')} = 0$, где $\hat{K} S v$ — потенциал простого слоя для S , т. е., в виду произвольности μ ,

$$\frac{\partial}{\partial n(x)} (\hat{K} S v)(x) = 0, \quad x \in S.$$

В силу леммы 3 $v = 0$, что и доказывает нашу теорему.

Теорема 5. Множество функций вида $\frac{\partial}{\partial n(x)} (\hat{K}_{1, S'} \mu)(x)$, $\mu \in L^2(S)$, $x \in S$ плотно в $H_1(S)$.

Доказательство. Пусть вектор $v \in H_1(S)$ таков, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial n} \hat{K}_{1, S'} \mu, v \right)_{L^2(S)} = 0.$$

Тогда $(\hat{K}_{1, S} v)(x)$ гармонична в Ω_{in} и, в виду произвольности μ , имеет равную нулю на S' нормальную производную. Ясно, что

$$(\hat{K}_{1, S} v)(x) = \text{const} = C \quad (6)$$

в Ω_{in} .

Поскольку, в силу доказанных ранее свойств операторов N_{in}, K для $\forall \gamma \in H_1(S)$ $(N_{\text{in}} K \gamma, \delta) = 0$ только в случае $\delta = e$, то $\hat{K}_{1, S} \delta \perp$

$\perp H_1(S)$ только при $\delta = e$. Отсюда немедленно вытекает, что уравнение (6) в $H_1(S)$ может иметь только тривиальное решение (при $C = 0$). Теорема полностью доказана.

Список литературы

1. Бердичевский В. Л. Вариационные методы в механике сплошной среды.— М.: Наука, 1983.— 387 с.
2. Щербина В. А. Граничные операторы и один вариант метода дискретных вихрей в задаче Неймана.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1985, вып. 43, с. 80—96.

Поступила в редколлегию 12.11.83.