УДК 513.88

М. И. ОСТРОВСКИЙ

ОБ УМЕНЬШЕНИИ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА В РЕЗУЛЬТАТЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ

Пусть X — банахово пространство, $B(X)$ — алгебра ограниченных линейных операторов в X. Существенным спектром оператора $T \in B(X)$ называется множество $\{\lambda \in \boldsymbol{C}\colon \ \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X,\ \|x_n\| = 1,\ \|(T - \lambda I)x_n\| \to 0 \ (n \to \infty)\}$.

Боллобасом поставлен следующий вопрос*:

Пусть заданы банахово пространство X и оператор $T \in B(X)$. Можно ли найти банахово пространство $Y \supset X$ и изометрический гомоморфизм φ алгебры $B(X)$ в алгебру $B(Y)$ такие, чтобы были выполнены условия: α) $\varphi(S)|_X = S$ для любого $S \in B(x)$; β) спектр $\varphi(T)$ совпадает с существенным спектром T?

Ясно, что для оператора T, не имеющего несущественного спектра, ответ положителен. Покажем, что во всех остальных случаях ответ отрицателен.

Теорема. *Если оператор T имеет непустой несущественный спектр, то нельзя найти пару (Y, φ), для которой выполняются условия α) и β).*

Доказательство. Предположим, что искомая пара (Y, φ) существует. Пусть a — точка несущественного спектра оператора T. Тогда $(T - aI)$ является изоморфизмом X на собственное подпространство. Рассмотрим какой-нибудь ненулевой оператор $S \in B(X)$ такой, что $S(T - aI) = 0$. Такие операторы существуют, примером может служить $S(x) = f(x)y$, где $f \in X^*$ — ненулевой функционал, равный нулю на $\operatorname{Im}(T - aI)$, а $0 \neq y \in X$. Так как φ — гомоморфизм, то имеем

$$0 = \varphi(0) = \varphi(S(T - aI)) = \varphi(S) \cdot (\varphi(T) - a\varphi(I)). \qquad (\divideontimes)$$

Рассмотрим отдельно два случая: $a = 0$ и $a \neq 0$.

1) $a = 0$. Так как $S \neq 0$, то в силу условия α) имеем $\varphi(S) \neq 0$. В силу условия β) точка 0 не принадлежит спектру $\varphi(T)$, и, следовательно, $\varphi(T)$ — обратимый оператор. Поэтому $\varphi(S) \times \varphi(T) \neq 0$, что противоречит $(\divideontimes)$.

2) $a \neq 0$. Из $I = I^2$ следует $\varphi(I) = (\varphi(I))^2$. Поэтому $\varphi(I)$ является проектором на некоторое подпространство в Y. Последнее содержит X, так как в силу условия α) имеем $\varphi(I)|_X = I$. Для любого $Q \in B(X)$ имеем $\varphi(Q) = \varphi(I) \cdot \varphi(Q) = \varphi(Q)\varphi(I)$. Отсюда следует, что подпространство $W = \operatorname{Im}\varphi(I)$ инвариантно относительно $\varphi(Q)$ и

$$\operatorname{Ker}\varphi(I) \subset \operatorname{Ker}\varphi(Q), \ \forall Q \in B(X). \qquad (\divideontimes\divideontimes)$$

Покажем, что оператор $(\varphi(T) - aI_Y)|_W$ обратим. Оператор $\varphi(T) - aI_Y$ обратим в силу условия β). Так как $Y = W \oplus \operatorname{Ker}\varphi(I)$, то каждый элемент из Y можно записать в виде пары (u, v), где $u \in W$, $v \in \operatorname{Ker}\varphi(I)$. Так как W инвариантно относительно $\varphi(T)$, то из $(\divideontimes\divideontimes)$ следует, что $(\varphi(T) - aI_Y)\ (u, v) = ((\varphi(T) - aI_Y)u, -av)$. Учитывая, что $a \neq 0$ заключаем, что $(\varphi(T) - aI_Y)^{-1} W \subset W$, откуда и получаем обратимость $(\varphi(T) - aI_Y)|_W$. Вспоминая, что $\varphi(I)$ — проектор на W, в силу $(\divideontimes)$ имеем

$$0 = \varphi(S)|_W(\varphi(T) - a\varphi(I))|_W = \varphi(S)|_W(\varphi(T) - aI_Y)|_W.$$

Так как из α) и $W \supset X$ следует $\varphi(S)|_W \neq 0$, то приходим к противоречию.

Замечание. Из приведенного доказательства видно, что ответ на вопрос отрицателен и в том случае, если не предполагать изометричности гомоморфизма φ.

Поступила в редколлегию 10.10.84.

---

* Bollobas B. To what extent can the spectrum of an operator be diminished under an extension?. —Lect. Notes Math., 1984. 1043, p. 210.