

УДК 517.522.2

К. Г. МАЛЮТИН

**ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ В ПОЛУПЛОСКОСТИ ОБОБЩЕННЫМИ
КАНОНИЧЕСКИМИ ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ**

1. Обозначим через $[\rho(r), \infty)^+$ класс функций аналитических в полуплоскости $C^+ = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ и типа не выше, чем нормальный при уточненном порядке $\rho(r)$ (причем $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho > 1$) и ограниченных в каждой конечной части полуплоскости C^+ .

Определение 1. Последовательность $A = \{a_n\}$ будем называть интерполяционной в классе $[\rho(r), \infty)^+$, если для любой последовательности чисел $\{b_n\}$, удовлетворяющей условию

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |b_n|}{r_n^{\rho(r_n)}} < \infty \quad (a_n = r_n e^{i\theta_n}), \quad (1)$$

существует функция $f(z) \in [\rho(r), \infty)^+$, решающая интерполяционную задачу

$$f(a_n) = b_n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2)$$

Эта задача в предположении, что множество A «отделено» от вещественной оси, исследовалась Нгуен Тхыонг Уенём [2]. Для таких множеств им были получены необходимые и достаточные условия интерполяционности множеств в классе $[\rho(r), \infty)^+$.

Рассмотрим эту задачу без дополнительных ограничений на мнимые части элементов множества A .

2. Введем некоторые понятия и определения. Обозначим через $C(z, r)$ — круг с центром в точке z и радиусом r , а через $\mu(D)$ — меру:

$$\mu(D) = \sum_{a_k \in D} \sin \theta_k. \quad (3)$$

Говорят, что множество A имеет конечную верхнюю плотность при порядке $\rho(r)$, если имеет место соотношение

$$\mu(C(0, r)) = O(r^{\rho(r)}). \quad (4)$$

Имеет место следующая теорема [2]:

Теорема 1. Если последовательность A обладает тем свойством, что при ρ нецелом она имеет конечную верхнюю плотность при порядке $\rho(r)$, а при целом ρ еще дополнительно удовлетворяет соотношению:

$$\frac{1}{r^{\rho(r)-\rho}} \left| \frac{1}{\rho} \sum_{r_n \leq r} \frac{\sin \rho \theta_n}{r_n^\rho} \right| = O(1), \quad (5)$$

то функция

$$E(z) = \prod_{r_n \leq 1} \frac{z - a_n}{z - \overline{a_n}} \prod_{r_n > 1} E_\rho(z, a_n, a_n) \quad (\rho = [\rho]), \quad (6)$$

где

$$E_\rho(z, u, v) = \left(1 - \frac{z}{u}\right) \left(1 - \frac{z}{v}\right)^{-1} \exp \sum_{j=1}^{\rho} \frac{z^j}{j} \left(\frac{1}{v^j} - \frac{1}{u^j}\right), \quad (7)$$

принадлежит классу $[\rho(r), \infty)^+$.

Пусть множество $A \subset C^+$ и имеет конечную верхнюю плотность при порядке $\rho(r)$. Тогда при ρ нецелом присоединенным

множеством для A считается само множество A . Это же множество считается присоединенным для A , если ρ — целое и выполнено соотношение (5). Если же (5) не выполняется, то присоединенным для A называется множество $A \cup M$, где элементы множества $M = \{\mu_n\}$ удовлетворяют соотношениям:

$$а) d(M, a_n) > \delta r_n^{1-\rho(r_n)}, \quad \delta > 0 \quad (r_n = |a_n|);$$

$$б) \tau_{n+1} - \tau_n > \delta \tau_n^{1-\rho(\tau_n)};$$

в) множество M имеет конечную верхнюю плотность при порядке $\rho(r)$;

г)

$$r^{\rho-\rho(r)} \left| \frac{1}{\rho} \left(\sum_{r_n < r} \frac{\sin \rho \theta_n}{r_n^\rho} + \sum_{\tau_n < r} \frac{\sin \rho \theta_n}{r_n^\rho} \right) \right| = O(1),$$

где $\mu_n = \tau_n e^{i\theta_n}$, $d(M, a_n)$ — расстояние между множеством M и a_n .

Теорема 2 [2]. Для любого множества $A \subset C^+$, имеющего конечную верхнюю плотность при порядке $\rho(r)$, всегда существует присоединенное множество.

$$\text{Функцию} \quad L(z) = E(z) \prod_{n=1}^{\infty} E_{\rho}(z, \mu_n, \mu_n), \quad (8)$$

где $E(z)$ определена соотношением (6), назовем присоединенной функцией множества A . Из теоремы 1 следует, что $L(z) \in [\rho(r), \infty)^+$.

3. Основным результатом настоящей работы будет следующая

Теорема 3. Для того, чтобы множество $A \subset C^+$, все предельные точки которого лежат на вещественной оси, было интерполяционным в классе $[\rho(r), \infty)^+$, необходимо и достаточно, чтобы оно имело конечную верхнюю плотность при порядке $\rho(r)$, а для любой присоединенной функции $L(z)$ имело место соотношение:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n^{\rho(r_n)}} \ln \frac{1}{\operatorname{Im} a_n |L'(a_n)|} < \infty. \quad (9)$$

Доказательство необходимости повторяет рассуждения, проводимые в [2]. Заметим только, что из результатов работы [3] следует, что из любого множества $A \subset C^+$, все предельные точки которого лежат на вещественной оси, можно выделить подпоследовательность $\{v_n\} \subset A$, удовлетворяющую условию:

$$\prod_{k \neq n} \left| \frac{v_n - v_k}{v_n - \overline{v_k}} \right| \geq \delta > 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

В дальнейшем будут полезны следующие леммы:

Лемма 1. Пусть $a, b, c, d \in C^+$. Положим

$$u = \frac{a-b}{a-\bar{b}}, \quad v = \frac{d-c}{d-\bar{c}}.$$

Если $\left| \frac{b-c}{b-\bar{c}} \right| \leq \frac{\delta}{4}$, $\left| \frac{a-d}{a-\bar{d}} \right| \leq \frac{\delta}{4}$, $|u| \geq \delta$, то $|v| \geq |u|^\beta$, где $\beta = \ln \frac{\delta}{4} (\ln \delta)^{-1}$.

Доказательство легко получить, применяя конформное отображение $(z-i)(z+i)^{-1}$ полуплоскости C^+ в единичный круг $S(0, 1)$ и аналогичную лемму для круга [3, с. 33].

Лемма 2. Пусть $a, b \in C^+$, $|a| > 1$. Тогда, если $\left| \frac{a-b}{a-\bar{b}} \right| < \varepsilon$ ($0 < \varepsilon < 1$), то

$$a) |a-b| \leq \frac{2\varepsilon \operatorname{Im} a}{1-\varepsilon}; \quad (10)$$

$$б) \left| \arg \frac{a}{b} \right| \leq \frac{2\varepsilon \operatorname{Im} a}{1-\varepsilon}. \quad (11)$$

Определение 2. Будем говорить, что множество $A' = \{\lambda_n\}$ является K -сдвигом при уточненном порядке $\rho(r)$ относительно множества $A = \{a_n\}$, $A \subset C^+$, если существует такое отображение ω множества A на A' , что $\omega(a_n) = \lambda_n \in \Omega(a_n, K)$ ($r_n > 1$), $\lambda_n = \omega(a_n) = a_n$ ($r_n \leq 1$), где

$$\Omega(a, K) = \left\{ z : \left| \frac{z-a}{z-\bar{a}} \right| \leq \exp [-K |a|^{\rho(|a|)}] \right\}.$$

В этом случае обобщенной присоединенной функцией множеств A и A' мы будем называть произведение

$$L(z, A', A) = \prod_{r_k \leq 1} \frac{z-a_k}{z-\bar{a}_k} \prod_{r_k > 1} E_p(z, \lambda_k, a_k) \times \prod_{k=1}^{\infty} E_p(z, \mu_k, \mu_k), \quad (12)$$

где $E_p(z, u, v)$ определена формулой (7).

Пусть далее множество $A \cup M$ является присоединенным для A , а $\{l_n\}$ — неограниченная, монотонно возрастающая последовательность положительных чисел. Обозначим через $\{A_n\}$ последовательность конечных подмножеств множества A , исчерпывающих A (т. е. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$), такую, что

$$A_n = \left\{ a_k \in A : r_k \leq l_n, \operatorname{Im} a_k \geq \frac{1}{l_n} \right\},$$

а через M_n — аналогичную последовательность подмножеств из

М. Не ограничивая общности, будем считать, что A_n состоит из n элементов. Кроме того, положим

$$L_k(z, A', A) = \frac{\lambda_k}{\bar{\lambda}_k} \frac{z - \bar{\lambda}_k}{z - \lambda_k} L(z, A', A).$$

Теорема 4. Пусть последовательность $A = \{a_k\}$ имеет конечную верхнюю плотность при порядке $\rho(r)$, а для любой присоединенной функции $L(z)$ выполняется условие (9). Тогда существует число $K > 0$ такое, что

1. При любом K -сдвиге при порядке $\rho(r)$ множеств $A_n = \{a_k\}_1^n$ верно соотношение:

$$\ln |L_k(t, A'_n, A_n)| \geq -K r_k^{\rho(r_k)}, \quad (13)$$

где $t \in \Omega(a_k, K)$.

2. $\Omega(a_i, K) \cap \Omega(a_j, K) = \emptyset$, если $i \neq j$.

3. Любой K -сдвиг при порядке $\rho(r)$ множеств A_n ($n = 1, 2, \dots, A_\infty = A$) взаимнооднозначен.

4. При любом K -сдвиге при порядке $\rho(r)$ множеств A_n последовательность функций $L(z, A'_n, A_n)$ равномерно ограничена на каждом компакте в C^+ .

Из леммы 2 следует, что если множество A имеет конечную верхнюю плотность при порядке $\rho(r)$, то существует $K > 0$ такое, что для любого K -сдвига выполняется неравенство

$$\sum_{r'_n \leq r} \sin \theta'_n \leq C r^{\rho(r)}, \quad (14)$$

где $\lambda_n = r'_n e^{i\theta'_n}$, а число $C > 0$ не зависит от сдвига.

Докажем теорему 4.1. Из (9) следует, что существует число $K_1 > 0$, такое что

$$\ln |L_k(a_k, A, A)| \geq -K_1 r_k^{\rho(r_k)} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (15)$$

Представим $L_k(a_k, A, A)$ в виде произведения:

$$L_k(a_k, A, A) = L_k^{(1)}(a_k, A, A) L_k^{(2)}(a_k, A, A),$$

где

$$L_k^{(1)}(a_k, A, A) = \prod_{\substack{r_k \\ 2} \leq r_j, \tau_j \leq \frac{3}{2} r_k} \left(1 - \frac{a_b}{a_j}\right) \left(1 - \frac{a_k}{\bar{a}_j}\right)^{-1} \frac{\bar{\mu}_j}{\mu_j} \frac{a_k - \mu_j}{a_k - \bar{\mu}_j}. \quad (16)$$

Верна следующая оценка [2, с. 111—112]:

$$\ln |L_k^{(2)}(a_k, A, A)| \leq K_2 r_k^{\rho(r_k)}, \quad (17)$$

при некотором $K_2 > 0$.

Из (15), (17) следует, что

$$\ln |L_k^{(1)}(a_k, A, A)| \geq -(K_1 + K_2) r_k^{\rho(r_k)}. \quad (18)$$

Величину $L_k(a_k, A_n, A_n)$ также представим в виде произведения двух сомножителей:

$$L_k(a_k, A_n, A_n) = L_k^{(1)}(a_k, A_n, A_n) L_k^{(2)}(a_k, A_n, A_n),$$

где $L_k^{(1)}(a_k, A_n, A_n)$ определяется аналогично (16).

Из (18) получаем, что

$$\ln |L_k^{(1)}(a_k, A_n, A_n)| \geq -(K_1' + K_2) r_k^{\rho(r_k)}. \quad (19)$$

Отсюда в частности следует неравенство

$$\ln \left| \frac{a_k - v_j}{a_k - v_j} \right| \geq -(K_1 + K_2) r_k^{\rho(r_k)} \quad (v_j \neq a_k),$$

где через $\{v_j\}$ обозначено множество $A_n \cup M_n$.

Выберем теперь число $K_3 > K_1 + K_2$ так, чтобы

$$\exp[-K_3 |v_j|^{\rho(v_j)}] \leq \frac{1}{4} \exp[-(K_1 + K_2) r_k^{\rho(r_k)}] \\ \left(\frac{r_k}{2} \leq |v_j| \leq \frac{3}{2} r_k \right).$$

Применяя лемму 1, получаем, что

$$\left| \frac{t - v_j'}{t - v_j} \right| \geq \left| \frac{a_k - v_j}{a_k - v_j} \right|^{\beta_k} \quad (\{v_j'\} = A_n' \cup M_n)$$

для всех $t \in \Omega(a_k, K_3)$, $\lambda_j \in \Omega(a_j, K_3)$, где

$$\beta_k = \ln \frac{1}{4} \exp[-K_3 r_k^{\rho(r_k)}] \ln^{-1} \exp[-K_3 r_k^{\rho(r_k)}].$$

Поэтому

$$|L_k^{(1)}(t, A_n', A_n)| \geq |L_k^{(1)}(a_k, A_n, A_n)|^{\beta_k} \geq \frac{1}{4} \exp[-K_3 r_k^{\rho(r_k)}]. \quad (20)$$

Применяя неравенство (14) и стандартные оценки для канонических произведений, нетрудно показать, что

$$\ln |L_k^{(2)}(t, A_n', A_n)| \leq K_4 r_k^{\rho(r_k)} \quad (21)$$

при некотором $K_4 > 0$.

Из (20) и (21) получаем искомую оценку (13). П. 2 и 3 непосредственно следуют из п. 1.

4. Используя лемму 2 и неравенство (14), можно показать, что

$$\ln |L(z, A_n', A_n)| \leq K r^{\rho(r)} \quad (K > 0) \quad (22)$$

равномерно по всем $n = 1, 2, \dots$ Из (22) и следует утверждение п. 4. Теорема полностью доказана.

Заметим далее, что функция $L(z, A_n', A_n)$ отличается от произведения Вейерштрасса — Неванлинны. Модифицированные

таким образом канонические произведения лучше приспособлены к последующим рассуждениям. Дело в том, что если

$$L(z, A'_n, A_n) = L(z, A''_n, A_n) \quad (23)$$

для n попарно различных точек $z = z_1, z_2, \dots, z_n$ верхней полуплоскости C^+ , отличных от нуля и от точек множества M_n , то равенство (23) автоматически выполняется еще в $n+1$ попарно различных точках $z = \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n, 0$. В то же время степень многочлена, стоящего в числителе дроби, которая получается после сокращения разности

$$L(z, A'_n, A_n) - L(z, A''_n, A_n)$$

на общий множитель, не имеющий корней, не превышает $2n$. Точнее говоря, нами доказана

Лемма 3. Если $A'_n, A''_n \subset C^+$ и равенство (23) верно для всех z , равных n попарно различным точкам полуплоскости C^+ , отличным от точек множества M_n и от 0, то $A'_n = A''_n$.

Пусть далее $L_k(z, A'_n, A_n)$ определена формулой (12). Положим

$$q_k(A_n, K) = \inf \{ |L_k(a_k, A'_n, A_n)| : \lambda_j \in \Omega(a_j, K) \},$$

$$(A'_n = \{\lambda_j\}_1^n). \quad (24)$$

Лемма 4. Пусть число $K > 0$ таково, что

$$\Omega(a_i, K) \cap \Omega(a_j, K) = \emptyset \quad (i \neq j; i, j = 1, \dots, n).$$

Предположим, что функция ψ , заданная на множестве A_n , удовлетворяет неравенству

$$|\psi(a_i)| \leq \exp[-Kr_i^{(r_i)}] q_i(r_i > 1), \quad \psi(a_i) = 0 \quad (r_i \leq 1). \quad (25)$$

Тогда существует множество A'_n , являющееся K -сдвигом относительно множества A_n такое, что

$$L(a_i, A'_n, A_n) = \psi(a_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

В основе доказательства лежит следующее топологическое соображение [4, с. 14]:

если J — взаимнооднозначное и непрерывное отображение замкнутого круга \bar{K} в комплексную плоскость C и J — образ граничной окружности dK удален от начала координат не менее, чем на r ($r > 0$), и $0 \in J(\bar{K})$, то $J(\bar{K})$ содержит весь замкнутый круг $\bar{C}(0, r)$.

Доказательство леммы 4 использует индукцию по n . Обозначим через λ вектор, координатами которого являются точки множества A'_n : $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Кроме того, положим

$$L(z, \lambda, A_n) = L(z, A'_n, A_n).$$

Пусть сначала $n = 1$. Отображение

$$\lambda_1 \mapsto E_p(a_1, \lambda_1, a_1)$$

непрерывно и взаимнооднозначно в замкнутом круге $\Omega(a_1, K)$ (см. лемму 3). Его значение в точке a_1 равно нулю, а окружность $d\Omega(a_1, K)$ оно отображает в кривую, расстояние от которой до начала координат удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} d_1 = \inf_{\lambda_1 \in d\Omega_1} |L(a_1, \lambda_1, A_1)| &\geq \left| \frac{a_1 - \lambda_1}{a_1 - \bar{\lambda}_1} \right| \inf_{\lambda_1 \in d\Omega_1} |L_1(a_1, \lambda_1, A_1)| \geq \\ &\geq \exp[-Kr_1^{p(r_1)}] q_1(A_1, K). \end{aligned} \quad (26)$$

Значит, если $\psi(a_1)$ удовлетворяет неравенству (25), то в силу замечания, сделанного перед доказательством, найдется точка $\lambda_1 \in \Omega(a_1, K)$, удовлетворяющая условиям леммы.

Пусть теперь $n \geq 2$. Предположим, что утверждение доказано для всех множеств A_k , содержащих не более $n-1$ точек a_j ($j = 1, 2, \dots, k$). Вектор $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1})$ обозначим символом $\tilde{\lambda}$.

Система уравнений

$$L(a_k, \lambda, A_n) = \psi(a_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (27)$$

равносильна системе

$$\begin{aligned} L(a_k, \tilde{\lambda}, A_{n-1}) &= E_p^{-1}(a_k, \lambda_n, a_n) \psi(a_k) \quad (k = 1, \dots, n-1); \\ L(a_n, \lambda, A_n) &= \psi(a_n) \end{aligned} \quad (28)$$

(заметим, что $a_k \neq \lambda_n$, если $k = 1, 2, \dots, n-1$ и $\lambda_n \in \Omega(a_n, K)$).

Предположим, что заданная на множестве A_n функция ψ удовлетворяет условию (25). Из индукционного предположения следует тогда, что для любой точки $t, t \in \Omega(a_n, K)$ существует единственная точка $\tilde{\lambda}(t)$, обладающая такими свойствами:

$$\tilde{\lambda}(t) \in \Omega(a_1, K) \times \dots \times \Omega(a_{n-1}, K), \quad (29)$$

$$\begin{aligned} L(a_k, \tilde{\lambda}(t), A_{n-1}) &= E_p^{-1}(a_k, t, a_n) \psi(a_k) = \\ &= \tilde{\psi}(a_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned} \quad (30)$$

В самом деле из (25) вытекает, что

$$|\tilde{\psi}(a_k)| \leq \exp[-Kr_k^{p(r_k)}] q_k(A_{n-1}, K).$$

Единственность решения $\tilde{\lambda}(t)$ следует из леммы 3.

Поставим теперь в соответствие точке $t \in \Omega(a_n, K)$ число

$$h(t) = L(a_n, \lambda(t), A_n)$$

где $\lambda(t) = (\tilde{\lambda}_1(t), \dots, \tilde{\lambda}_{n-1}(t), t)$.

Если мы установим, что функция h непрерывна, то доказательство будет закончено. Ведь если t находится на границе круга $\Omega(a_n, K)$, то

$$|h(t)| \geq |E_n(a_n, t, a_n)| |L_n(a_n, \lambda(t), A_n)| \geq \\ \geq \exp[-Kr_n^{\rho(r_n)}] q_n(A_n, K)$$

(мы воспользовались условием (29) и определением числа q_n).

Взаимная однозначность функции h следует из леммы 3 и из равносильности систем (27) и (28). По замечанию сформулированному перед доказательством леммы

$$h(\Omega(a_n, K)) \supset C(0, \exp[-Kr_n^{\rho(r_n)}] q_n(A_n, K)).$$

Выбрав $t, t \in \Omega(a_n, K)$ так, чтобы $h(t) = \psi(a_n)$, а затем, решив систему (28), мы и найдем искомую точку λ , удовлетворяющую системе (27).

Проверим, что функция h непрерывна. Для этого убедимся в том, что всякая последовательность $(h(\eta_m))$, где $\eta_m \in \Omega_n$ при любом натуральном m и $\lim_{m \rightarrow \infty} \eta_m = \eta$, содержит подпоследовательность, сходящуюся к $h(\eta)$. Пусть $m(j)$ такая строго возрастающая последовательность номеров, что последовательность точек $\lambda(\eta_{m(j)})$ сходится в C^{n-1} к точке $v = (v_1, \dots, v_{n-1})$. Полагая в (30) $t = \eta_{m(j)}$ и переходя к пределу при $j \rightarrow \infty$, получаем

$$L(a_k, v, A_{n-1}) = E_p^{-1}(a_k, \eta, a_n) \psi(a_k) \quad (k = 1, \dots, n-1).$$

Поэтому

$$h(\eta) = L(a_n, (v_1, \dots, v_{n-1}, \eta), A_n) = \\ = \lim_{j \rightarrow \infty} L(a_n, (\tilde{\lambda}_1(\eta_{m(j)}), \dots, \tilde{\lambda}_{n-1}(\eta_{m(j)}), \eta_{m(j)}), A_n),$$

так как $L(a_n, \lambda, A_n)$ непрерывно зависит от λ в C^n .

Лемма доказана.

Следующая лемма — легкое следствие теоремы 4 и леммы 4.

Лемма 5. Пусть последовательность $A = \{a_n\}$, $A \subset C^+$, имеет конечную верхнюю плотность при порядке $\rho(r)$ и удовлетворяет условию (9), множества A_n определены выше, а функция ψ , заданная на множестве A , удовлетворяет неравенству

$$|\psi(a_n)| \leq \exp[-2Kr_n^{\rho(r_n)}] \quad (r_n > 1), \quad \psi(a_n) = 0 \quad (r_n \leq 1), \quad (31)$$

где число $K > 0$ удовлетворяет условиям теоремы 4.

Тогда существует последовательность отображений (ω_n) и отображение ω_∞ , обладающие следующими свойствами:

1) ω_n есть K -сдвиг при порядке $\rho(r)$ множества A_n ($n = 1, 2, \dots, \infty$, $A_\infty = A$);

2) все отображения ω_n ($n = 1, 2, \dots, \infty$) взаимнооднозначны;

3) последовательность функций $L(z, A'_n, A_n)/A'_n = \omega_n(A_n)/$ сходится равномерно на каждом компакте в верхней полуплоскости;

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n(a_k) = \omega_\infty(a_k)$ ($a_k \in A$);

5) $L(a_k, A'_n, A_n) = \varphi(a_k)$ ($a_k \in A_n$).

Докажем теперь теорему, которая является аналогом теоремы Эрла в классе $[\rho(r), \infty)^+$ [5].

Теорема 5. Предположим, что множество $A = \{a_n\}$, $A \subset C^+$, все предельные точки которого лежат на вещественной оси, имеет конечную верхнюю плотность при порядке $\rho(r)$ и удовлетворяет условию (9). Тогда существует такое число $K > 0$, что для любой функции ψ , заданной на множестве A и удовлетворяющей условиям:

$$|\psi(a_n)| \leq \exp[-Kr_n^{\rho(r_n)}], \quad (r_n > 1);$$

$$\psi(a_n) = 0, \quad (r_n \leq 1),$$

можно сопоставить множество A' , являющееся K -сдвигом при порядке $\rho(r)$ относительно множества A , таким образом, что

$$\psi(a_n) = L(a_n, A', A) \quad (a_n \in A).$$

Докажем теорему, используя обозначения предыдущей леммы. Положим $A' = \omega_\infty(A)$. Теорема будет доказана, если мы проверим, что из последовательности $L(z, A'_n, A_n)$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся равномерно на каждом компакте в полуплоскости C^+ к функции $L(z, A', A)$.

Итак, пусть $G = \{z: |z| \leq R, \operatorname{Im} z \geq \frac{1}{R}\}$.

Обозначим как и выше через (\tilde{A}'_n) последовательность подмножеств, исчерпывающих множество A' :

$$\tilde{A}'_n = \left\{ \lambda_j \in A' : r'_j \leq l_n, \operatorname{Im} \lambda_j \geq \frac{1}{l_n} \right\}.$$

Ясно, что по заданному $\varepsilon > 0$ можно так выбрать натуральное число $n(\varepsilon)$, что при всех $n > n(\varepsilon)$ и $z \in G$ будет выполняться неравенство

$$|L(z, \tilde{A}'_n, A_n) - L(z, A', A)| < \varepsilon. \quad (32)$$

Обозначим далее через A'_{nm} подмножество множества A'_m ($n < m$), имеющее столько же элементов сколько и множество \tilde{A}'_n . В силу поточечной сходимости последовательности сдвигов (ω_n) по заданному $\varepsilon > 0$ можно подобрать $m(n, \varepsilon)$, что при всех $m > m(n, \varepsilon)$ и $z \in G$

$$|L(z, \tilde{A}'_n, A_n) - L(z, A'_{nm}, A_n)| < \varepsilon. \quad (33)$$

Оценим далее отношение:

$$\begin{aligned} \frac{L(z, A'_m, A_m)}{L(z, A'_{n'm}, A_n)} &= \prod_{\mu_k \in M_m \setminus M_n} E_p(z, \mu_k, \mu_k) \prod_{a_k \in A_m \setminus A_n} E_p(z, \lambda_{km}, a_k) = \\ &= \prod_{a_k \in A_m \setminus A_n} E_p(z, a_k, a_k) \prod_{\mu_k \in M_m \setminus M_n} E_p(z, \mu_k, \mu_k) \times \\ &\times \prod_{a_k \in A_m \setminus A_n} \left(1 - \frac{z}{\lambda_{km}}\right) \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)^{-1} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) \left(1 - \frac{z}{\lambda_{km}}\right)^{-1}, \quad (34) \end{aligned}$$

где $A'_m = \omega_m(A_m) = \{\lambda_{km}\}$.

Последнее произведение в соотношении (34) стремится к единице, если только $n \rightarrow \infty$ и $z \in G$. Действительно, при достаточно больших n $|z - a_k| \geq \delta > 0$ ($a_k \in A_m \setminus A_n$, $m > n$), а значит,

$$\begin{aligned} \left| \ln \prod_{a_k \in A_m \setminus A_n} \left(1 - \frac{z}{\lambda_{km}}\right) \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)^{-1} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) \left(1 - \frac{z}{\lambda_{km}}\right)^{-1} \right| &\leq \\ &\leq \frac{4R}{\delta} \sum_{a_k \in A_m \setminus A_n} \sin \theta_k \exp[-Cr_k^{\rho(r_k)}] \quad (C > 0), \end{aligned}$$

так как

$$\left| \ln \frac{u}{v} \right| \leq \left| \ln \left| \frac{u}{v} \right| \right| + \left| \arg \frac{u}{v} \right|,$$

а

$$\begin{aligned} \left| \ln \left| \frac{1 - \frac{z}{\lambda_{km}}}{1 - \frac{z}{a_k}} \right| \right| &\leq \frac{R}{\delta} \frac{|a_k - \lambda_{km}|}{|\lambda_{km}| |a_k - z|} \leq \frac{R \sin \theta_k}{\delta} \exp[-Cr_k^{\rho(r_k)}]; \\ \left| \arg \frac{1 - \frac{z}{\lambda_{km}}}{1 - \frac{z}{a_k}} \right| &\leq \frac{R}{\delta} \sin \theta_k \exp[-Cr_k^{\rho(r_k)}]. \end{aligned}$$

Величина

$$\prod_{a_k \in A_m \setminus A_n} E_p(z, a_k, a_k) \prod_{\mu_k \in M_m \setminus M_n} E_p(z, \mu_k, \mu_k)$$

также стремится к 1, если $n \rightarrow \infty$ и $z \in G$, так как бесконечное произведение (8) сходится равномерно на каждом компакте в C^+ .

Выше для выделения однозначной ветви функции $\ln u$ мы определяем ее в плоскости u , разрезанной вдоль положительного луча, положив на верхнем борту разреза $\arg u = 0$.

Далее из неравенств (32), (33) и последних рассуждений следует, что по заданному $\varepsilon_1 > 0$ можно так подобрать натуральное число m , что

$$|L(z, A', A) - L(z, A'_m, A_m)| \leq \varepsilon_1 (z \in G).$$

Тем самым теорема доказана.

Используя теорему 5, нетрудно доказать достаточность условий основной теоремы 3. Для этого обозначим прежде всего через \tilde{A} , $\tilde{A} \subset A$, множество точек таких, что $|a_k| \leq 1$. Из (9) следует, что множество \tilde{A} удовлетворяет условию Ньюмена—Карлесона [3]. А так как подпоследовательность точек b_k , соответствующая множеству \tilde{A} , ограничена, то существует функция $f(z)$ ограниченная и аналитическая в полуплоскости C^+ такая, что $f(a_k) = b_k$ для всех $a_k \in \tilde{A}$.

Из (1) следует далее, что существует число $K_1 > 0$, при котором

$$|b_n - f(a_n)| \leq \exp [K_1 r_n^{\rho(r_n)}]. \quad (35)$$

При фиксированном сколько угодно малом $\delta > 0$ выделим подмножество A_δ из последовательности A так, что

$$A_\delta = \{a_k = r_k e^{i\theta_k} : \theta_k \in [\delta, \pi - \delta]\}.$$

Тогда из (4) следует, что

$$n(r, A_\delta) = O(r^{\rho(r)}), \quad (36)$$

где $n(r, A_\delta)$ — число точек множества A_δ в круге $C(0, r)$. Ниже приведена лемма, которая является следствием из теоремы 5 [1, с. 126] и теоремы 1.3.2 [6, с. 79].

Лемма 6. Пусть последовательность $\{\beta_n\}$ имеет единственную точку сгущения бесконечность и удовлетворяет условию (36). Тогда можно построить целую функцию в. р. р. $\varphi(z)$ порядка $\rho(r)$ и нормального типа с таким индикатором $h_\varphi(\theta)$, что $h_\varphi \geq C$, где C — любое положительное заданное число, причем корни этой функции лежат на конечном числе лучей и исключительные кружки, заключающие ее корни, не перекрывают точек $\{\beta_n\}$. Для этой функции $\varphi(z)$ имеет место следующая оценка вне исключительных кружков:

$$\ln |\varphi(re^{i\theta})| \geq \frac{C}{2} r^{\rho(r)}.$$

Применяя лемму 6, построим целую функцию $\varphi(z)$ таким образом, чтобы вне исключительных кружков

$$\ln |\varphi(re^{i\theta})| \geq \frac{K_1 + K}{2} r^{\rho(r)},$$

где K удовлетворяет условиям теоремы 5, а K_1 — из соотношения (35). Кроме того, исключительные кружки, содержащие корни этой функции, не перекрывают точек множества A_δ и ее корни лежат вне углов $[0, \delta]$ и $[\pi - \delta, \pi]$.

Положим далее

$$\psi(a_n) = \frac{b_n - f(a_n)}{\varphi(a_n)} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

По теореме 5 существует такое множество A' K -сдвинутое при порядке $\rho(r)$ относительно множества A , что

$$L(a_n, A', A) = \psi(a_n), \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Нетрудно видеть, что функция

$$F(z) = L(z, A', A)\psi(z) + f(z)$$

принадлежит классу $\{\rho(r), \infty\}^+$ и решает интерполяционную задачу (2).

Список литературы

1. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций.— М.: Гостехтеориздат, 1956.— 632 с.
2. Пецен Тхьонг Вен. Интерполяционная задача в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1975, вып. 24, с. 106—127.
3. Виноградов С. А., Хавин В. П. Свободная интерполяция в H^∞ и некоторых других классах функций.— Зап. науч. семинаров Ленингр. отд-ния мат. ин-та, 1974, 47, с. 15—54.
4. Виноградов С. А., Хавин В. П. Свободная интерполяция в H^∞ и некоторых других классах функций.— Зап. науч. семинаров Ленингр. отд-ния мат. ин-та, 1976, 56, с. 12—58.
5. Earl J. P. On the interpolation of bounded sequences by bounded analytic functions.— J. Lond. Math. Soc., 1970, 2, № 2, s. 544—548.
6. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент.— М.: Наука, 1976.— 536 с.

Поступила в редколлегию 15.06.84.