УДК 517.432

С. А. КУЖЕЛЬ

J-НЕРАСТЯГИВАЮЩИЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть H-гильбертово пространство, $(\bullet, \bullet)$ — скалярное произведение в H и J-самосопряженный и унитарный оператор, действующий в H. С помощью оператора J зададим в H новое скалярное произведение:

$$[x, y] = (Jx, y)$$

и будем в обычном смысле говорить о J-метрике, J-самосопряженности и т. п. (см., например, [1]). В частности, J-сопряженный оператор A^+ связан с сопряженным оператором A^* равенством: $A^+ = JA^*J$.

Ограниченный оператор A будем называть *J-нерастягивающим на подпространстве* H_1 пространства H, если

$$[Ax, Ax] \leqslant [x, x] \quad (\forall x \in H_1). \tag{1}$$

Если при этом $H_1 = H$, то оператор A называют J-нерастягивающим ($J - H$).

Оператор A называется *двусторонне* (или *двояко*) *J-нерастягивающим на подпространстве* H_1, если на этом подпространстве J-нерастягивающим является как оператор A, так и оператор A^*. В частности, при $H_1 = H$ оператор A называют *двусторонне J-нерастягивающим* (д. J-н.).

Как следует из результатов В. П. Потапова [2, 3], произвольный J-н. оператор, действующий в конечномерном пространстве, является д. J-н. Однако простой пример оператора сдвига в пространстве l_2 показывает, что не всякий J-н. оператор, действующий в бесконечномерном пространстве, является д. J-н.

Впервые необходимое и достаточное условие двусторонней J-нерастягиваемости J-н. оператора A получил Ю. П. Гинзбург [4, 5]. Позже был получен ряд других эквивалентных условий д. J-н. (см. [1, гл. II, § 1, п. 8]). В одной из последних работ в этом направлении [6] выясняются условия д. J-н. для случая, когда рассматриваемый J-н. оператор является расширением некоторого J-изометрического оператора с конечными и равными дефектными числами.

В настоящей работе рассматривается произвольный J-н. оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H, и решается задача нахождения подпространства H_0 пространства H, на котором оператор A^* является J-н. Оказывается, что таким является подпространство $H_0 = \operatorname{Ker} \bar{P}(I + AA^*)$, где $\bar{P}$ — некоторый ортопроектор в H (теоремы 3, 4). В частности, при $H_0 = H$ оператор A является д. J-н. Это дает возможность получить как некоторые из известных условий д. J-н., так и условия нового типа (например, в виде равенства $\bar{P}(I + AA^*) = 0$).

1. Вспомогательные предложения. В дальнейшем P и Q — следующие ортопроекторы:

$$P = \frac{1}{2}(I + J), \quad Q = \frac{1}{2}(I - J). \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть A — ограниченный J-н. оператор, действующий в H. Тогда при любом $\lambda \neq 0$ операторы $QA + \lambda P$ и $AQ + \lambda P$ непрерывно обратимы.*

Доказательство. Предположим, что $(QA + \lambda P)x = 0$. Так как $PQ = 0$, то $Px = 0$ и $QAx = 0$. Но тогда $Jx = -x$, $JAx = Ax$, после чего неравенство (1) перепишется так: $(Ax, Ax) \leqslant -(x, x)$, что возможно лишь при $x = 0$. Следовательно, оператор $QA + \lambda P$ обратим. Для доказательства непрерывной обратимости этого оператора достаточно, с учетом теоремы Банаха, показать, что линеал $L = (QA + \lambda P) H$ замкнут в H.

Пусть $\{y_n\}$ — фундаментальная последовательность элементов в L. Так как $y_n = (QA + \lambda P)x_n$, то

$$\| y_n - y_m \|^2 = \| QA(x_n - x_m) \|^2 + |\lambda|^2 \| P(x_n - x_m) \|^2$$

и, следовательно, если

$$\min\{n, m\} \to \infty, \tag{3}$$

то

$$\| QA(x_n - x_m) \|^2 \to 0, \quad \| P(x_n - x^m) \|^2 \to 0. \tag{4}$$

А так как $P = \frac{1}{2}(I + J)$, то

$$2 \| P(x_n - x_m) \|^2 = \| x_n - x_m \|^2 + [x_n - x_m, x_n - x_m]. \tag{5}$$

Аналогично, учитывая выражение для Q

$$2 \| QA(x_n - x_m) \|^2 = \| A(x_n - x_m) \|^2 - [A(x_n - x_m), A(x_n - x_m)]. \tag{6}$$

Но тогда на основании (4)—(6) при условии (3)

$$\| x_n - x_m \|^2 + \| A(x_n - x_m) \|^2 + ([x_n - x_m, x_n - x_m] - - [A(x_n - x_m), A(x_n - x_m)]) \to 0. \tag{7}$$

Каждое из трех слагаемых в (7) неотрицательное (последнее — в силу того, что оператор A J-н.). Следовательно, каждое из них стремится к нулю при условии (3). Это, в частности, означает, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная. Пусть x — предел этой последовательности. Тогда Ax есть предел последовательности $\{Ax_n\}$ и, следовательно, последовательность $\{y_n\}$ сильно сходится к элементу $y = QAx + \lambda Px$, т. е. к элементу из L, что и завершает доказательство непрерывной обратимости оператора $QA + \lambda P$.

Пусть
$$R = (QA + \lambda P)^{-1}; \tag{8}$$
$$u = (AQ + \lambda P)\, v. \tag{9}$$

Тогда $Qu = (QA + \lambda P)\, Qv$ и, следовательно,
$$Qv = RQu. \tag{10}$$

Кроме того, на основании (9), (10)
$$Pv = \frac{1}{\lambda}\, u - \frac{1}{\lambda}\, ARQu. \tag{11}$$

Но тогда в силу (10), (11)
$$v = Pv + Qv = \frac{1}{\lambda}\, u + \left(I - \frac{1}{\lambda}\, A\right) RQu. \tag{12}$$

На основании последнего равенства заключаем, что $v = 0$, если $u = 0$. Следовательно, оператор $AQ + \lambda P$ обратим, причем с учетом равенств (9), (12)
$$(AQ + \lambda P)^{-1} = \left[\frac{1}{\lambda}\, I + \left(I - \frac{1}{\lambda}\, A\right) RQ\right]_M, \tag{13}$$

где $M = (AQ + \lambda P)\, H$. На основании (13) заключаем, что оператор
$$S = (AQ + \lambda P)^{-1},\ (S : M \to H) \tag{14}$$

ограничен (так как в правой части равенства (13) — ограниченный оператор).

Теорема 2. *Подпространство $M = (AQ + \lambda P)\, H$ не зависит от λ $(\lambda \neq 0)$.*

Доказательство. Так как $M = H \ominus \operatorname{Ker}(QA^* + \bar{\lambda} P)$, то для доказательства теоремы достаточно показать, что подпространство $\operatorname{Ker}(QA^* + \bar{\lambda} P)$ не зависит от λ. А это следует из того, что $x \in \operatorname{Ker}(QA^* + \bar{\lambda} P)$ тогда и только тогда, когда $Px = 0$ и $QA^*x = 0$.

Заметим однако, что подпространство $L = (QA + \lambda P)\, H$ уже зависит от λ.

Лемма. *Вектор $y \in \operatorname{Ker}(A^*Q + \lambda P)$ тогда и только тогда, когда*
$$y = v - \frac{1}{\lambda}\, A^*v, \tag{15}$$
где
$$v \in \operatorname{Ker}(QA^* + \lambda P). \tag{16}$$
При этом $PA^*v = A^*v$, $Qv = v$.

Доказательство. Пусть

$$(A^*Q+\lambda P)y=0. \tag{17}$$

Тогда $\lambda y=\lambda Py+\lambda Qy=\lambda Qy-A^*Qy$, т. е. вектор y представим в виде (15), где $v=Qy$. Но тогда $Qv=v$ и

$$(QA^*+\lambda P)v=Q(A^*Q+\lambda P)y=0,$$

т. е. имеет место (16). Кроме того, на основании (17) $PA^*v=A^*v$.

Пусть теперь наоборот: известно, что вектор y представим в виде (15), где v удовлетворяет условию (16). Тогда из равенства $(QA^*+\lambda P)v=0$ следует, что $Pv=0$ и $QA^*v=0$. Используя эти равенства, а также равенства $Qv=v$ и $PA^*v=A^*v$, получим, что $(A^*Q+\lambda P)y=0$, т. е. $y\in\operatorname{Ker}(A^*Q+\lambda P)$.

2. **Двусторонняя J-нерастягиваемость.** Пусть A — J-н. оператор, действующий в H, а операторы P и Q определяются равенствами (1). Тогда, как легко проверить,

$$(AQ-\lambda P)(PA+\lambda Q)=\lambda AQ-\lambda PA;$$
$$(AP-\lambda Q)(QA+\lambda P)=\lambda AP-\lambda QA.$$

Складывая эти равенства, получим, что

$$(AQ-\lambda P)(PA+\lambda Q)+(AP-\lambda Q)(QA+\lambda P)=0. \tag{18}$$

Обозначим через P_1 оператор проектирования в H на подпространство $L=D_R$, где $R=(QA+\lambda P)^{-1}$. Тогда

$$R(QA+\lambda P)=I;\quad (QA+\lambda P)RP_1=P_1. \tag{19}$$

А так как $R:L\to H$ и $R^*:H\to L$, то с учетом (19)

$$(A^*Q+\bar\lambda P)R^*=I;\quad R^*(A^*Q+\bar\lambda P)P_1=P_1. \tag{20}$$

Рассмотрим оператор

$$T=(A^*Q+\bar\lambda P)(QA+\lambda P)-(A^*P+\bar\lambda Q)(PA+\lambda Q). \tag{21}$$

При $|\lambda|=1$ получим, что

$$T=A^*QA+P-A^*PA-Q=J-A^*JA\geqslant 0 \tag{22}$$

(последнее на основании того, что оператор A J-н.).

Рассмотрим, кроме того, оператор

$$K=(PA+\lambda Q)RP_1. \tag{23}$$

С учетом равенств (19)—(21)

$$R^*TRP_1=P_1-K^*K. \tag{24}$$

Пусть $x=x_1+x_2$, где $x_1\in L$, $x_2\in L^\perp$. Воспользовавшись равенствами $Kx_2=0$ и (24), получим

$$\|x\|^2-\|Kx\|^2=\|x_2\|^2+((P_1-K^*K)x_1,\ x_1)=$$
$$=\|x_2\|^2+(TRx_1,\ Rx_1)\geqslant 0$$

и, таким образом, оператор K есть сжатие. Но тогда оператор K^* также сжатие, т. е. $KK^* \leqslant I$.

Умножая справа равенство (18) на RP_1 и учитывая равенства (19) и (23), получим

$$(AQ - \lambda P) K = -(AP - \lambda Q) P_1, \tag{25}$$

откуда

$$K^* (QA^* - \bar{\lambda} P) = -P_1 (PA^* - \lambda Q). \tag{26}$$

Следовательно, с учетом равенств (25), (26) имеем

$$B := (AQ - \lambda P)(I - KK^*)(QA^* - \bar{\lambda} P) = (AQ - \lambda P)(QA^* - \lambda P) - \\ - (AQ - \lambda P) KK^* (QA^* - \bar{\lambda} P) = AQA^* + P - \\ - (AP - \lambda Q) P_1 (PA^* - \lambda Q) \geqslant 0, \tag{27}$$

где последнее неравенство получено на основании того, что $I - KK^* \geqslant 0$.

Рассмотрим линеал (при $|\lambda| = 1$):

$$H_0 = \{x \in H / (PA^* - \bar{\lambda} Q) x \in L\}. \tag{28}$$

Так как P_1 есть оператор ортогонального проектирования на подпространство L, то при $\forall x \in H_0$

$$Bx = AQA^* x + Px - (AP - \lambda Q)(PA^* - \bar{\lambda} Q) x = \\ = AQA^* x + Px - APA^* x - Qx = (J - AJA^*) x$$

и, следовательно, при $x \in H_0$

$$[x, x] - [A^* x, A^* x] = ((J - AJA^*) x, x) = (Bx, x) \geqslant 0.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 3. *Если A — J-н. оператор, действующий в H, то оператор A^* является J-н. на линеале H_0, который определяется равенством (28).*

Непосредственно из предыдущего получаем

Следствие 1. *Если при некотором $\lambda (|\lambda| = 1)$*

$$\Delta_{PA^* - \bar{\lambda} Q} \subset L,$$

то J-н. оператор A является д. J-н.

Следствие 2. *Если при некотором λ $(|\lambda| = 1)$ $0 \in \rho (QA + + \lambda P)$, то J-н. оператор A является д. J-н.*

3. Подпространство H_0. Справедлива следующая

Теорема 4. *Линеал H_0, определяемый равенством (28), есть подпространство, причем*

$$H_0 = \mathrm{Ker}\, \tilde{P} (I + AA^*), \tag{29}$$

где $\tilde{P}$ — оператор ортогонального проектирования в H на подпространство $\tilde{H} = \mathrm{Ker}\, (QA^* + \bar{\lambda} P)$ $(|\lambda| = 1)$.

Доказательство. На основании (28) $x \in H_0$ тогда и только тогда, когда $P_2(PA^* - \bar{\lambda}Q)x = 0$, где P — оператор проектирования в H на подпространство $L^{\perp}$. Таким образом,

$$H_0 = \operatorname{Ker} P_2(PA^* - \bar{\lambda}Q), \tag{30}$$

откуда, в частности, следует, что H_0-подпространство в $\bar{H}$.

Пусть $x \in H$ и $y = P_2x$. Так как $L^{\perp} = \operatorname{Ker}(A^*Q + \bar{\lambda}P)$, то на основании леммы (п. 1), $y = v - \frac{1}{\bar{\lambda}}A^*v$, где $v \in \bar{H}$, причем $PA^*v = A^*v$ и $Qv = v$. Но тогда (с учетом равенства $|\lambda| = 1$)

$$\begin{aligned}(AP - \lambda Q)P_2x &= (AP - \lambda Q)v - \lambda(AP - \lambda Q)A^*v = \\ &= -\lambda v - \lambda AA^*v.\end{aligned} \tag{31}$$

Таким образом, окончательно

$$(AP - \lambda Q)P_2x = (I + AA^*)u, \tag{32}$$

где $u = -\lambda v \in \bar{H}$. Другими словами,

$$(AP - \lambda Q)P_2H \subset (I + AA^*)\bar{H}. \tag{33}$$

Покажем, что имеет место и обратное включение. Действительно, пусть $u \in \bar{H}$ и $v = -\bar{\lambda}u$. Тогда $PA^*v = A^*v$, $Pv = 0$, и, следовательно, на основании леммы из п. 1 вектор $y = v - \frac{1}{\bar{\lambda}}A^*v$ принадлежит подпространству $L^{\perp}$. Если при этом $x = x_1 + y$, где $x_1 \in L$, то, очевидно, справедливо равенство (31), а значит, и равенство (32). Это доказывает включение, обратное включению (33).

Итак, при $|\lambda| = 1$ справедливо равенство

$$(AP - \lambda Q)P_2H = (I + AA^*)\bar{H}. \tag{34}$$

Но тогда на основании (30), (34) и с учетом равенства $\bar{H} = PH$ мы и получаем равенство (29).

Список литературы

1. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Линейные операторы в пространствах с индефинитной метрикой и их приложения.— Мат. анализ. Итоги науки и техники, 1979, 17, с. 113—205.
2. *Потапов В. П.* Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1955, 4, с. 125—236.
3. *Потапов В. П.* Теорема о модуле. I.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1982, вып. 38, с. 91—101.
4. *Гинзбург Ю. П.* О J-нерастягивающих оператор-функциях.— Докл. АН СССР, 1957, 117, № 2, с. 171—173.
5. *Гинзбург Ю. П.* О J-нерастягивающих операторах в гильбертовых пространствах.— Науч. зап. Одесск. пед. ин-та, 1958, 22. вып. 1, с. 13—19.
6. *Иохвидов Е. И.* Об одном классе J-нерастягивающих операторов.— Успехи мат. наук, 1982, 37, вып. 1 (223), с. 127—128.

Поступила в редколлегию 03.08.84.