УДК 517.948

В. А. ЗОЛОТАРЕВ

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЗАДАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА РОСТ РЕЗОЛЬВЕНТЫ

В данной статье методами теории полугрупп построены универсальные модельные представления диссипативных операторов со спектром в нуле и заданными ограничениями на рост резольвенты.

1. Рассмотрим диссипативный локальный узел [1, 2]

$$\Delta = (A,\ H,\ \varphi,\ E,\ I_E), \tag{1}$$

узловое соотношение которого имеет вид

$$\frac{1}{i}(A - A^*) = (2A_I) = \varphi^*\varphi \geqslant 0. \tag{2}$$

Для вполне несамосопряженности [1, 2] диссипативного оператора A необходимо и достаточно, чтобы не существовало инвариантного относительно A подпространства, на котором индуцировался бы самосопряженный оператор. Пусть $\operatorname{Ker}^* A = 0$ (что и будет предполагаться в дальнейшем), тогда существует в широком смысле, т. е. вообще говоря, неограниченный оператор A^{-1} с плотной в H областью определения $D(A^{-1}) = AH$. Резольвентой Фредгольма [3] оператора A называется функция

$$A(\lambda) = A(I - \lambda A)^{-1} = (A^{-1} - \lambda I)^{-1} = R_\lambda(A^{-1}).$$

Рассмотрим полугруппу T_t, порождаемую задачей Коши:

$$T_t f = f(t):\ \begin{cases} iA\dfrac{d}{dt}f(t) = f(t); \\ f(0) = f. \end{cases} \tag{3}$$

Из (3) следует, что для $f \in D(A^{-1})$ имеет место

$$\frac{d}{dt}\|f(t)\|^2 = -2\langle A_I f'(t),\ f'(t)\rangle \leqslant 0, \tag{4}$$

т. е. полугруппа T_t является сжимающей $\|T_t\| \leqslant 1$ и

$$\langle (I - T_t^* T_t) f,\ f\rangle = 2\int_0^t \langle A_I f'(s),\ f'(s)\rangle\, ds. \tag{5}$$

Положительность ограниченной невозрастающей функции $\| f(t) \|^2$ означает, что существует предел

$$\lim_{t\to\infty} \| f(t) \|^2 = \langle Kf,\ f\rangle,$$

где оператор K является сильным пределом неотрицательных оператор-функций

$$K = s - \lim_{t\to\infty} T_t^* T_t,\ (0 \leqslant K \leqslant I). \tag{6}$$

Поэтому

$$\int_0^\infty \langle A_I T_t' f,\ T_t' f\rangle\, dt = \frac{1}{2} \langle (I - K) f,\ f\rangle,$$

и значит

$$\lim_{t\to\infty} \| A_I^{1/2} T_t' f \|^2 = \lim_{t\to\infty} \langle A_I T_t' f,\ T_t' f\rangle = 0 \tag{7}$$

$f \in D(A^{-1})$. Используя узловое соотношение (2), получим, что

$$\int_0^\infty \| \varphi T_t' f \|^2 dt = \| Bf \|^2, \tag{8}$$

где $B^2 = I - K$, $0 \leqslant B \leqslant I$, $f \in D(A^{-1})$. Из определения оператора K (6) заключаем, что полугруппа T_t является изометрической в метрике $\langle Kf,\ g\rangle$, так как $T_t^* K T_t = K$, и значит $A^* K = KA$.

Теорема 1. *Предположим, что в гильбертовом пространстве H задана сжимающая полугруппа T_t (3), инфинетизимальным оператором которой является $(iA)^{-1}$, причем A — ограниченный диссипативный оператор такой, что* $\operatorname{Ker} A^* = 0$. *Пусть для каждого $f \in H$ вектор-функция $f(t) = T_t f$ имеет предел*

$$s - \lim_{t\to\infty} f(t) = f_\infty \tag{9}$$

тогда

$$s - \lim_{t\to\infty} T_t = 0. \tag{10}$$

Теорема 2. *Предположим, что вполне несамосопряженный ограниченный диссипативный оператор A такой, что $(iA)^{-1}$, является инфинитезимальным оператором полугруппы T_t* (3). *Тогда*

$$\int_0^\infty | F_t(f,\ g) |^2 dt < \infty, \tag{11}$$

где функция $F_t(f,\ g)$ имеет вид $F_t(f,\ g) = \langle T_t f,\ g\rangle$, либо $F_t(f,\ g) = \langle T_t' f,\ g\rangle$, причем $f \in D(A^{-1})$,

а
$$g = \sum_{0 < s < n} (A^*)^s A_I h_s\ (\forall\, h_s \in H,\ \forall\, n \in \boldsymbol{Z}_+).$$

II. Ограниченный линейный оператор A в H будем относить к классу $\Lambda^{\exp}$ [2], если:

1) A — диссипативен, $A_I \geqslant 0$;

2) резольвента Фредгольма $A(\lambda) = A(I - \lambda A)^{-1}$ является целой функцией экспоненциального типа*.

Рассмотрим следующий важный пример операторов класса. Пусть

$$L_r^2(0,\ l) = \left\{ f(x) = (f^1(x), \ \dots,\ f^r(x));\ \int_0^l \langle f(x),\ f(x)\rangle\, dx < \infty \right\} \quad (12)$$

$(0 < l < \infty,\ r < \infty)$. Введем в $L_r^2(0,\ l)$ диссипативный оператор

$$(A_l f)(x) = \left(i \int_x^l f^1(t)\, dt, \ \dots,\ i\int_x^l f^r(t)\, dt \right). \qquad (13)$$

Включим A_l (13) в диссипативный локальный узел (I):

$$\Delta_l = (A_l,\ L_r^2(0,\ l),\ \varphi_l,\ l_r^2,\ I_{l_r^2}). \qquad (14)$$

Нетрудно показать, что резольвента Фредгольма $A_l(\lambda)$ является целой функцией экспоненциального типа, т. е. $A_l \in \Lambda^{\exp}$. Полугруппа T_t (3), инфинитезимальным оператором которой является оператор $(iA_l)^{-1}$, имеет вид

$$(\tilde{T}_t f)(x) = \chi_{[0,l]}(x) f(x + t), \qquad (15)$$

где $\chi_{[0,l]}(x)$ — характеристическая функция множества $[0,\ l]$.

III. Учитывая сжимаемость полугруппы T_t (3), легко установить, что

$$iA(\lambda) = \int_0^\infty e^{i\lambda t} T_t dt,\ (\operatorname{Im}\lambda > 0). \qquad (16)$$

Используя теорему 2, получим

$$i\langle A(\lambda) f,\ g\rangle = \int_0^\infty e^{i\lambda t} \langle T_t f,\ g\rangle\, dt,\ (\operatorname{Im}\lambda > 0), \qquad (17)$$

где f и g принадлежат соответствующим плотным множествам в H. Из теоремы 2 следует $\langle T_t f,\ g\rangle \in L^2$, что позволяет в силу теоремы Планшереля утверждать, что $\langle A(x) f,\ g\rangle \in L^2(-\infty,\ \infty)$, $(x \in R)$. Поэтому из теоремы Винера — Пели заключаем, что $\langle T_t f,\ g\rangle = 0$ при $t > l$, начиная с некоторого l, $(0 < l < \infty)$. Следовательно, билинейный аналог формулы (8) имеет вид

$$\int_0^l \langle \varphi T_t' f,\ \varphi T_t' g\rangle\, dt = \langle f,\ g\rangle. \qquad (18)$$

---

* Оператор-функция $A(\lambda)$ называется функцией экспоненциального типа, если $\| A(\lambda) \| < A \exp a |\lambda|$, $(A,\ a \in R)$.

Используя разложение $\varphi T_t' f$ по стандартному ортонормированному базису в $E = l_r^2$ и учитывая теорему 2, приходим к следующему утверждению, которое было методами характеристических функций получено Л. Исаевым [2, 4].

Теорема 3. *Простой диссипативный локальный узел* $\Delta(1)$ (где $E = l_r^2$), *основной оператор которого принадлежит* $\Lambda^{\exp}$, *унитарно-эквивалентен сужению узла* Δ_l (14) *на одно из инвариантных относительно оператора* A_l *подпространств, причем* l *совпадает с типом резольвенты Фредгольма* $A(\lambda)$.

IV. Предположим, что оператор-функция $A(\lambda)$ не является целой функцией экспоненциального типа. Обозначим через Δ_∞ локальный узел, который совпадает с узлом Δ_l (14), когда $l = \infty$. При этом оператор $A_\infty = A_l|_{l=\infty}$ неограничен в $L_r^2(0, \infty)$, область определения его

$$D(A_\infty) = \{f \in L_r^2(0, \infty);\ A_\infty f \in L_r^2(0, \infty)\}$$

плотна $L_r^2(0, \infty)$. С помощью аналогичных рассуждений приходим к следующему утверждению.

Теорема 4. *Предположим, что основной оператор* A *простого диссипативного узла* $\Delta(1)(E = l_r^2)$ *таков, что* $\operatorname{Ker} A^* = \{0\}$, *а сжимающая полугруппа* T_t (3) *обладает тем свойством, что для каждого* $f \in H$ *вектор-функция* $f(t) = T_t f$ *имеет предельные значения* f_∞ (9)*. Тогда узел* Δ *унитарно-эквивалентен сужению узла* Δ_∞ *на одно из инвариантных подпространств относительно оператора* A_∞, *на котором* A_∞ *индуцирует ограниченный оператор.*

V. Используя известную формулу

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{i\lambda t} t^{\alpha-1} dt = (-i\lambda)^\alpha, (\operatorname{Im}\lambda > 0,\ \alpha > 0),$$

можно определить степени A^α, $(0 < \alpha < 1)$ диссипативного оператора A

$$A^\alpha = \frac{e^{-\frac{i\pi\alpha}{2}}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty T_t t^{\alpha-1} dt,\ (0 < \alpha < 1), \tag{19}$$

где T_t — полугруппа (3). Без труда устанавливается сильная сходимость интеграла (19). Легко видеть, что для A^α имеет место:

а) $A^{\alpha+\beta} = A^\alpha \cdot A^\beta$, $(0 < \alpha + \beta < 1)$; б) $s - \lim\limits_{\alpha \downarrow 0} A^\alpha = I$; в) $s - \lim\limits_{\alpha \uparrow 1} A^\alpha = A$.

Из (19) следует, что

$$\arg\langle A^\alpha h,\ h\rangle \in (0,\ \pi\alpha), \tag{20}$$

кроме того, используя формулу (16), легко установить, что

$$A^{\alpha}=e^{\frac{\pi i(\alpha+1)}{2}}\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^{\infty}y^{-\alpha}A(I-iyA)^{-1}dy,\ (0<\alpha<1).$$

Нетрудно видеть, что для оператора A_l будем иметь

$$(A_l^{\alpha}f)(x)=\frac{e^{\pi i\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_x^l(f^1(y),\ \ldots,\ f^r(y))(y-x)^{\alpha-1}dy, \qquad (21)$$

где $f(x)\in L_r^2(0,\ l)$. Из (20) следует, что при $\alpha>1$ операторы A_l^{α} — не диссипативны. Отметим, что мнимая компонента $(A_l^{\alpha})_I$ оператора A_l^{α} (21), $(0<\alpha<1)$ «невырождена» и $(A_l^{\alpha})_I L_r^2(0,\ l)=$ $=L_r^2(0,\ l)$. Элементарные вычисления показывают, что резольвента Фредгольма оператора A_l^{α} (21) имеет вид

$$A_l^{\alpha}(\lambda)f=e^{\frac{\pi i\alpha}{2}}\int_x^l f(t)\,E_{1/\alpha}\left((t-x)^{\alpha}\lambda e^{\frac{\pi i\alpha}{2}},\ \frac{1}{\alpha}\right)(t-x)^{\alpha-1}dt, \qquad (22)$$

где

$$E_{\rho}(z,\ \mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma\left(\mu+\frac{k}{\rho}\right)}$$

— целая функция типа Миттаг-Леффлера [5] конечного порядка ρ. Из (22) следует, что порядок роста резольвенты Фредгольма $A_l^{\alpha}(\lambda)$ равен $\rho=1/\alpha$, а тип, отвечающий порядку ρ, равен $\tau=l$ Воспользуемся следующим аналогом теоремы Винера-Пели.

Теорема 5 [5]. *Класс целых функций $f(z)$ порядка $\rho>1$ и типа $\leqslant\sigma$, удовлетворяющих условию*

$$\int_0^{\infty}|f(te^{-i\theta})|^2\,t^{\omega}dt<\infty;\ \left(\frac{\pi}{2}\,\alpha\leqslant|\theta|\leqslant\pi\right),$$

$(-1<\omega<1)$, *совпадает с классом функций, имеющих представление*

$$f(z)=\int_0^{\tau}E_{\rho}(zx^{\alpha},\ \mu)\,\varphi(x)\,x^{\mu-1}dx,$$

где $\varphi(x) \in L^2(0, \sigma)$, $2\mu\rho = 1 + \rho + \omega$. *Функция* $\varphi(x)$ *единственным образом определяется формулой*

$$\frac{\alpha i}{2\pi}\left\{e^{-\frac{i\pi\mu}{2}}\int_0^\infty f\left(e^{-\frac{\pi i\alpha}{2}}t^\alpha\right)e^{itx}t^{\mu-1}\,dt + \right.$$

$$\left. + e^{\frac{i\pi\mu}{2}}\int_0^\infty f\left(e^{\frac{i\pi\alpha}{2}}t^\alpha\right)e^{-itx}t^{\mu-1}\,dt\right\} = \begin{cases}\varphi(x), & x \in (0, l);\\ 0, & x \notin (0, l).\end{cases}$$

Теорема 6. *Предположим, что для линейного вполне несамосопряженного ограниченного оператора, действующего в гильбертовом пространстве* H, *имеют место:*

1) $\arg\langle Af, f\rangle \in (0, \pi\alpha)$, $(0 < \alpha < 1)$;

2) *резольвента Фредгольма* $A(\lambda)$ *имеет порядок роста* $\rho = \frac{1}{\alpha}$ *и тип* $\tau = l$.

Тогда существует инвариантное относительно оператора подпространство в $L^2_r(0, l)$, *на котором* A_l^α (21) *индуцирует оператор, унитарно эквивалентный* A.

Список литературы

1. *Лившиц М. С., Янцевич А. А.* Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. — Х.: Изд-во Харьк. ун-та, 1971. — 160 с.
2. *Бродский М. С.* Треугольные и жордановы представления линейных операторов. — М.: Наука, 1969. — 287 с.
3. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. — М.: Наука, 1967. — 507 с.
4. *Исаев Л. Е.* К теории характеристических функций операторных узлов. — Укр. мат. журн., 1968, 20, № 2, с. 253 — 257.
5. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. — М.: Наука, 1966. — 627 с.

Поступила в редколлегию 02.07.84.