УДК 517.54

В. К. ДУБОВОЙ

ИНДЕФИНИТНАЯ МЕТРИКА В ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ПРОБЛЕМЕ ШУРА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. V*

§ 11. Факторизация радиусов предельного круга Вейля

Докажем факторизацию радиусов $\rho_{d,\infty}(\zeta, \theta)$ и $\rho_{d,\infty}(\zeta, \theta)$. Основной результат сформулирован в теореме 11.1.

Начнем с изучения структуры $\rho_{d,n}^{-1}(\zeta, \theta)$. Согласно выражению (6.2) (см. II часть)

$$\rho_{d,n}^{-1}(\zeta) = |\zeta|^{2n+2} I_q + (1 - |\zeta|^2)\Lambda_{q,n}(\zeta)(I - C_n^* C_n)^{-1}\Lambda_{q,n}^*(\zeta). \quad (11.1)$$

Заметим, что $C_n^* = U_q \hat{C}_n U_p$, где

$$\hat{C}_n = \begin{bmatrix} c_0^* & & & \\ c_1^* c_0^* & & 0 & \\ \vdots\ \vdots & \ddots & & \\ c_n^* c_{n-1}^* & \cdots & & c_0^* \end{bmatrix}, \quad U_q = \begin{bmatrix} & & I_q \\ 0 & & I_q \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ I_q & & 0 \end{bmatrix}.$$

Поэтому $(I - C_n^* C_n)^{-1} = U_q \hat{A}_n^{-1} U_q$, $\hat{A}_n = I - \hat{C}_n \hat{C}_n^*$. В III части статьи была получена формула (см. (8.6)):

$$A_n^{-1} = \begin{bmatrix} G \\ GT \\ \vdots \\ GT^n \end{bmatrix} (I - T^{*n+1} T^{n+1})^{-2} [G^*, T^* G^*, \ldots T^{*n} G^*].$$

Аналогично можно найти

$$\hat{A}_n^{-1} = \begin{bmatrix} F^* \\ F^* T^* \\ \vdots \\ F^* T^{*n} \end{bmatrix} (I - T^{n+1} T^{*n+1})^{-2} [F, TF, \ldots, T^n F],$$

где $(I - T^{n+1} T^{*n+1})^{-1}$ определяется так же, как и $(I - T^{*n+1} \times T^{n+1})^{-1}$.

После сделанных замечаний выражение (11.1) можно переписать в виде

---

* Первые четыре части статьи опубликованы в выпусках 37, 38, 41 и 42 этого сборника.

$$\rho_{d,n}^{-1}(\zeta) = |\zeta|^{2n+2} I_q + (1-|\zeta|^2)[\zeta^n I_q, \zeta^{n-1} I_q, \dots, I_q] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} F^* \\ F^*T^* \\ \vdots \\ F^*T^{*n} \end{bmatrix} (I - T^{n+1}T^{*n+1})^{-2} [F, TF, \dots, T^nF] \begin{bmatrix} \bar{\zeta}^n I_q \\ \bar{\zeta}^{n-1} I_q \\ \vdots \\ I_q \end{bmatrix},$$

т. е. $\rho_{d,n}^{-1}(\zeta) = \sum\limits_{k,j=0}^{n+1} a_{k,j}^{(n)} \zeta^k \bar{\zeta}^j$. При этом

$$a_{k,0}^{(n)} = F^*T^{*n-k}(I - T^{n+1}T^{*n+1})^{-2} T^n F, \ 0 \leqslant k \leqslant n;$$

$$a_{0,j}^{(n)} = F^*T^{*n}(I - T^{n+1}T^{*n+1})^{-2} T^{n-j} F, \ 0 \leqslant j \leqslant n;$$

$$a_{k,j}^{(n)} = F^*T^{*n-k}(I - T^{n+1}T^{*n+1})^{-2} T^{n-j} F -$$
$$- F^*T^{*n-k+1}(I - T^{n+1}T^{*n+1})^{-2} T^{n-j+1} F, \ 1 \leqslant k, \ j \leqslant n;$$

$$a_{n+1,j}^{(n)} = -F^*(I - T^{n+1}T^{*n+1})^{-2} T^{n-j+1} F, \ 1 \leqslant j \leqslant n;$$

$$a_{k,n+1}^{(n)} = -F^*T^{*n-k+1}(I - T^{n+1}T^{*n+1})^{-2} F, \ 1 \leqslant k \leqslant n;$$

$$a_{n+1,n+1}^{(n)} = -F^*(I - T^{n+1}T^{*n+1})^{-2} F + I_q.$$

Поведение $\rho_{d,n}^{-1}(\zeta)$ с ростом n определяется, как будет установлено, поведением $a_{k,0}^{(n)}$, $0 \leqslant k \leqslant n$. С другой стороны, $a_{k,0}^{(n)}$ достаточно просто выражаются через $a_{0,0}^{(n)}$. Эти связи оказываются в дальнейшем определяющими. Прежде всего установим связь между $a_{k,0}^{(n)}$ и $a_{0,0}^{(n)}$. Учитывая вид $\hat{A}_n^{-1}$ и $a_{k,0}^{(n)}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, находим

$$a_{k,0}^{(n)} = [0, \dots, \underset{n-k+1}{I}, 0, \dots, 0]\, \hat{A}_n^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{bmatrix}. \tag{11.2}$$

Осуществим разложение

$$\hat{A}_n = \begin{bmatrix} \hat{A}_{n-1} & \hat{B}_n \\ \hat{B}_n^* & I - \sum\limits_{k=0}^{n} c_k^* c_k \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_n = -\hat{C}_{n-1} \begin{bmatrix} c_n \\ c_{n-1} \\ \vdots \\ c_1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует

$$\hat{A}_n^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{n-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\hat{A}_{n-1}^{-1}\hat{B}_n \\ I \end{bmatrix} \Bigl(I - \sum_{k=0}^{n} c_k^* c_k - \hat{B}_n^* \hat{A}_{n-1}^{-1} \hat{B}_n\Bigr)^{-1} \times$$
$$\times [-\hat{B}_n^* \hat{A}_{n-1}^{-1}, I]. \tag{11.3}$$

Учитывая связь $C_n^* = U_q \hat{C}_n U_p$, получаем

$$\hat{B}_n^* \hat{A}_{n-1}^{-1} \hat{B}_n = [c_1^*, \dots c_n^*]\, C_{n-1} (I - C_{n-1}^* C_{n-1})^{-1} C_{n-1}^* \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Значит, в соответствии с (8.2)

$$I-\sum_{k=0}^{n} c_k^* c_k - B_n^* A_{n-1}^{-1} B_n = \nu_{d,n}(0) = a_{0,0}^{(n)-1}. \tag{11.4}$$

Далее, учитывая, что (см. (8.3)) $c_0 = S$, $c_n = GT^{n-1}F$, $n \geqslant 1$, находим

$$\hat{B}_n = -C_{n-1}\begin{bmatrix} c_n \\ c_{n-1} \\ \vdots \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^* \\ F^*T^* \\ \vdots \\ F^*T^{*n-1} \end{bmatrix} T^n F. \tag{11.5}$$

Возвращаясь теперь к (11.2) и используя (11.3), устанавливаем

$$a_{k,0}^{(n)} = -[0, \ldots, \underset{n-k+1}{I}, \ldots, 0]\, \hat{A}_{n-1}^{-1} \hat{B}_n a_{0,0}^{(n)} =$$

$$= -[0, \ldots, \underset{n-k+1}{I}, \ldots, 0]\, \hat{A}_{n-1}^{-1} \begin{bmatrix} F^* \\ \vdots \\ F^*T^{*n-1} \end{bmatrix} T^n F a_{0,0}^{(n)}.$$

Но из вида A_n^{-1} следует

$$\hat{A}_{n-1}^{-1} \begin{bmatrix} F^* \\ \vdots \\ F^*T^{*n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^* \\ \vdots \\ F^*T^{*n-1} \end{bmatrix} (I - T^n T^{*n})^{-1}.$$

Значит,

$$a_{k,0}^{(n)} = -[0, \ldots, \underset{n-k+1}{I}, \ldots, 0] \begin{bmatrix} F^* \\ \vdots \\ F^*T^{*n-1} \end{bmatrix} (I - T^n T^{*n})^{-1} T^n F a_{0,0}^{(n)} =$$

$$= -F^* T^{*n-k} (I - T^n T^{*n})^{-1} T^n F a_{0,0}^{(n)}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n, \tag{11.6}$$

и необходимая связь установлена.

В частности, отсюда

$$F^* T^{*n} (I - T^n T^{*n})^{-1} T^n F = -I. \tag{11.7}$$

Вернемся теперь к формуле (11.1) и преобразуем ее таким образом, чтобы была видна связь между $\rho_{d,n}^{-1}(\zeta)$ и $\rho_{d,n-1}^{-1}(\zeta)$. Для этого заметим, что

$$\rho_{d,n}^{-1}(\zeta) = \Lambda_{q,n+1}(\zeta) \begin{bmatrix} \alpha_n^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Lambda_{q,n+1}^*(\zeta) - |\zeta|^2 \Lambda_{q,n}(\zeta)\, \alpha_n^{-1} \Lambda_{q,n}(\zeta),$$

где $\alpha_n = I - C_n^* C_n$. Осуществляя разложение

$$\alpha_n = \begin{bmatrix} I - \sum\limits_{k=0}^{n} c_k^* c_k & \beta_n^* \\ \beta_n & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \beta_n = -C_{n-1}^* \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},$$

получаем

$$\alpha_n^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{n-1}^{-1} \end{bmatrix} + Q_n, \tag{11.8}$$

$$Q_n = \begin{bmatrix} I \\ -\alpha_{n-1}^{-1} \beta_n \end{bmatrix} \Big(I - \sum_{k=0}^{n} c_k^* c_k - \beta_n^* \alpha_{n-1}^{-1} \beta_n\Big)^{-1} [I, \ -\beta_n^* \alpha_{n-1}^{-1}].$$

Таким образом,

$$\rho_{d,n}^{-1}(\zeta)=\Lambda_{q,n+1}(\zeta)\left\{\begin{bmatrix}0&0&0\\0&\alpha_{n-1}^{-1}&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}Q_n&0\\0&0\end{bmatrix}\right\}\Lambda_{q,n+1}^{*}(\zeta)-$$

$$-|\zeta|^2\Lambda_{q,n}(\zeta)\left\{\begin{bmatrix}0&0\\0&\alpha_{n-1}^{-1}\end{bmatrix}+Q_n\right\}\Lambda_{q,n}^{*}(\zeta)=$$

$$=|\zeta|^2\left\{\Lambda_{q,n}(\zeta)\begin{bmatrix}\alpha_{n-1}^{-1}&0\\0&1\end{bmatrix}\Lambda_{q,n}^{*}(\zeta)-|\zeta|^2\Lambda_{q,n-1}(\zeta)\alpha_{n-1}^{-1}\Lambda_{q,n-1}^{*}(\zeta)\right\}+$$

$$+(1-|\zeta|^2)\Lambda_{q,n}(\zeta)Q_n\Lambda_{q,n}^{*}(\zeta).$$

Следовательно,

$$\rho_{d,n}^{-1}(\zeta)=|\zeta|^2\rho_{d,n-1}^{-1}(\zeta)+(1-|\zeta|^2)\Lambda_{q,n}(\zeta)Q_n\Lambda_{q,n}^{*}(\zeta). \quad (11.9)$$

Пусть $\Delta(\zeta)$ — область значений $\rho_{d,\infty}(\zeta)$. Определим $\rho_{d,\infty}^{-1}(\zeta)$, положив

$$\rho_{d,\infty}^{-1}(\zeta)f=\begin{cases}0, & f\in\operatorname{Ker}\rho_{d,\infty}(\zeta);\\ [\rho_{d,\infty}(\zeta)_{|\Delta(\zeta)}]^{-1}f, & f\in\Delta(\xi).\end{cases}$$

Согласно теореме С. А. Орлова [2, с. 619], квадратичная форма $(\rho_{d,n}^{-1}(\zeta)f,\ f)$ сходится на векторах $f\in\Delta(\zeta)$ и только на них, при этом

$$\lim_{n\to\infty}(\rho_{d,n}^{-1}(\zeta)f,\ f)=(\rho_{d,\infty}^{-1}(\zeta)f,\ f),\ f\in\Delta(\zeta).$$

Поэтому, осуществляя предельный переход в (11.9), получаем, что квадратичная форма $(\Lambda_{q,n}(\zeta)Q_n\Lambda_{q,n}^{*}(\zeta)f,\ f)$ сходится на векторах $f\in\Delta(\zeta)$ и только на них, при этом

$$(\rho_{d,\infty}^{-1}(\zeta)f,\ f)=\lim_{n\to\infty}(\Lambda_{q,n}(\zeta)Q_n\Lambda_{q,n}^{*}(\zeta)f,\ f),\ f\in\Delta(\zeta). \quad (11.10)$$

Преобразуем теперь $\Lambda_{q,n}(\zeta)Q_n\Lambda_{q,n}^{*}(\zeta)$. Из вида β_n и (11.5) получаем

$$\beta_n=-C_{n-1}^{*}\begin{bmatrix}c_1\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}=-U_q\hat{C}_{n-1}U_p\begin{bmatrix}c_1\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}=U_q\hat{B}_n=\begin{bmatrix}F^*T^{*n-1}\\\vdots\\F^*\end{bmatrix}T^nF.$$

Используя теперь равенство $\alpha_n^{-1}=U_q\hat{A}_n^{-1}U_q$ и (11.4), находим

$$I-\sum_{k=0}^{n}c_k^*c_k-\beta_n^*\alpha_{n-1}^{-1}\beta_n=I-\sum_{k=0}^{n}c_k^*c_k-\hat{B}_n^*\hat{A}_{n-1}^{-1}\hat{B}_n=\rho_{d,n}(0).$$

Значит, согласно (11.8)

$$Q_n=\begin{bmatrix}I\\-\alpha_{n-1}^{-1}\begin{bmatrix}F^*T^{*n-1}\\\vdots\\F^*\end{bmatrix}T^nF\end{bmatrix}a_{0,n}^{(n)}[I,\ -F^*T^{*n}\times$$

$$\times[T^{n-1}F,\ \ldots,\ F]\alpha_{n-1}^{-1}] \quad (11.11)$$

Замечая, что

$$\alpha_{n-1}^{-1}\begin{bmatrix} F^*T^{*n-1} \\ \vdots \\ F^* \end{bmatrix} = U_q A_{n-1}^{-1}\begin{bmatrix} F^* \\ \vdots \\ F^*T^{*n-1} \end{bmatrix} = U_q \begin{bmatrix} F^* \\ \vdots \\ F^*T^{*n-1} \end{bmatrix} \times$$

$$\times (I - T^nT^{*n})^{-1} = \begin{bmatrix} F^*T^{*n-1} \\ \vdots \\ F^* \end{bmatrix} (I - T^nT^{*n})^{-1},$$

и учитывая (11.7), преобразуем (11.11) к виду

$$Q_n = \begin{bmatrix} F^*T^{*n} \\ \vdots \\ F^* \end{bmatrix} (I - T^nT^{*n})^{-1} T^n F a_{0,0}^{(n)} F^*T^{*n} \times$$

$$\times (I - T^nT^{*n})^{-1} [T^nF, \ \dots, \ F].$$

Наконец, соотношения (11.6) позволяют переписать это выражение:

$$Q_n = \begin{bmatrix} a_{0,0}^{(n)} \\ a_{1,0}^{(n)} \\ \vdots \\ a_{n,0}^{(n)} \end{bmatrix} \rho_{d,n}(0) [a_{0,0}^{(n)*}, \ a_{1,0}^{(n)*}, \ \dots, \ a_{n,0}^{(n)*}].$$

Значит,

$$\Lambda_{q,n}(\zeta) Q_n \Lambda_{q,n}^*(\zeta) = p_n(\zeta) \rho_{d,n}(0) p_n^*(\zeta); \tag{11.12}$$

$$p_n(\zeta) = a_{0,0}^{(n)} + a_{1,0}^{(n)}\zeta + \dots + a_{n,0}^{(n)}\zeta^n. \tag{11.13}$$

Таким образом, квадратичная форма $(p_n(\zeta)\rho_{d,n}(0)p_n^*(\zeta) f, f)$ сходится на векторах $f \in \Delta(\zeta)$ и только на них, при этом

$$(\rho_{d,\infty}^{-1}(\zeta) f, f) = \lim_{n\to\infty} (p_n(\zeta)\rho_{d,n}(0)p_n^*(\zeta) f, f), \ f \in \Delta(\zeta). \tag{11.14}$$

Лемма 11.1. *Многочлены $p_n(\zeta)$, $n = 1, 2, \dots$ обратимы при $|\zeta| < 1$, при этом*

$$\lim_{n\to\infty} p_n^{-1}(\zeta) = F^*(I - P_{\text{н}})(I - \zeta T P_{\text{н}})^{-1} F, \tag{11.15}$$

где $P_{\text{н}}$ *— ортопроектор на подпространство наблюдаемости*

$$H_{\text{н}} = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^{*n} G^* E_+.$$

Доказательство этой леммы проведем ниже, а сейчас, воспользовавшись ею, покажем, что

$$\rho_{d,\infty}(\zeta) = \lim_{n\to\infty} p_n^{*-1}(\zeta)\, a_{0,0}^{(n)} p_n^{-1}(\zeta). \tag{11.16}$$

Действительно, из (11.9) следует

$$(1-|\zeta|^2)\,\rho_{d,n}^{-1}(\zeta) \leqslant \rho_{d,n}^{-1}(\zeta) - |\zeta|^2\,\rho_{d,n-1}^{-1}(\zeta) =$$
$$= (1-|\zeta|^2)\,\Lambda_{q,n}(\zeta)\,Q_n\Lambda_{q,n}^{*}(\zeta).$$

Откуда, учитывая (11.12), находим

$$\rho_{d,n}^{-1}(\zeta) \leqslant p_n(\zeta)\,\rho_{d,n}(0)\,p_n^{*}(\zeta).$$

Переходя к обратным операторам, получаем

$$\rho_{d,n}(\zeta) \geqslant p_n^{*-1}(\zeta)\,a_{0,0}^{(n)}p_n^{-1}(\zeta). \tag{11.17}$$

Пусть $\Phi_n(\zeta) = p_n(\zeta)\,\rho_{d,n}(0)\,p_n^{*}(\zeta)$. Рассмотрим разложение $E_- = \Delta(\zeta)\bigoplus \operatorname{Ker}\rho_{d,\infty}(\zeta)$. В соответствии с этим разложением

$$\Phi_n(\zeta) = \begin{bmatrix} \Phi_{n,1}(\zeta) & \Phi_{n,2}(\zeta) \\ \Phi_{n,2}^{*}(\zeta) & \Phi_{n,3}(\zeta) \end{bmatrix}.$$

Тогда из (11.14) следует

$$\rho_{d,\infty}^{-1}(\zeta) = \lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} \Phi_{n,1}(\zeta) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

т. е.

$$\rho_{d,\infty}(\zeta) = \lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} \Phi_{n,1}^{-1}(\zeta) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее, учитывая (11.17) и неравенство

$$\Phi_n^{-1}(\zeta) \geq \begin{bmatrix} \Phi_{n,1}^{-1}(\zeta) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

имеем

$$\rho_{d,n}(\zeta) \geq \Phi_n^{-1}(\zeta) \geq \begin{bmatrix} \Phi_{n,1}^{-1}(\zeta) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Переходя в этих неравенствах к пределу при $n\to\infty$, получаем

$$\rho_{d,\infty}(\zeta) = \lim_{n\to\infty} p_n^{*-1}(\zeta)\,a_{0,0}^{(n)}p_n^{-1}(\zeta). \tag{11.18}$$

Заметим, что

$$\varphi(\zeta) = \lim_{n\to\infty} p_n^{-1}(\zeta) = F^*(I-P_{\text{н}})(I-\zeta T P_{\text{н}})^{-1}F$$

является голоморфной внутри единичного круга матрицей-функцией, при этом

$$\varphi(0) = F^*(I-P_{\text{н}})F = \rho_{d,\infty}(0).$$

То есть $\operatorname{rang}\varphi(0)$ равен размерности $\Delta(0)$ — подпространства, на котором сходится квадратичная форма $(a_{0,0}^{(n)}f, f)$. Отсюда следует, что $\operatorname{rang}\varphi(\zeta)$ всюду внутри D, кроме, быть может, изолированного множества точек (обозначим его Γ_φ), не меньше $\dim\Delta(0)$.

Из (11.18) и соображений сходимости вытекает, что $\operatorname{rang}\varphi(\zeta) < \Lambda(0)$. Значит, $\operatorname{rang}\varphi(\zeta) = \dim\Lambda(0)$, $\zeta \in D \setminus \Gamma_\varphi$. Но тогда требование сходимости позволяет переписать (11.18) в виде

$$\rho_{d,\infty}(\zeta) = \lim_{n\to\infty} p_n^{*\,-1}(\zeta)\,\rho_{d,\infty}^{-1}(0)\,p_n^{-1}(\zeta),\quad \zeta \in D \setminus \Gamma_\varphi.$$

и, учитывая лемму 11.1 и непрерывность соответствующих функций, получаем

$$\rho_{d,\infty}(\zeta,\ \theta) = F^*(I - \bar{\zeta}P_{\text{н}}T^*)^{-1}(1 - P_{\text{н}})F\rho_{d,\infty}^{-1}(0,\ \theta) \times$$
$$\times F^*(I - P_{\text{н}})(I - \zeta TP_{\text{н}})^{-1}F.$$

Рассматривая вместо $\theta(\zeta)$ функцию $\hat{\theta}(\zeta) = \theta^*(\bar{\zeta})$, имеем

$$\rho_{d,\infty}(\zeta, \hat{\theta}) = G(I - \bar{\zeta}P_{\text{у}}T)^{-1}(I - P_{\text{у}})G^*\rho_{d,\infty}^{-1}(0,\ \hat{\theta}) \times$$
$$\times G(I - P_{\text{у}})(I - \zeta T^*P_{\text{у}})^{-1}G^*,$$

где $P_{\text{у}}$ — ортопроектор на подпространство управляемости

$$H_{\text{у}} = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^nFE_-.$$

Итак, доказана

Теорема 11.1 (о факторизации радиусов предельного круга Вейля). *Пусть $\theta(\zeta) \in S_{p,q}$ и $\Delta = (H,\ E_-,\ E_+;\ T,\ F,\ G,\ S)$, — простой узел х. ф. которого является $\theta(\zeta)^*$. Тогда*

$$\rho_{d,\infty}(\zeta,\ \theta) = \varphi^*(\zeta)\,\varphi(\zeta),\quad \rho_{d,\infty}(\zeta,\ \hat{\theta}) = \psi(\bar{\zeta})\,\psi^*(\bar{\zeta}),$$

где

$$\varphi(\zeta) = \rho_{d,\infty}^{-\frac{1}{2}}(0,\ \theta)\,F^*(I - P_{\text{н}})(I - \zeta TP_{\text{н}})^{-1}F;$$

$$\psi(\zeta) = G(I - \zeta P_{\text{у}}T)^{-1}(I - P_{\text{у}})G^*\rho_{d,\infty}^{-\frac{1}{2}}(0, \hat{\theta}).$$

При этом

$$\rho_{d,\infty}(0,\ \theta) = F^*(I - P_{\text{н}})F,\quad \rho_{d,\infty}(0, \hat{\theta}) = G(I - P_{\text{у}})G^*,$$

а $P_{\text{н}}$, $P_{\text{у}}$ — ортопроекторы на подпространства наблюдаемости $H_{\text{н}}$ и управляемости $H_{\text{у}}$ соответственно

$$H_{\text{н}} = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^{*n}G^*E_+,\quad H_{\text{у}} = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^nFE_-.$$

Замечание. Функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ можно рассматривать как голоморфные внутри единичного круга радиусы предельного круга Вейля.

---

* Здесь мы предполагаем, что информационные блоки $A_n = I - C_nC_n^*$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ невырождены.

Докажем наконец лемму 11.1. Для этого прежде всего заметим, что из (11.12) и (11.9)

$$p_n(\zeta)\, p_n^*(\zeta) \geq p_n(\zeta)\, \rho_{d,n}(0)\, p_n^*(\zeta) =$$

$$= \frac{1}{1-|\zeta|^2}\left(\rho_{d,n}^{-1}(\zeta) - |\zeta|^2 \rho_{d,n-1}^{-1}(\zeta)\right) \geq \rho_{d,n}^{-1}(\zeta) \geqslant I.$$

Отсюда следует, что многочлены $p_n(\zeta)$ обратимы внутри единичного круга и $\| p_n^{-1}(\zeta)\| \leqslant 1$. Пусть

$$p_n^{-1}(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}\zeta^k, \quad |\zeta| < 1.$$

Пусть далее

$$F^*(I - P_{\text{н}})(I - \zeta T P_{\text{н}})^{-1} F = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \zeta^k, \quad |\zeta| < 1,$$

где $b_k = F^*(I - P_{\text{н}})(TP_{\text{н}})^k F$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Очевидно, $\|b_k\| \leqslant \|F^*\| \cdot \|F\| \leqslant 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Поэтому для доказательства (11.15) достаточно установить, что

$$\lim_{n\to\infty} b_{n,k} = b_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{11.19}$$

Для $k = 0$, это равенство было доказано выше, так как

$$b_{n,0} = a_{0,0}^{(n)-1} = \rho_{d,n}(0) \text{ и } \lim_{n\to\infty} \rho_{d,n}(0) = \rho_{d,\infty}(0) =$$

$$= F^*(I - P_{\text{н}})\, F = b_0.$$

Прежде чем переходить к доказательству (11.19) для других значений, отметим, что из вида (11.13) $p_n(\zeta)$ следует при $n > k$

$$\sum_{j=0}^{k} a_{j,0}^{(n)} b_{n,k-j} = 0, \quad 0 < k < n.$$

Откуда

$$b_{n,k} = -\sum_{j=1}^{k} b_{n,0}\, a_{j,0}^{(n)} b_{n,k-j}, \quad 0 < k < n. \tag{11.20}$$

Используя это равенство, по индукции найдем вид $b_{n,k}$. При этом будут использованы равенства (11.6) и следующие соотношения:

$$T^{n+1} P_n = Q_n T^{n+1}, \quad P_n T^{*n+1} = T^{*n+1} Q_n.$$

Здесь P_n — ортопроектор на

$$\Delta_{I - T^{*n+1}T^{n+1}} = \bigvee_{k=0}^{n} T^{*k} G^* E_+,$$

Q_n — ортопроектор на

$$\Delta_{I - T^{n+1}T^{*n+1}} = \bigvee_{k=0}^{n} T^k F E_-.$$

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_{\text{н}}, \quad (I - P_n)\, T^{*k} T^k = (I - P_n), \quad 0 \leqslant k \leqslant n+1;$$

$$(I-P_{n-1})(FF^*+TFF^*T^*+\cdots+T^{k-1}FF^*T^{*k-1})T^{*n-k}=$$
$$=(I-P_{n-1})T^{*n-k}(I-T^nT^{*n}).$$

Из (11.20) для $k=1$ получаем

$$b_{n,1}=-b_{n,0}a^{(n)}_{1,0}b_{n,0}=b_{n,0}F^*T^{*n-1}(I-T^nT^{*n})^{-1}T^nFa^{(n)}_{0,0}b_{n,0}=$$
$$=F^*(I-P_{n-1})FF^*T^{*n-1}(I-T^nT^{*n})^{-1}T^nF=$$
$$=F^*(I-P_{n-1})T^{*n-1}Q_{n-1}T^nF=F^*(I-P_{n-1})TP_{n-1}F.$$

Значит,

$$\lim_{n\to\infty} b_{n,1}=F^*(I-P_{\text{н}})TP_{\text{н}}F=b_1.$$

Аналогично для $k=2$ находим

$$b_{n,2}=-b_{n,0}a^{(n)}_{1,0}b_{n,1}-b_{n,0}a^{(n)}_{2,0}b_{n,0}=$$
$$=b_{n,0}F^*T^{*n-1}(I-T^nT^{*n})^{-1}T^nFa^{(n)}_{0,0}b_{n,1}-b_{n,0}a^{(n)}_{2,0}b_{n,0}=$$
$$=F^*(I-P_{n-1})TP_{n-1}Fa^{(n)}_{0,0}b_{n,1}-b_{n,0}a^{(n)}_{2,0}b_{n,0}=$$
$$=-F^*(I-P_{n-1})T(I-P_{n-1})Fa^{(n)}_{0,0}b_{n,1}+F^*(I-P_{n-1})TFa^{(n)}_{0,0}b_{n,1}-$$
$$-F^*(I-P_{n-1})Fa^{(n)}_{2,0}b_{n,0}=-F^*(I-P_{n-1})T(I-P_{n-1})Fa^{(n)}_{0,0}b_{n,1}-$$
$$-F^*(I-P_{n-1})TFa^{(n)}_{1,0}b_{n,0}-F^*(I-P_{n-1})Fa^{(n)}_{2,0}b_{n,0}=$$
$$=-F^*(I-P_{n-1})T(I-P_{n-1})Fa^{(n)}_{0,0}b_{n,1}+$$
$$+F^*(I-P_{n-1})(FF^*+TFF^*T^*)T^{*n-2}(I-T^nT^{*n})^{-1}T^nFa^{(n)}_{0,0}b_{n,0}=$$
$$=F^*(I-P_{n-1})T(I-P_{n-1})Fa^{(n)}_{1,0}b_{n,0}+F^*(I-P_{n-1})T^2P_{n-1}F=$$
$$=-F^*(I-P_{n-1})T(I-P_{n-1})FF^*T^{*n-1}(I-T^nT^{*n})^{-1}T^nFa^{(n)}_{0,0}b_{n,0}+$$
$$+F^*(I-P_{n-1})T^2P_{n-1}F=-F^*(I-P_{n-1})T(I-P_{n-1})TP_{n-1}F+$$
$$+F^*(I-P_{n-1})T^2P_{n-1}F=F^*(I-P_{n-1})(TP_{n-1})^2F.$$

Откуда следует

$$\lim_{n\to\infty} b_{n,2}=F^*(I-P_{\text{н}})(TP_{\text{н}})^2F=b_2.$$

Наконец, для произвольного k имеем

$$b_{n,k}=-b_{n,0}a^{(n)}_{1,0}b_{n,k-1}-b_{n,0}a^{(n)}_{2,0}b_{n,k-2}-\cdots-b_{n,0}a^{(n)}_{k,0}b_{n,0}=$$
$$=b_{n,0}F^*T^{*n-1}(I-T^nT^{*n})^{-1}T^nFa^{(n)}_{0,0}b_{n,k-1}-b_{n,0}a^{(n)}_{2,0}b_{n,k-2}-$$
$$-\cdots-b_{n,0}a^{(n)}_{k,0}b_{n,0}=F^*(I-P_{n-1})TP_{n-1}Fa^{(n)}_{0,0}b_{n,k-1}-$$
$$-F^*(I-P_{n-1})Fa^{(n)}_{2,0}b_{n,k-2}-\cdots-F^*(I-P_{n-1})Fa^{(n)}_{k,0}b_{n,0}=$$
$$=-F^*(I-P_{n-1})T(I-P_{n-1})Fa^{(n)}_{0,0}b_{n,k-1}+F^*(I-P_{n-1})\times$$
$$\times TFa^{(n)}_{0,0}b_{n,k-1}-F^*(I-P_{n-1})Fa^{(n)}_{2,0}b_{n,k-2}-\cdots-F^*(I-P_{n-1})\times$$
$$\times Fa^{(n)}_{k,0}b_{n,0}=-F^*(I-P_{n-1})T(I-P_{n-1})Fa^{(n)}_{0,0}b_{n,k-1}+$$
$$+F^*(I-P_{n-1})TF\{-a^{(n)}_{1,0}b_{n,k-2}-a^{(n)}_{2,0}b_{n,k-3}-\cdots-a^{(n)}_{k-1,0}b_{n,0}\}-$$
$$-F^*(I-P_{n-1})Fa^{(n)}_{2,0}b_{n,k-2}-\cdots-F^*(I-P_{n-1})Fa^{(n)}_{k,0}b_{n,0}.$$

Таким образом, после первого шага преобразований получаем

$$b_{n,k} = -F^* (I - P_{n-1}) T (I - P_{n-1}) F a_{0,0}^{(n)} b_{n,k-1} +$$
$$+ F^* (I - P_{n-1}) (FF^* + TFF^*T^*) T^{*n-2} (I - T^n T^{*n})^{-1} \times$$
$$\times T^n F a_{0,0}^{(n)} b_{n,k-2} + F^* (I - P_{n-1}) (FF^* + TFF^*T^*) T^{*n-3} \times$$
$$\times (I - T^n T^{*n})^{-1} T^n F a_{0,0}^{(n)} b_{n,k-3} +$$
$$+ \cdots +$$
$$+ F^* (I - P_{n-1}) (FF^* + TFF^*T^*) T^{*n-k} (I - T^n T^{*n})^{-1} T^n F.$$

Учитывая, что первое слагаемое в этом выражении имеет вид

$$-F^* (I - P_{n-1}) T (I - P_{n-1}) F \{-a_{1,0}^{(n)} b_{n,k-2} - \cdots - a_{k-1,0}^{(n)} b_{n,0}\},$$

находим

$$b_{n,k} = -F^* (I - P_{n-1}) T (I - P_{n-1}) FF^*T^{*n-1} (I - T^n T^{*n})^{-1} \times$$
$$\times T^n F a_{0,0}^{(n)} b_{n,k-2} + F^* (I - P_{n-1}) T (I - P_{n-1}) a_{2,0}^{(n)} b_{n,k-3} +$$
$$+ \cdots + F^* (I - P_{n-1}) T (I - P_{n-1}) F a_{k-1,0}^{(n)} b_{n,0} +$$
$$+ F^* (I - P_{n-1}) T^2 P_{n-1} F a_{0,0}^{(n)} b_{n,k-2} + F^* (I - P_{n-1}) (FF^* +$$
$$+ TFF^*T^*) T^{*n-3} (I - T^n T^{*n})^{-1} T^n F a_{0,0}^{(n)} b_{n,k-3} +$$
$$+ \cdots +$$
$$+ F^* (I - P_{n-1}) (FF^* + TFF^*T^*) T^{*n-k} (I - T^n T^{*n})^{-1} T^n F.$$

Используя теперь равенство

$$a_{0,0}^{(n)} b_{n,k-2} = -a_{1,0}^{(n)} b_{n,k-3} - a_{2,0}^{(n)} b_{n,k-4} - \cdots - a_{k-2,0}^{(n)} b_{n,0},$$

после второго шага преобразований приходим к выражению

$$b_{n,k} = -F^* (I - P_{n-1}) T (I - P_{n-1}) T (I - P_{n-1}) F a_{1,0}^{(n)} b_{n,k-3} -$$
$$- F^* (I - P_{n-1}) T (I - P_{n-1}) T (I - P_{n-1}) F a_{2,0}^{(n)} b_{n,k-4} -$$
$$- \cdots -$$
$$- F^* (I - P_{n-1}) T (I - P_{n-1}) T (I - P_{n-1}) F a_{k-2,0}^{(n)} b_{n,0} -$$
$$- F^* (I - P_{n-1}) T (I - P_{n-1}) (FF^* + TFF^*T^*) T^{*n-2} \times$$
$$\times (I - T^n T^{*n})^{-1} T^n F a_{0,0}^{(n)} b_{n,k-3} -$$
$$- \cdots -$$
$$- F^* (I - P_{n-1}) T (I - P_{n-1}) (FF^* + TFF^*T^*) T^{*n-k+1} \times$$
$$\times (I - T^n T^{*n})^{-1} T^n F a_{0,0}^{(n)} b_{n,0} + F^* (I - P_{n-1}) T^2 (I - P_{n-1}) \times$$
$$\times F a_{1,0}^{(n)} b_{n,k-3} + \cdots + F^* (I - P_{n-1}) T^2 (I - P_{n-1}) F a_{k-2,0}^{(n)} b_{n,0} +$$
$$+ F^* (I - P_{n-1}) (FF^* + TFF^*T^* +$$
$$+ T^2 FF^* T^{*2}) T^{*n-3} (I - T^n T^{*n})^{-1} T^n F a_{0,0}^{(n)} b_{n,k-3} +$$
$$+ \cdots +$$
$$+ F^* (I - P_{n-1}) (FF^* + TFF^*T^* + T^2 FF^* T^{*2}) T^{*n-k} \times$$
$$\times (I - T^n T^{*n})^{-1} T^n F a_{0,0}^{(n)} b_{n,0}.$$

Продолжая этот процесс, получаем

$$b_{n,k} = (-1)^{k-1} F^* \underbrace{(I - P_{n-1})}_{1} T \underbrace{(I - P_{n-1})}_{2} T \underbrace{(I - P_{n-1})}_{3} \dots T \times$$

$$\times \underbrace{(I - P_{n-1})}_{k} T P_{n-1} F + (-1)^{k-2} F^* \underbrace{(I - P_{n-1})}_{1} T^2 \underbrace{(I - P_{n-1})}_{2} T \times$$

$$\times \underbrace{(I - P_{n-1})}_{} \dots T \underbrace{(I - P_{n-1})}_{k-1} T P_{n-1} F + (-1)^{k-2} F^* \underbrace{(I - P_{n-1})}_{1} T \times$$

$$\times \underbrace{(I - P_{n-1})}_{2} T^2 \underbrace{(I - P_{n-1})}_{3} \dots T \underbrace{(I - P_{n-1})}_{k-1} T P_{n-1} F +$$

$$+ \dots + F^* (I - P_{n-1}) T^k P_{n-1} F = F^* (I - P_{n-1}) (T P_{n-1})^k F.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} b_{n,k} = F^* (I - P_н) (T P_н)^k F = b_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

и лемма полностью доказана.

Роль полученных факторизаций при исследовании сжимающих матриц-функций будет выяснена в следующей части работы.

Список литературы

1. *Дубовой В. К.* Индефинитная метрика в интерполяционной проблеме Шура для аналитических функций.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1982, вып. 37, с. 14—26; 1982, вып. 38, с. 32—40; 1984, вып. 41, с. 55—64; 1984, вып. 42, с. 46—57.
2. *Орлов С. А.* Гнездящиеся матричные круги, аналитически зависящие от параметра и теоремы об инвариантности рангов радиусов предельных матричных кругов.— Изв. АН СССР, 1976, 40, № 3, с. 593—644.

Поступила в редколлегию 01.12.83.