УДК 513.8

Г. Р. БЕЛИЦКИЙ

О РОСТКАХ ГЛАДКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ, НЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИМ

1. В работе [1] поставлен вопрос о существовании ростков C^∞-отображений F: $(\boldsymbol{R}^n, 0) \to (\boldsymbol{R}^m, 0)$, орбита которых относительно той или иной группы преобразований координат определяется их формальным рядом Тейлора в нуле и которые в то же время не эквивалентны аналитическим. В настоящей работе строятся примеры таких отображений для группы преобразований в прообразе.

Ростки C^∞-отображений, орбита которых определяется рядом Тейлора в начале координат, мы называем ω-определенными относительно соответствующей группы.

Теорема. *При $n \geqslant 1$ существуют ростки C^∞-отображений F: $(\boldsymbol{R}^{2n}, 0) \to (\boldsymbol{R}^2, 0)$, которые ω-определены относительно группы C^∞-преобразований в прообразе, но не приводятся к аналитическим никаким преобразованием из этой группы.*

2. Построение примеров, доказывающих теорему, опирается на конструкцию нормальной формы [2]. Перечислим те факты, которые мы используем здесь.

а. Пусть $F(x) = F_k(x) + \ldots$ — формальное отображение из $\boldsymbol{R}^n$ в $\boldsymbol{R}^m$ с однородной, степени k главной частью $F_k(x)$. Тогда формальным преобразованием $x \mapsto \Phi(x) = x + \varphi(x)$ отображение F можно привести к виду (обозначения см. в [2])

$$F(\Phi(x)) = F_k(x) + h(x), \quad \left(F_k'\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)^* h(x) = 0.$$

б. Если F сходится в окрестности нуля, то преобразование Φ также можно выбрать сходящимся.

в. Для ω-определенности ростка C^∞-отображения F достаточно, чтобы функция $d_F(x) = \det F'(x)(F'(x))^*$ удовлетворяла неравенству Лоясевича: $d_F(x) \geqslant c\|x\|^\alpha$, $c > 0$, $\alpha > 0$ (в работе [1] доказана и необходимость этого условия).

Пример. Пусть $n = m = 2$. Положим

$$F_2(x) = (2\xi\eta, \ \xi^2 - \eta^2) \quad (x = (\xi, \eta) \in \boldsymbol{R}^2).$$

Каждое формальное отображение $F = F_2 + \ldots$ можно привести к виду

$$H(x) = F(\Phi(x)) = F_2(x) + h(x),$$

где $h = (h^1, h^2)$ удовлетворяет уравнениям Коши — Римана

$$\frac{\partial h^1}{\partial \eta} + \frac{\partial h^2}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial h^2}{\partial \xi} - \frac{\partial h^1}{\partial \eta} = 0.$$

В комплексной записи это означает, что

$$H(z, \bar{z}) = i\bar{z}^2 + h(z); \; z = \xi + i\eta.$$

Если два формальных отображения $H_1(z, \bar{z}) = i\bar{z}^2 + h_1(z)$ и $H_2(z, \bar{z}) = i\bar{z}^2 + h_2(z)$ такого вида эквивалентны, то они совпадают (т. е. нормальная форма с главной частью $F_2(z, \bar{z}) = i\bar{z}^2$ однозначно определяется рядом F). Более того, пусть V: $\boldsymbol{R}^{2n-2} \to \boldsymbol{R}^2$ $(n \geqslant 2)$ — однородное квадратичное отображение. Тогда согласно п.а каждое формальное отображение

$$F(z, \bar{z}, y) = i\bar{z}^2 + V(y) + f(z, \bar{z}, y)$$

можно привести к нормальной форме:

$$H(z, \bar{z}, y) = i\bar{z}^2 + V(y) + h(z, y); \; \left(V'\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)^* h(z, y) = 0.$$

Индукцией по длине отрезка формального ряда доказывается

Лемма. *Пусть формальное отображение*

$$H_1(z, \bar{z}, y) = i\bar{z}^2 + V(y) + h_1(z, y)$$

имеет нормальную форму и эквивалентно отображению $H(z, \bar{z}, y) = i\bar{z}^2 + V(y) + h(z)$. *Тогда* $h_1(z, y) = h(z)$.

3. Перейдем теперь к построению примеров.

Пусть сначала $n = 1$. Рассмотрим C^∞-отображение $F(x) = (2\xi\eta + f^1(x); \; \xi^2 - \eta^2 + f^2(x))$, ряд Тейлора которого $\hat{F}$ расходится и имеет нормальную форму. Тогда F не эквивалентно аналитическому. В самом деле, пусть $F(\Phi(x)) = H(x)$, где Φ: $(\boldsymbol{R}^2, 0) \to (\boldsymbol{R}^2, 0)$ — C^∞-преобразование координат, а H аналитично. В силу п. б можно считать, что H имеет нормальную форму. Так как $\hat{F}(\hat{\Phi}) = H$ (здесь $\hat{\Phi}$ — ряд Тейлора в нуле отображения Φ), то в силу леммы $(n = 2, \; V = 0)$ $\hat{F} = H$, но ряд $\hat{F}$ расходится. Так как $d_F(x) = 4\|x\|^2$, росток F ω-определен.

Пусть теперь $n \geqslant 2$. Рассмотрим такие симметрические линейные операторы $A_1, A_2: \boldsymbol{R}^{2n-2} \to \boldsymbol{R}^{2n-2}$, что уравнение $\det(A_1 - \lambda A_2) = 0$ не имеет вещественных корней. Положим $V(y) = ((A_1 y, y); \; (A_2 y, y))$. Тогда $V: \boldsymbol{R}^{2n-2} \to \boldsymbol{R}^2$ — однородное квадратичное отображение.

Рассмотрим C^∞-отображение $F: \boldsymbol{R}^{2n} \to \boldsymbol{R}^2$, полагая

$$F(x, y) = (2\xi\eta + f^1(x) + (A_1 y, y);\ \xi^2 - \eta^2 + f^2(x) + (A_2, y, y)),$$
$$(x = (\xi, \eta) \in \boldsymbol{R}^2,\ y \in \boldsymbol{R}^{2n-2}),$$

где $f - (f^1, f^2)$ — то же, что и выше. Тогда F не эквивалентно аналитическому. В самом деле, пусть

$$(F(\Phi))(x, y) = H(x, y) = (2\xi\eta + (A_1 y, y) + h^1(x, y);$$
$$\xi^2 - \eta^2 + (A_2 y, y) + h^2(x, y)).$$

В силу леммы, $\hat{F} = H$, но ряд F расходится. Далее,

$$d_F(x, y) = d_F(u) = \| \tilde{A}_1 u \|^2 \cdot \| \tilde{A}_2 u \|^2 - (\tilde{A}_1 u,\ \tilde{A}_2 u)^2 + 0(\| u \|^5),$$

где $u - (x, y)$, $\tilde{A}_1 u - 2(\xi, \eta) + A_1 y$; $\tilde{A}_2 u = 2(\xi - \eta) + A_2 y$. Так как $\tilde{A}_1 u \neq \lambda \tilde{A}_2 u$ при $u \in \boldsymbol{R}^n$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$, то $d_F(u) > 0\ (u \neq 0)$ и F ω-определено. Теорема доказана.

Список литературы

1. *Wilson L. S.* Infinitely Determined mapgerms.— University of Hawaii, 1982.— 20 p. 2. *Белицкий Г. Р.* Нормальные формы, инварианты и локальные отображения.— К.: Наук. думка, 1979. — 170 с.

Поступила в редколлегию 14.06.84.