УДК 517.9

Е. И. ТАРАПОВА

# ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА

Настоящая статья посвящена интегрированию обобщенного нелинейного уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial q(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2}+q(x,t)\,\beta_2 q^*(x,t)\,\beta_1 q(x,t)$$

($\beta_1$, $\beta_2$ — произвольные самосопряженные операторы) методом, общая схема которого изложена в работах [1—3].

1. Рассмотрим кольцо $K$ операторнозначных функций $\Gamma(x, t)$, в котором обычным образом определены операции дифференцирования по $x$ и $t$.

Пусть обратимый элемент $\Gamma\in K$ удовлетворяет уравнениям

$$\varepsilon\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x^2}=\frac{\partial\Gamma}{\partial t}\cdot B, \tag{I}$$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial x}=A\Gamma B, \tag{II}$$

где $A$, $B$, $\varepsilon$ — постоянные элементы кольца $K$, причем $[\varepsilon, X]=0$ и $B^2=I$ для всех $X\in K$.

Из уравнения (I) вытекает, что логарифмические производные $\gamma=\Gamma^{-1}\frac{\partial\Gamma}{\partial x}$ и $\gamma_1=\Gamma^{-1}\frac{\partial\Gamma}{\partial t}$ удовлетворяют уравнению

$$\varepsilon\left(\gamma^2+\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)=\gamma_1 B, \tag{1}$$

а из уравнения (II) нетрудно получить, что

$$\gamma^2+\frac{\partial\gamma}{\partial x}=\gamma B\gamma B. \tag{2}$$

Далее из (1), (2) вытекают такие соотношения:

$$\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}=\frac{\partial\gamma}{\partial x}(B\gamma B-\gamma)+\gamma B\frac{\partial\gamma}{\partial x}-\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial x},\quad \frac{\partial\gamma}{\partial t}=\varepsilon\gamma B\frac{\partial\gamma}{\partial x},$$

а также, что $\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}=-2\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial x}$.

Следовательно,

$$\varepsilon\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}-\frac{\partial\gamma}{\partial t}=\varepsilon\left[\frac{\partial\gamma}{\partial x}(B\gamma B-\gamma)-\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right]=$$
$$=2\varepsilon\frac{\partial\gamma}{\partial x}(B\gamma B-\gamma)=2\varepsilon\frac{\partial\gamma}{\partial x}[B,\gamma]\,B.$$

Коммутируя это уравнение с оператором $B$, имеем

$$\varepsilon\left[B,\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right]-2\left[B,\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right]B+2\varepsilon B\left\{\frac{\partial\gamma}{\partial x},B\right\}[B,\gamma]=0. \tag{3}$$

и поскольку из (2) следует, что

$$\left\{\frac{\partial\gamma}{\partial x}, B\right\} = B[B, \gamma][B, \gamma],$$

то уравнение (3) эквивалентно такому:

$$\varepsilon\left[B, \frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right] - 2\left[B, \frac{\partial\gamma}{\partial t}\right]B + 2\varepsilon[B, \gamma]^3 = 0.$$

Обозначая $[B, \gamma] = u$, получаем уравнение

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}\cdot B + 2\varepsilon u^3 = 0. \tag{III}$$

Пусть элемент $\Gamma \in K$, являющийся решением уравнений (I), (II), удовлетворяет также следующему условию:

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial x}(1-P) = \Gamma S(1-P), \tag{IV}$$

где $P$ — постоянный проектор из кольца $K$, $S$ — постоянный элемент $K$.

Из этого уравнения следует, что $\gamma(1-P) = S(1-P)$ и следовательно, $\partial\gamma = \partial\gamma\cdot P$. Умножая уравнение (III) слева и справа на $P$, по учаем с учетом последнего соотношения, что элемент $U = PuP = P[B, \gamma]P = [PBP, P\gamma P]$ удовлетворяет такому уравнению:

$$\varepsilon\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2\frac{\partial U}{\partial t}\cdot B + 2\varepsilon U^3 = 0 \tag{III''}$$

в подкольце $PKP$ кольца $K$.

Таким образом, решения нелинейного уравнения (III′) в подкольце $PKP$ можно получать из решений уравнений (I), (II), к которым присоединено условие (IV) в более широком кольце $K$. Чем шире кольцо $K$, тем больше мы получим решений нелинейного уравнения в подкольце.

Эту схему мы реализуем в кольцах матриц конечного порядка и в операторных алгебрах. Основную трудность представляет выбор оператора $P\,(P^2 = P)$ и доказательство обратимости операторов $\Gamma$ в соответствующих кольцах.

2. Обозначим через $K = \mathrm{Mat}_N(K_r)$ — кольцо всех квадратных матриц $N$-го порядка с элементами из кольца $K_r$, а в качестве кольца $K_r$ выберем алгебру матриц $r$-го порядка с элементами из $C^\infty(R^2)$.

Зададим оператор $P$ так:

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 \end{pmatrix},$$

где $I$ — единичная матрица $r$-го порядка. Мы будем иметь решения линейных уравнений (I), (II) в кольце $K$ в виде матриц Вронского, т. е. матриц следующего вида:

$$W = W(f_1, f_2, \ldots, f_N) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^{N-1}}{\partial x^{N-1}} f_1 \cdot & \ldots & \ldots & f_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^{N-1}}{\partial x^{N-1}} f_N \cdot & \ldots & \ldots & f_N \end{pmatrix},$$

где $f_i(x, t)$ — матрицы $r$-го порядка из $K_r$.

Такие матрицы автоматически удовлетворяют дополнительному условию (IV), в котором

$$S = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & I \\ I & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно показать, что если матрица $W$ обратима в $K$, то ее логарифмическая производная имеет такой вид:

$$\gamma = W^{-1} \frac{\partial W}{\partial x} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & I & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ & & \ddots & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & \ddots & \\ \gamma_{N-1} & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & I \\ \gamma_N & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

причем элементы $\gamma_i(x, t)$ находятся из системы уравнений

$$\frac{\partial^N}{\partial x^N}(f_i(x, t)) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^{N-j}}{\partial x^{N-j}}(f_i(x, t))\, \gamma_j(x, t) \tag{4}$$

и

$$P\gamma P = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Решая систему (4) относительно $\gamma_1(x, t)$, получаем (с учетом свойств матриц Вронского), что

$$\gamma_1 = (\operatorname{Det} W)^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{Det} W).$$

Выберем в уравнениях (I), (II) матрицу $B$ так:

$$B = \operatorname{diag}(\underbrace{b, \ldots, b}_{N}),$$

$$b = \operatorname{diag}(\underbrace{I, I, \ldots, I}_{r_1}, \underbrace{-I, -I, \ldots, -I}_{r_2}) \quad (r_1 + r_2 = r).$$

Тогда, если матрица $W$ обратима и удовлетворяет уравнениям (I), (II), (IV), то матрица $U = U(x, t) = [\gamma_1, b]$ является регулярным решением уравнения

$$-2i \frac{\partial U}{\partial t} \cdot b = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2U^3 \ (\varepsilon = i). \tag{III''}$$

Выбирая в качестве $A$ диагональную матрицу $A = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_N)$, получаем, что уравнения (I), (II) распадаются на систему линейных уравнений относительно матриц $f_s = f_s(x, t)$. Решения этой системы имеют такой вид:

$$f_s = f_s q_1 + f_s q_2 = \exp(a_s x + i a_s^2 t)\, c_s^{(1)} q_1 + \exp(-(a_s x + \\ + i a_s^2 t))\, c_s^{(2)} q_2, \tag{5}$$

где $c_s^{(1)}$, $c_s^{(2)}$ — произвольные постоянные матрицы $K_r$, $q_1 = 1/2\,(I + b)$ $q_2 = 1/2\,(I - b)$. Можно доказать, что если выбрать $a_s = \lambda_s q_1 - \bar{\lambda}_s q_2$, $c_s^{(1)} = \exp(\alpha_s)\, q_1 - \exp(-\alpha_s)\, q_2 c_s^* q_1$, $c_s^{(2)} = \exp(\bar{\alpha}_s)\, q_2 + \exp(-\alpha_s)\, q_1 c_s q_2$, где $\alpha_s$, $\lambda_s$ ($\mathrm{Re}\,\lambda_s > 0$) — произвольные комплексные числа; $c_s$ — произвольные постоянные матрицы $r$-го порядка, то матрицы Вронского $W(f_1, f_2, \ldots, f_N)$, в которых $f_s(x, t)$ определены формулой (5), обратимы и удовлетворяют уравнениям (I), (II), (IV). Кроме того, при таком выборе $c_s$ и $a_s$, $U(x, t) = U^*(x, t)$. Из этого равенства и вида матрицы $b$ следует, что

$$U(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & V(x, t) \\ V^*(x, t) & 0 \end{pmatrix},$$

где матрица-функция $V(x, t)$ имеет $r_1$ строк и $r_2$ столбцов. Подставляя ее в уравнения (III″), находим, что

$$-2i \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} + 2V(x, t)\, V^*(x, t)\, V(x, t).$$

Обозначив через $\vec{y}_s$ $r_2$-мерный вектор, образованный элементами $s$-ой строки матрицы $V(x, t)$, мы можем записать последнее уравнение в следующей эквивалентной форме:

$$-2i \frac{\partial \vec{y}_s}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{y}_s}{\partial x^2} + 2 \sum_{j=1}^{r_1} (\vec{y}_s, \vec{y}_j)\, \vec{y}_j$$

относительно $r_2$-мерных вектор-функций $\vec{y}_s = \vec{y}_s(x, t)$ $(1 \leqslant s \leqslant r_1)$.

При $N = 1$ получаем аналог односолитонного решения уравнения (III″)

$$V(x, t) = 2(\lambda + \bar{\lambda})\, e^{-2\varphi(x,t)} C\, (I + e^{-4\,\mathrm{Re}\,\varphi(x,t)} CC^*)^{-1},$$

где $\lambda$ — произвольное число из открытой правой полуплоскости, $\varphi(x, t) = \lambda x + i\lambda^2 t + \alpha$; $C$ — произвольная постоянная матрица с $r_1$ строками и $r_2$ столбцами.

**3.** Пусть $E$ — произвольное банахово пространство и $L(E)$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов, отображающих $E$ в себя. Выберем в качестве кольца $K = M_{L(E)}(C^\infty(R^2))$ алгебру операторнозначных функций $f(x, t)$, принимающих значения из $L(E)$ и бесконечно дифференцируемых по $x$ и $t$.

Пусть оператор $\Gamma \in K$ удовлетворяет системе уравнений (I), (II), в которых $A, B \in L(E)$, $B^2 = I$ и $\varepsilon$ — число. Поскольку операторы $Q_1 = \frac{I+B}{2}$ и $Q_2 = \frac{I-B}{2}$ являются проекторам $(Q_i^2 = Q_i)$, то уравнения (I), (II) здесь эквивалентны таким:

$$(-1)^{i+1}\varepsilon \frac{\partial^2(\Gamma Q_i)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial t}(\Gamma Q_i), \tag{I$'$}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Gamma Q_i) = (-1)^{i+1} A(\Gamma Q_i). \tag{II$'$}$$

Решения этих уравнений имеют такой вид: $\Gamma Q_i = \exp(Ax + \varepsilon A^2 t) \times \times CQ_1 + \exp(-(Ax + \varepsilon A^2 t))CQ_2$. Следовательно, общим решением уравнений (I), (II) являются операторы $\Gamma(x, t) = \exp(Ax + \varepsilon A^2 t) \times \times CQ_1 + \exp(-(Ax + \varepsilon A^2 t))CQ_2$, где $C$ — произвольный оператор из $L(E)$.

Разложим пространство $E$ в прямую сумму $E = E_1 \oplus E_2$ его подпространств $E_1 = Q_1 E$, $E_2 = Q_2 E$ и положим

$$Q_1 = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix},$$

где $I_i$ — единичный оператор в пространстве $E_i$. Пусть, кроме этого

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix},$$

где $a_1 \in L(E_1)$, $a_2 \in L(E_2)$.
Тогда

$$\Gamma(x, t) = \begin{pmatrix} \exp(a_1 x + \varepsilon a_1^2 t) & \exp(-(a_1 x + \varepsilon a_1^2 t))C_{12} \\ \exp(a_2 x + \varepsilon a_2^2 t)C_{21} & \exp(-(a_2 x + \varepsilon a_2^2 t)) \end{pmatrix},$$

мы положили

$$C = \begin{pmatrix} I_1 & C_{12} \\ C_{21} & I_2 \end{pmatrix}$$

или $\Gamma(x, t) = \mathcal{E} + \mathcal{E}^{-1}C = \mathcal{E}T$, $T = T(x, t) = I + \mathcal{E}^{-2}C$, где

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \exp(a_1 x + \varepsilon a_1^2 t) & 0 \\ 0 & \exp(-(a_2 x + \varepsilon a_2^2 t)) \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} \\ C_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что так как оператор $P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$ $(P_i^2 = P_i)$ в дополнительном условии (IV) перестановочен с $B$, то это условие будет выполнено, если $S=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{pmatrix}$ и операторы $C_{ij}$ удовлетворяют таким уравнениям: $a_1C_{12}-C_{12}a_2=r_{12}P_2$, $a_2C_{21}-C_{21}a_1=r_{21}P_1$, где $r_{ij}$ — произвольные операторы, отображающие $E_j$ в $E_i$. Решения таких уравнений находятся по формулам М. Г. Крейна [4]. Для того чтобы двигаться дальше, необходимо надлежащим образом выбрать пространство $E$. Выберем в качестве $E$ гильбертово пространство $L_2(E_0, d\mu)$ вектор-функций $\vec{f}(z)$ со значениями из $E_0$ — сепарабельного гильбертова пространства со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_0$. Определим скалярное произведение в $E$ так: $(\vec{f}, \vec{g})_\mu=\mu^{-1}\int\limits_M(\vec{f}(z), \vec{g}(z))_0 d\mu(z)$ $(\mu=\int\limits_M d\mu(z))$, где $d\mu(z)$ — конечная неотрицательная мера с компактным носителем $M$. Пространство $E_0$ очевидным образом отождествляется с подпространством пространства $E$, состоящим из постоянных вектор-функций, а оператор $P(\vec{f})=\mu^{-1}\int\limits_M \vec{f}(z)\,d\mu(z)$ является ортопроектором на это подпространство.

Пусть в уравнениях (I′), (II′) операторы $a_1$, $a_2$ есть операторы умножения на функции $i(z+i\rho)$, $i\overline{(z+i\rho)}$, где $\rho>0$. Если носитель $M$ меры $d\mu(z)$ компактен лежит в замкнутой верхней полуплоскости, то эти операторы ограничены и их спектры лежат в полуплоскостях $\operatorname{Re} z\leqslant-\rho$, $\operatorname{Re} z\geqslant\rho$. Поэтому можно применить формулы М. Г. Крейна, которые после вычисления соответствующих контурных интегралов принимают такой вид:

$$C_{12}=\mu^{-1}\hat{r}_{12}(z)\,\Lambda_2^{(\rho)}q_2,\quad C_{21}=\mu^{-1}\hat{r}_{21}(z)\,\Lambda_1^{(\rho)}q_1$$
$$\Lambda_2^{(\rho)}(\vec{f})=\int\limits_M\frac{\vec{f}(\xi)}{i(z-\xi+2i\rho)}\,d\mu(\xi),\quad \Lambda_1^{(\rho)}(\vec{f})=\int\limits_M\frac{\vec{f}(\xi)}{i(z-\bar{\xi}-2i\rho)}\,d\mu$$

(через $\hat{r}_{ij}(z)$ будем обозначать операторнозначные функции). Таким образом, справедлива

**Лемма.** *Пусть $E=L_2(E_0, d\mu)$, причем носитель $M$ меры $d\mu$ компактен и лежит в замкнутой верхней полуплоскости. Тогда операторы*

$$\Gamma^{(\rho)}=\Gamma^{(\rho)}(x,t)=\mathscr{E}_\rho+\mathscr{E}_\rho^{-1}\mu^{-1}\hat{r}(z)\,\Lambda^{(\rho)}$$
$$\hat{r}(z)=\begin{pmatrix} 0 & \hat{r}_{12}(z) \\ \hat{r}_{21}(z) & 0 \end{pmatrix},\quad \Lambda^{(\rho)}=\begin{pmatrix} \Lambda_1^{(\rho)} & 0 \\ 0 & \Lambda_2^{(\rho)} \end{pmatrix},\quad \mathscr{E}_\rho=\begin{pmatrix} e_1^{(\rho)} & 0 \\ 0 & e_2^{(\rho)} \end{pmatrix}$$

*удовлетворяют уравнениям (I′), (II′) и дополнительному условию (IV), если*

$$e_1^{(\rho)}=\exp\{i(z+i\rho)x-\varepsilon(z+i\rho)^2t\};$$
$$e_2^{(\rho)}=\exp\{-i\overline{(z+i\rho)}x+\varepsilon\overline{(z+i\rho)^2}t\}.$$

Далее, необходимо выяснить, когда оператор $\Gamma(x, t)$ обратим в алгебре $M_{L(E)}(C^\infty(R^2))$. Ясно, что при $\rho > 0$ оператор $\Gamma^{-1}$ существует не при всех значениях переменных $x$ и $t$. Следовательно, оставляя $\rho > 0$ и переходя к логарифмическим производным с последующим проектированием, мы будем получать решения нелинейного уравнения с особенностями. Чтобы избавиться от этих особенностей, нужно в полученных формулах сделать предельный переход при $\rho \to +0$. Выясним, какими свойствами должна обладать мера $d\mu(z)$, чтобы такой предельный переход можно было осуществить.

Обозначим через $H^2(\operatorname{Im} z \geqslant 0)$ пространство Харди аналитических в верхней полуплоскости функций $x(z)$ вида $x(z) = \int\limits_0^\infty \tilde{x}(t) \times \times e^{itz} dt \ (\tilde{x}(t) \in L_2)0, \infty))$ со скалярным произведением

$$(x(z),\ y(z))_{H^2} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(z)\, \overline{y(z)}\, dz = \int\limits_0^\infty \tilde{x}(t)\, \overline{\tilde{y}(t)}\, dt$$

и через $\overline{H}^2(Im\, z \geqslant 0)$ пространство функций вида $f(z) = \overline{x(z)}$, где $x(z) \in H^2(\operatorname{Im} z \geqslant 0)$ со скалярным произведением $(f(z), g(z))_{\overline{H^2}} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z)\, \overline{g(z)}\, dz$. Оказывается, что если

1) носитель $M$ меры $d\mu(z)$ лежит в полуплоскости $Im z \geqslant 0$,

2) на множестве $M_0 = M \cap \{z : Im z = 0\}$ $d\mu(z) = (2\pi)^{-1} dz$,

3) на множестве $M_1 = M \cap \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ $\int\limits_{M_1} (Im\, z)^{-1} d\mu(z) = c < < \infty$, то $H^2 \subset L_2(d\mu)$, $\overline{H}^2 \subset L_2(d\mu)$ и операторы $\Lambda_1^{(\rho)}$, $\Lambda_2^{(\rho)}$ при $\rho \to +0$ сильно сходятся к операторам

$$\Lambda_1(f) = \int\limits_M \frac{f(\xi)}{i\,\overline{(z - \xi - i0)}}\, d\mu(\xi),\ \ \Lambda_2(f) = \int\limits_M \frac{f(\xi)}{i\,(z - \bar{\xi} + i0)}\, d\mu(\xi),$$

отображающим $L_2(d\mu)$ соответственно в $\overline{H}^2$ и $H^2$. Далее, имеет место

**Теорема.** *Пусть выполнены следующие условия.*

**1.** *Носитель $M$ меры $d\mu(z)$ компактен и состоит из множества $M_0 \subset \{z : Im\, z = 0\}$ и множества $M_1 \subset \{z : Im\, z > 0\}$, причем на $M_0$; $d\mu(z) = (2\pi)^{-1} dz$, а на $M_1$ $\int\limits_{M_1} (Im\, z)^{-1} d\mu(z) < \infty$.*

**2.** *Непрерывная (по норме) операторнозначная функция $\hat{r}(z)$ при каждом $z \in M$ является компактным оператором в пространстве $E_0$, $\hat{r}(x) = 0$ при $x \in (-\infty, \infty)/M_0$ и либо $\hat{r}^*(z) = \hat{r}(z)$, либо $M_1 = \varnothing$*

$$\inf_{x \in M_0} \| r^*(x) - r(x) \|_{E_0} < r;\ \ \sup_{x \in M_0} \| r^*(x) - r(x) \|_{E_0} \leqslant r.$$

*Тогда операторы* $\Gamma(x, t) = \mathcal{E} + \mathcal{E}^{-1}\hat{r}(z)\Lambda$

$$\hat{r}(z) = \begin{pmatrix} 0 & \mu^{-1} r_{12}(z) \\ \mu^{-1} r_{21}(z) & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E} = \begin{pmatrix} e(z) & 0 \\ 0 & \overline{e(z)} \end{pmatrix},$$

*где* $e(z) = \exp i(zx - z^2 t)$, *принадлежат алгебре* $M_{L(E_0)}(C^\infty(R^2))$ *и обратимы в ней. Кроме того, они удовлетворяют уравнениям*

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x} = \hat{z}\Gamma b, \ i\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \cdot b \ \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(I - P) = \Gamma \hat{z}(I - P), \ \hat{z} = \begin{pmatrix} iz & 0 \\ 0 & \overline{iz} \end{pmatrix}.$$

Получим формулу для решения нелинейного уравнения. Если выполнены условия теоремы, то оператор $U = U(x, t) = P[\gamma, b]P$ принадлежит алгебре $M_{L(E_0)}(C^\infty(R^2))$ и удовлетворяет такому нелинейному уравнению

$$-i\frac{\partial U}{\partial t} \cdot b = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + U^3.$$

Из формулы (7) следует, что $\frac{\partial \Gamma}{\partial x} \mathcal{E}\hat{z} - \mathcal{E}^{-1}\hat{r}(z)\Lambda$; $\hat{z}\hat{r}(z) = r(z)\hat{\hat{z}}$, $-\hat{\hat{z}}\Lambda = \Lambda\hat{z} + \mu b P$, $\hat{z} = \begin{pmatrix} iz & 0 \\ 0 & \overline{iz} \end{pmatrix}$.

Поэтому

$\frac{\partial \Gamma}{\partial x} = \Gamma\hat{z} + \mu\mathcal{E}^{-1}\hat{r}(z)bP$, $\gamma = \hat{z} + \mu\Gamma^{-1}\mathcal{E}^{-1}\hat{r}(z)bP$. Обозначая далее $T = I + \hat{\rho}\Lambda$, где $\hat{\rho} = \mathcal{E}^{-2}\hat{r}$, получим $\Gamma = \mathcal{E}T$, $\Gamma^{-1} = T^{-1}\mathcal{E}^{-1}$, следовательно, $\gamma = \hat{z} + \mu T^{-1}\hat{\rho}bP$. Нетрудно показать, что $T^{-1}\hat{\rho} = \hat{\rho}\tilde{T}^{-1}$, где $\tilde{T} = I + \Lambda\hat{\rho}$, тогда $\gamma = \hat{z} + \mu\hat{\rho}\tilde{T}^{-1}bP$ и $U = \mu P \times [\hat{\rho}\tilde{T}^{-1}, b]bP$ (8). Выберем операторы $\hat{r}(z) = \begin{pmatrix} 0 & \mu^{-1}\hat{r}_{12}(z) \\ \mu^{-1}\hat{r}_{21}(z) & 0 \end{pmatrix}$ так, чтобы выполнялось равенство $\hat{r}_{21}(z) = \beta_2\hat{r}_{12}^*(z)\beta_1$ (9), где $\beta_2, \beta_1$ — произвольные самосопряженные операторы. Это соотношение, очевидно, влечет за собой аналогичное соотношение для операторов $\hat{\rho}_{12}(z)$, $\hat{\rho}_{21}(z)$, $\hat{\rho}_{21}(z) = \beta_2\hat{\rho}_{12}^*(z)\beta_1$.

Из последнего равенства и формулы (8) нетрудно получить

$$U = \begin{pmatrix} 0 & q \\ \beta_2 q^* \beta_1 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда следует, что оператор $q = q(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$i\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + q\beta_2 q^*\beta_1 q, \tag{10}$$

являющемуся обобщением нелинейного уравнения Шредингера. Выясним, какие уравнения надо решить, чтобы найти оператор $U$. Можно показать, что оператор $U$ действует в пространстве $E_0$ по таким правилам:

$$U(\vec{C}) = 2\lim_{|z|\to\infty}\{\overline{iz\vec{x}_1(z, \vec{c}_2)} - iz\vec{x}_2(z, \vec{c}_1)\},$$

где $\vec{x}_i(z, \vec{c}_i)$ — решения следующих систем:

$$\vec{x}_1(z, \vec{c}_1) + \int\limits_M \frac{\hat{\rho}_{12}(\xi)\, \vec{x}_2(\xi, \vec{c}_1)}{i(\bar{z} - \xi + i\,0)} d\mu(\xi) = \vec{c}_1, \tag{11}$$

$$\vec{x}_2(z, \vec{c}_1) + \int\limits_M \frac{\hat{\rho}_{21}(\xi)\, \vec{x}_1(\xi, \vec{c}_1)}{i(z - \bar{\xi} - i\,0)} d\mu(\xi) = 0;$$

$$\vec{x}_1(z, \vec{c}_2) + \int\limits_M \frac{\hat{\rho}_{12}(\xi)\, \vec{x}_2(\xi, \vec{c}_2)}{i(z - \xi + i\,0)} d\mu(\xi) = 0, \tag{11'}$$

$$\vec{x}_2(z, \vec{c}_2) + \int\limits_M \frac{\hat{\rho}_{21}(\xi)\, \vec{x}_1(\xi, \vec{c}_1)}{i(z - \bar{\xi} - i\,0)} d\mu(\xi) = \vec{c}_2.$$

Если пространство $E_0$ двумерно, то матрица оператора $U$ имеет вид $U = \begin{pmatrix} 0 & U_{12} \\ U_{12} & 0 \end{pmatrix}$, где $U_{12} = 2 \lim\limits_{|z| \to \infty} \overline{izy_1(z)}$, $U_{21} = -2 \lim\limits_{|z| \to \infty} izx_2(z)$ и функции $x_i(z), y_i(z)$ находятся из уравнений (11), (11′), в которых $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$ нужно заменить на 1. Тогда условие (9) примет вид: $r_{12}(z) = (-1)^m r_{21}(r)(z) = r_m(z)$ и следовательно, $U_{21} = (-1)^m \overline{U_{12}}$, так что матрица $U$ имеет такую структуру:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & q \\ (-1)^m \bar{q} & 0 \end{pmatrix},$$

где $q = (-1)^{m-1} \cdot 2 \cdot \lim\limits_{|z| \to \infty} \overline{izx_2(z)}$ и функции $x_2(z)$ находятся из системы

$$x_1(z) + \int\limits_M \frac{e(\xi)\, r_m(\xi)\, x_2(\xi)}{i(\bar{z} - \xi + i\,0)} d\mu(\xi) = 1, \tag{12}$$

$$x_2(z) + (-1)^m \int\limits_M \frac{\overline{e(\xi)\, r_m(\xi)}\, x_1(\xi)}{i(z - \bar{\xi}\, i\,0)} d\mu(\xi) = 0.$$

Таким образом, справедлива следующая

**Теорема.** *Пусть выполнены условия:*

*1. Мера $d\mu(z)$ сосредоточена в замкнутой верхней полуплоскости и $d\mu(x) = (2\pi)^{-1} dx$, $(-\infty < x < \infty)$ $\int\limits_{\operatorname{Im} z > 0} (\operatorname{Im} z)^{-1} d\mu(z) < \infty$.*

*2. Функция $r_2(z)$ непрерывна и финитна.*

*3. Функция $r_1(z)$ равна нулю при $\operatorname{Im} z > 0$, непрерывна и финитна на вещественной оси и $\sup\limits_{-\infty < x < \infty} |r_1(x)| \leqslant 1$.*

Тогда система уравнений (12) однозначно разрешима и функции $q = q(m, x, t) = (-1)^{m-1} \cdot 2 \cdot \lim\limits_{|z| \to \infty} izx_2(z)$ являются регулярными решениями следующего уравнения:

$$i \frac{\partial q(m)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q(m)}{\partial x^2} + (-1)^m |q(m)|^2 q(m).$$

**Список литературы:** *1. Марченко В. А., Тарапова Е. И.* Новый подход к задаче интегрирования некоторых нелинейных уравнений. — Усп. мат. наук, 1981, 36, № 4, с. 227—228. 2. *Тарапова Е. И.* $N$-солитонные решения одной нелинейной системы уравнений. — Теория функций, функцион. анализ и их приложения, 1981, вып. 36, с. 103—111. 3. *Тарапова Е. И.* Об интегрировании $N$-волновой задачи. — Теория функций, функцион. анализ и их приложения, 1982, вып. 38, с. 103—111. 4. *Крейн М. Г.* Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — К.: Наука, 1964. — 186 с.

*Поступила в редколлегию 11.11.82.*