УДК 517.984

Л. В. ПЕРКОЛАБ

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ ЯКОБИ

Пусть H — гильбертово пространство векторов $\vec{y} = (\ldots\, y_{-k}, \ldots\, y_{-1}, y_0, y_1, \ldots\, y_k, \ldots)$ со скалярным произведением $(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_i \bar{y}_i$.

Рассмотрим в H самосопряженный ограниченный оператор A, порожденный бесконечной периодической якобиевой матрицей (J-матрицей)

$$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ b_{-1} & a_0 & b_0 & 0 & & & & & \\ 0 & b_0 & a_1 & b_1 & 0 & & & & \\ & 0 & b_1 & a_2 & b_2 & 0 & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & 0 & b_{k-1} & a_k & b_k & 0 & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \tag{1}$$

элементы $a_k = a_{k+n}$ которой вещественны, а $b_k = b_{k+n}$ отрицательны.

Как известно, спектр этого оператора S непрерывен и состоит из конечного числа зон

$$[\mu_k^+, \mu_{k+1}^-] \ (k = 0, 1, \ldots\, n-1): \quad S = \bigcup_{k=0}^{n-1} [\mu_k^+, \mu_{k+1}^-], \tag{2}$$

где $\mu_0^+ = \mu_0^- = \mu_0$, $\mu_n^+ = \mu_n^- = \mu_n$ и $\mu_0 < \mu_1^- \leqslant \mu_1^+ < \cdots < \mu_{n-1}^- \leqslant \leqslant \mu_{n-1}^+ < \mu_n$.

В настоящей работе будут найдены необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять последовательность сегментов (2) для того, чтобы она была спектром некоторой J-матрицы, и дан способ восстановления этой матрицы.

Так как по последовательности сегментов матрица A восстанавливается неоднозначно, будут указаны те дополнительные данные, которые однозначно ее определяют.

1. Свойства ортогональных многочленов. Уравнение $A\vec{y} = \mu\vec{y}$ **(1.1)** в пространстве произвольных последовательностей $(\ldots y_{-k}, \ldots y_{-1}, y_0, y_1, \ldots y_k, \ldots)$ эквивалентно конечно-разностному уравнению второго порядка

$$b_{k-1}y_{k-1} + a_k y_k + b_k y_{k+1} = \mu y_k \quad (k = 0, \pm 1, \ldots). \tag{1.2}$$

Обозначим через $\vec{P}\,(P_{-1}(\mu),\ P_0(\mu),\ P_1(\mu),\ \ldots)$ и $\vec{Q}\,(Q_{-1}(\mu), Q_0(\mu),\ Q_1(\mu)\ \ldots)$ фундаментальную систему решений уравнения (1.2) при начальных данных $P_{-1}(\mu) = 0$, $Q_{-1}(\mu) = 1$, $P_0(\mu) = 1$, $Q_0(\mu) = 0$.

Элементы $P_k(\mu)$, $Q_k(\mu)$ векторов $\vec{P}$, $\vec{Q}$ являются многочленами относительно μ степени k и $k-1$ соответственно.

Они обладают следующими свойствами:

1. Корни $P_k(\mu)$ вещественны, просты и перемежаются с корнями $P_{k-1}(\mu)$.

2. Корни $Q_k(\mu)$ вещественны, просты и перемежаются с корнями $P_k(\mu)$.

3. Имеет место аналог формулы Лиувилля — Остроградского

$$P_{k-1}(\mu)\,Q_k(\mu) - P_k(\mu)\,Q_{k-1}(\mu) = -\frac{b_{-1}}{b_{k-1}} \quad (k = 0, 1, \ldots). \tag{1.3}$$

4. Справедливо равенство $\begin{pmatrix} y_{n+k-1} \\ y_{n+k} \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} y_{k-1} \\ y_k \end{pmatrix}$, где $y_k = y_k(\mu)$ — решение уравнения (1.2), а матрица $A_n = \begin{pmatrix} Q_{n-1}(\mu) & P_{n-1}(\mu) \\ Q_n(\mu) & P_n(\mu) \end{pmatrix}$ называется матрицей монодромии.

5. Числа $\mu_k^{\pm}$ $(k = 0, \ldots n)$ являются корнями уравнения $u_+(\mu) = \pm 1$ **(1.4)**, где $u_+(\mu) = \frac{P_n(\mu) + Q_{n-1}(\mu)}{2}$ — многочлен n-й степени, а $S = \{\mu : u_+^2(\mu) \leqslant 1\}$.

Замечание. Корни μ_k^-, μ_k^+ уравнения (1.4) могут совпадать.

С л е д с т в и е. Многочлен $(n-1)$-й степени $u_+'(\mu)$ имеет только вещественные корни.

Теорема 1.1. *Пусть $P_n(z)$ — многочлен n-й степени. Для того чтобы уравнение $P_n^2(z) = 1$* **(1.5)** *имело только вещественные корни, необходимо и достаточно, чтобы $P_n(z)$ представлялся в виде $P_n(z) = \cos\theta(z)$, где функция $\theta(z)$ осуществляет конформное отображение верхней полуплоскости на область $\theta\{h_k\}$ вида* (рис. 1), *переводящее бесконечно удаленную точку z-плоскости в бесконечно удаленную точку полуполосы θ-плоскости.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть уравнение (1.5) имеет $2n$ вещественных корней.

Не ограничивая общности, считаем n нечетным, а старший коэффициент многочлена $P_n(z)$ — отрицательным.

Обозначим через α_0 и β_n самый левый и самый правый корни уравнения (1.5) соответственно. Тогда все корни этого уравнения будут заключены в отрезке $[\alpha_0, \beta_n]$, причем $P_n(\alpha_0) = +1$, а $P_n(\beta_n) = -1$. Исследование поведения $P_n(z)$ показывает, что его график имеет вид, изображенный на рис. 2, где α_{2k}, β_{2k}—корни уравнения $P_n(z) = 1$, а α_{2k-1}, β_{2k-1} — корни уравнения

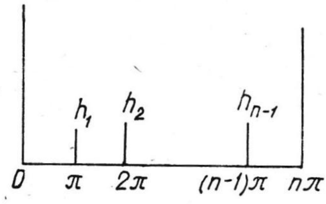

Рис. 1

$$P_n(z) = -1 \ \left(k = 1,\ 2,\ \ldots \frac{n-1}{2}\right).$$

Определим в верхней полуплоскости функцию $\theta(z)$ по формуле

$$\theta(z) = \int_{\alpha_0}^{z} \frac{-P_n'(\xi)}{\sqrt{1 - P_n^2(\xi)}} \alpha_\xi, \tag{1.6}$$

выбрав ветвь радикала $\sqrt{1 - P_n^2(z)}$ так, чтобы $\operatorname{Im}\sqrt{1 - P_n^2(z)}$ была положительна при $z < \alpha_0$. Эта функция аналитична в области определения и непрерывна вплоть до границы.

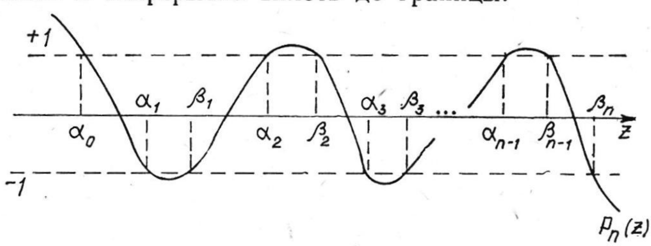

Рис. 2

На границе верхней полуплоскости, когда z меняется от $-\infty$ до α_0, $\arg\sqrt{1 - P_n^2(z)} = \frac{\pi}{2}$, при этом $P_n'(z) < 0$ и $\theta(z)$ является чисто мнимой величиной, монотонно изменяющейся от $i\infty$ до 0, а $\theta(\alpha_0) = 0$. Когда z меняется от α_0 до α_1, $P_n'(z) < 0$, $\sqrt{1 - P_n^2(z)}$ вещественен и $\theta(z) = \arccos P_n(z)$ монотонно возрастает от 0 до $\theta(\alpha_1)$.

Так как при этом $P_n(z)$ монотонно убывает от $+1$ до -1, то $\theta(\alpha_1) = \pi$.

При дальнейшем изменении z от α_k до β_k $(k=1, \ldots n-1)$ функция $\sqrt{1-P_n^2(z)}$ принимает чисто мнимые значения, при этом $\arg\sqrt{1-P_n^2(z)} = \frac{\pi}{2} - k\pi$, а $\operatorname{sign}\operatorname{Im}\sqrt{1-P_n^2(z)} = (-1)^k$.

Так как многочлен $P_n'(z)$ имеет только простые корни $\gamma_k \in (\alpha_k, \beta_k)$, то $\operatorname{sign} P_n'(z) = \begin{cases}(-1)^k, & \alpha_k < z \leqslant \gamma_k \\ (-1)^{k+1} & \gamma_k < z < \beta_k.\end{cases}$

Следовательно, когда z возрастает от α_k до β_k, $\operatorname{Re}\theta(z)$ остается равной $\arccos(-1)^k = k\pi$, а $\operatorname{Im}\theta(z)$ сначала возрастает от 0 до $h_k = \frac{1}{i}(\theta(\gamma_k) - k\pi)$, а затем убывает от h_k до 0, и так как $P_n(\beta_k) = P_n(\alpha_k) = (-1)^k$, то $\theta(\beta_k)$ тоже равно $k\pi$. Когда z меняется от β_k до α_{k+1}, $P_n(z)$ изменяется от $(-1)^k$ до $(-1)^{k+1}$ монотонно, $\sqrt{1-P_n^2(z)}$ вещественен и $\theta(z) = \arccos P_n(z)$ возрастает от $k\pi$ до $\theta(\alpha_{k+1})$, где $\theta(\alpha_{k+1}) = (k+1)\pi$.

Следовательно, когда z пробегает в положительном направлении отрезки $[\alpha_k, \beta_k]$, $[\beta_k, \alpha_{k+1}]$ $(k=1, \ldots n-1)$, функция $\theta(z)$ пробегает в положительном направлении часть границы $\Theta\{h_k\}$, состоящую из разреза $\operatorname{Re}\theta(z) = k\pi$, $0 \leqslant \operatorname{Im}\theta(z) \leqslant h_k$ и отрезка $[k\pi, (k+1)\pi]$. И, наконец, когда z становится больше β_n, $P_n'(z) < 0$, $\arg\sqrt{1-P_n^2(z)} = \frac{\pi}{2} - n\pi$, а $\theta(z) = n\pi + i\operatorname{Im}\theta(z)$, где $\operatorname{Im}\theta(z) > 0$ и возрастает.

Таким образом, когда z пробегает в положительном направлении вещественную ось, функция $\theta(z)$ пробегает границу области $\Theta\{h_k\}$, взаимно-однозначно отображая ось x на границу $\Theta\{h_k\}$ и сохраняя направление обхода.

По теореме о соответствии границ, функция $\theta(z)$ конформно отображает верхнюю полуплоскость на $\Theta\{h_k\}$.

Формула (1.6) дает также представление $\theta(z) = \arccos P_n(z)$, откуда следует, что $P_n(z) = \cos\theta(z)$. Необходимость доказана.

Замечание. Конформное отображение $\theta(z)$ верхней полуплоскости на $\Theta\{h_k\}$, сохраняющее бесконечно удаленную точку, однозначно, если оно фиксировано условиями $\theta(\alpha_0) = 0$, $\theta(\beta_n) = n\pi$.

Достаточность. Как известно, функция, осуществляющая конформное отображение верхней полуплоскости на область $\Theta\{h_k\}$, переводящее бесконечно удаленную точку z-плоскости в бесконечно удаленную точку полуполосы θ-плоскости, а точки α_0 и β_n в 0 и $n\pi$ соответственно, задается интегралом Кристоффеля—Шварца

$$\theta(z) = ci \int\limits_{\alpha_0}^{z} \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1} (\xi - \gamma_k)\, d\xi}{\sqrt{(\xi - \alpha_0) \prod\limits_{k=1}^{n-1} (\xi - \alpha_k)(\xi - \beta_k)(\xi - \beta_n)}}, \qquad (1.7)$$

где α_k, β_k являются прообразами точек $k\pi$, γ_k — точек $k\pi + ih_k$ $(k = 1, \ldots n-1)$ области $\Theta\{h_k\}$.

Функция $u(z) = \cos\theta(z)$ в верхней полуплоскости аналитична как суперпозиция аналитических функций. Когда z пробегает вещественную ось, $\theta(z)$ пробегает границу области $\Theta\{h_k\}$, притом вещественной части границы $\Theta\{h_k\}$ отвечают вещественные значения $\cos\theta(z)$.

Когда $\theta(z) = k\pi + il_k$, $\cos\theta(z) = (-1)^k \operatorname{ch} l_k$ $(k = 0, 1, \ldots n)$ тоже вещественен, т. е. функция $u(z)$ вещественна на границе верхней полуплоскости. Продолжим ее в нижнюю полуплоскость по формуле $u(z) = \overline{u(\overline{z})}$. Новая функция, которую назовем тоже $\cos\theta(z)$, будет аналитической во всей z-плоскости, а значит, целой.

Далее, $\theta(z) = ci \int\limits_{\alpha_0}^{z} \frac{R_{n-1}(\xi)}{\sqrt{R_{2n}(\xi)}}\, d\xi$, где $R_k(z)$ — многочлен степени k.

При $|z| \gg 1$ $\theta(z) \sim ci \int\limits^{z} \frac{\xi^{n-1}}{\xi^n}\, d\xi = ci \ln z$ и $u(z) = 0(z^c)$ ведет себя как степенная функция.

Отсюда и из того, что $u(z)$ — целая функция, заключаем, что она является многочленом степени c, где c — целое число.

Покажем теперь, что $c = n$, пересчитав корни многочлена $u(z)$. Функция $\theta(z)$ переводит $(n+1)$ точку α_k $(k = 0, 1, \ldots n-1)$, β_n вещественной оси в точки $k\pi$ $(k = 0, \ldots n)$ соответственно, следовательно, $\cos\theta(\alpha_k) = (-1)^k$ $(k = 0, \ldots n-1)$, $\cos\theta(\beta_n) = -1$, причем если $\cos\theta(\alpha_k) = +1$, то $\cos\theta(\alpha_{k+1}) = -1$, а так как между $k\pi$ и $(k+1)\pi$ находится только одна точка $k\pi + \frac{\pi}{2}$ $(k = 0, \ldots n-1)$, то функция $u(z)$ на вещественной оси n раз обращается в ноль. Значит, степень многочлена $u(z)$ не меньше n. Но комплексных корней у многочлена $u(z)$ нет.

Действительно, если бы точка $\tilde{z}$ была комплексным корнем функции $\cos\theta(z)$, то из того, что $\cos\theta(\tilde{z}) = 0$, следовало бы, что $\theta(\tilde{z}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Значит, точка $\tilde{z}$ должна была бы быть комплексным прообразом вещественной точки, а это противоречит тому факту, что вещественным θ отвечают вещественные z. Тот факт, что уравнение $u^2(z) = 1$ имеет $2n$ вещественных корня, следует из равенств $\cos\theta(\alpha_k) = (-1)^k$ $(k = 0, \ldots n-1)$, $\cos\theta(\beta_k) = (-1)^k$ $(k = 1, \ldots n)$.

Теорема доказана.

2. Обратная задача для периодической J-матрицы. Пусть имеется бесконечная периодическая J-матрица A вида (1) и $\mu_k^{\pm}$ $(k = 0, 1, \ldots n)$ — края зон ее спектра, ν_k $(k = 1, 2, \ldots n-1)$ — корни многочлена $P_{n-1}(z)$, построенного по этой матрице, $\sigma_k = \operatorname{sign} u_-(\nu_k)$ $(k = 1, \ldots n-1)$, где $u_-(z) = \frac{P_n(z) - Q_{n-1}(z)}{2}$.

Набор чисел $\mu_k^{\pm}$ $(k=0, \ldots n)$, ν_k, σ_k $(k=1, \ldots n-1)$ **(2.1)** называется спектральными данными рассматриваемой матрицы, и обратная задача состоит в восстановлении матрицы A по этим данным.

Заметим, что если последовательность $-\infty < \mu_0 < \mu_1^- \leqslant \mu_1^+ < < \mu_2^- \leqslant \mu_2^+ < \ldots < \mu_{n-1}^- \leqslant \mu_{n-1}^+ < \mu_n$ состоит из границ зон спектра матрицы A, то последовательность $0 < \mu_1^- - \mu_0 \leqslant \mu_1^+ - \mu_0 < \mu_2^- - \mu_0 \leqslant \mu_2^+ - \mu_0 < \ldots < \mu_n - \mu_0$ состоит из границ зон спектра матрицы $A - \mu_0 E$. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать $\mu_0 = 0$, а коэффициенты a_k матрицы A положительными.

Действительно, числа $\mu_{2k+1}^{\pm}$ $\left(k=0, \ldots \frac{n-1}{2}\right)$ являются собственными значениями антипериодической задачи $A\vec{y} = \mu\vec{y}$, $y_{-1} = -y_{n-1}$, $y_0 = -y_n$ для бесконечной периодической J-матрицы (1). Последняя легко сводится к задаче с конечной матрицей $A_3\vec{y} = \mu\vec{y}$, где $\vec{y} = (y_0, y_1, \ldots y_{n-1})$, а

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \ldots & & -b_{n-1} \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & \ldots & \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & 0 & \ldots \\ \hline & \ldots & 0 & b_{n-3} & a_{n-2} & b_{n-2} \\ -b_{n-1} & & \ldots & 0 & b_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix},$$

причем, если $\mu_0 = 0$, то A_3 положительно определена.

Свойство положительной определенности A_3, примененное к каноническому базису e_k $(k=1, \ldots n)$, дает $(A_3 e_k, e_k) = a_{k-1} > > 0$ $(k=1, \ldots n)$.

2.1. Алгоритм восстановления A. 1. Восстановим $u_+(z)$ по числам $\mu_k^{\pm}$ $(k=0, \ldots n)$. Так как $\mu_k^{\pm}$ являются корнями уравнения $u_+^2(z) - 1 = 0$, то

$$u_+(z) - 1 = c(z-\mu_0)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(z-\mu_{2k}^-)(z-\mu_{2k}^+),$$

$$\text{а } u_+(z) + 1 = c\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(z-\mu_{2k-1}^-)(z-\mu_{2k-1}^+)(z-\mu_n),$$

откуда следует тождество

$$2 = c\Big[-(z-\mu_0)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(z-\mu_{2k}^-)(z-\mu_{2k}^+) +$$

$$+\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(z-\mu_{2k-1}^-)(z-\mu_{2k-1}^+)(z-\mu_n)\Big],$$

из которого мы заключаем, что

$$c=\frac{2}{\left[\mu_0\prod\limits_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(\mu_{2k}^{-}\cdot\mu_{2k}^{+})-\mu_n\prod\limits_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(\mu_{2k-1}^{-}\cdot\mu_{2k-1}^{+})\right]}.$$

Следовательно,

$$u_+(z)=1+\frac{2}{\left[\mu_0\prod\limits_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(\mu_{2k}^{-}\cdot\mu_{2k}^{+})-\mu_n\prod\limits_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(\mu_{2k-1}^{-}\cdot\mu_{2k-1}^{+})\right]}\times$$

$$\times(z-\mu_0)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(z-\mu_{2k}^{-})(z-\mu_{2k}^{+}).$$

2. Числа ν_k вместе с σ_k дают нам возможность найти $Q_{n-1}(z)$. Функция $u_-(z)$, являющаяся как и $u_+(z)$ многочленом n-й степени, связана с последней соотношением

$$u_+^2(\nu_k)-u_-^2(\nu_k)=1\quad(k=1,\ \dots\ n-1). \tag{2.2}$$

Чтобы убедиться в этом, используем частный случай формулы (1.3) для периодической матрицы

$$P\ (z)\,Q_{n-1}(z)-Q_n(z)\,P_{n-1}(z)=1. \tag{2.3}$$

Положим в тождестве (2.3) $\mu=\nu_k$, тогда из равенства $u_+^2(z)-$ $-u_-^2(z)=P_n(z)\,Q_{n-1}(z)$ прямо следует соотношение (2.2), определяющее

$$u_-(\nu_k)=\sigma_k\sqrt{u_+^2(\nu_k)-1}\quad(k=1,\ \dots\ n-1). \tag{2.4}$$

Следовательно, по известным числам ν_k и σ_k $(k=1,\dots n-1)$ и многочлену $u_+(z)$ мы можем найти значения

$$Q_{n-1}(\nu_k)=u_+(\nu_k)-\sigma_k\sqrt{u_+^2(\nu_k)-1}\quad(k=1,\ \dots\ n-1), \tag{2.5}$$

а сам многочлен $(n-2)$-й степени $Q_{n-1}(z)$ восстанавливается по интерполяционной формуле Лагранжа

$$Q_{n-1}(z)=\sum_{k=1}^{n-1}Q_{n-1}(\nu_k)\frac{\omega_{n-1}(z)}{(z-\nu_k)\,\omega'_{n-1}(\nu_k)},\ \text{где}\ \omega_{n-1}(z)=\prod_{k=1}^{n-1}(z-\nu_k).$$

3. Зная $u_+(z)$ и $Q_{n-1}(z)$, находим

$$P_n(z)=2u_+(z)-Q_{n-1}(z). \tag{2.6}$$

4. По корням ν_k $(k=1,\ \dots\ n-1)$ многочлена $P_{n-1}(z)$ восстанавливаем также нормированный многочлен $\widehat{P}_{n-1}(z)=\prod\limits_{k=1}^{n-1}(z-\nu_k)$.

5. Перейдем теперь к восстановлению матрицы A по найденным многочленам $P_n(z)$ и $\widehat{P}_{n-1}(z)$. Для этого пронормируем многочлен $P_n(z)$, обозначив нормированный многочлен $\widehat{P}_n(z)$.

Обозначим также $\widehat{P}_k(z) = z^k + c_k^{k-1} z^{k-1} + \cdots + c_k^1 z + c_k^0$ нормированный многочлен $P_k(z)$. Многочлены $P_k(z)$ удовлетворяют системе уравнений

$$b_{k-1}P_{k-1}(z) + a_k P_k(z) + b_k P_{k+1}(z) = zP_k(z) \quad (k = n-1, \ldots 0) \tag{2.7}$$

с искомой матрицей A, притом $P_k(z) = \frac{1}{b_0 \ldots b_{k-1}} z^k + \cdots$.

Следовательно, многочлены $\widehat{P}_k(z)$ должны удовлетворять системе уравнений $b_{k-1}^2 \widehat{P}_{k-1}(z) + a_k \widehat{P}_k(z) + \widehat{P}_{k+1}(z) = z\widehat{P}_k(z)$ $(k = n-1, \ldots 0)$.

Выразим в k-м уравнении этой системы $\widehat{P}_{k-1}(z)$ через $\widehat{P}_k(z)$ и $\widehat{P}_{k+1}(z)$ и соберем коэффициенты при одинаковых степенях z, тогда

$$\widehat{P}_{k-1}(z) = \frac{1}{b_{k-1}^2} [z^k (c_k^{k-1} - c_{k+1}^k - a_k) + z^{k-1}(c_k^{k-2} - c_{k+1}^{k-1} - a_k c_k^{k-1}) + \ldots].$$

Из этого выражения, учитывая, что $\widehat{P}_{k-1}(z)$ является многочленом $(k-1)$-й степени со старшим коэффициентом, равным 1, мы определяем

$$a_k = c_k^{k-1} - c_{k+1}^k, \quad b_{k-1} = -\sqrt{c_k^{k-2} - a_k c_k^{k-1} - c_{k+1}^{k-1}} \tag{2.8}$$

и сам многочлен $\widehat{P}_{k-1} = z^{k-1} + c_{k-1}^{k-2} z^{k-2} + \cdots + c_{k-1}^0$.

Проведя этот процесс последовательно для $k = n-1, n-2, \ldots 0$, мы найдем коэффициенты a_k $(k = n-1, \ldots 0)$ и b_k $(k = n-2, \ldots 0)$. Коэффициент b_{n-1} находим, используя старший коэффициент многочлена $P_n(z)$, по формуле $b_{n-1} = (c_n^n \cdot b_0 \cdots b_{n-2})^{-1}$.

Найдя таким образом a_k и b_k $(k = 0, \ldots n-1)$ и учитывая свойство периодичности коэффициентов, мы восстанавливаем матрицу A.

Замечание. При восстановлении матрицы на ЭВМ удобнее алгоритм, использующий непрерывную дробь. В этом случае по корням ν_k $(k = 1, \ldots n-1)$ следует восстановить многочлен

$$P_{n-1}(z) = c_{n-1}^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (z - \nu_k).$$

Коэффициент c_{n-1}^{n-1} этого многочлена определяется через коэффициенты найденных ранее многочленов

$$Q_{n-1}(z) = -\frac{b_{n-1}}{b_0 b_1 \ldots b_{n-2}} z^{n-2} + \cdots = q_{n-1}^{n-2} z^{n-2} + \cdots$$

и

$$P_n(z)=\frac{1}{b_0\dots b_{n-1}}z^n+\dots=c_n^n z^n+\dots$$

по формулам

$$b_{n-1}^2=-\frac{q_{n-1}^{n-2}}{c_n^n},\quad c_{n-1}^{n-1}=c_n^n b_{n-1},$$

причем в качестве b_{n-1} мы выбираем $-\sqrt{b_{n-1}^2}$. Заменим теперь J-матрицу A системы (2.7) формальной непрерывной дробью. Для этого, разделив обе части $n-1$-го уравнения этой системы на $P_{n-1}(z)$, получим

$$b_{n-1}\frac{P_n(z)}{P_{n-1}(z)}=z-a_{n-1}-\frac{b_{n-2}P_{n-2}(z)}{P_{n-1}(z)}=z-a_{n-1}-\cfrac{b_{n-2}^2}{b_{n-2}\cfrac{P_{n-1}(z)}{P_{n-2}(z)}}.$$

При $k=n-2$ проделаем то же самое для $P_{n-1}(z)$ и $P_{n-2}(z)$ тогда

$$b_{n-2}\frac{P_{n-1}(z)}{P_{n-2}(z)}=z-a_{n-2}-\cfrac{b_{n-3}^2}{b_{n-3}\cfrac{P_{n-2}(z)}{P_{n-3}(z)}}.$$

Продолжив этот процесс последовательно до $k=0$, получим разложение $b_{n-1}\dfrac{P_n(z)}{P_{n-1}(z)}$ в непрерывную дробь

$$b_{n-1}\frac{P_n(z)}{P_{n-1}(z)}=(z-a_{n-1})-\cfrac{b_{n-2}^2}{(z-a_{n-2})-\cfrac{b_{n-3}^2}{(z-a_{n-3})-\cfrac{b_{n-4}^2}{(z-a_{n-4})-\dots-\cfrac{b_0^2}{z-a_0}}}}.$$

Следовательно, для того чтобы найти коэффициенты матрицы A, достаточно разложить отношение $\dfrac{b_{n-1}P_n(z)}{P_{n-1}(z)}$ в непрерывную дробь. В качестве b_k, как и прежде, будем брать $-\sqrt{b_k^2}$ $(k=n-2,\dots 0)$.

2.2. Свойства спектральных данных. В предыдущем разделе было установлено, что для восстановления J-матрицы A достаточно знать ее спектральные данные (2.1).

Рассмотрим теперь вопрос о том, какими свойствами должен обладать этот набор чисел, для того чтобы он был спектральным набором некоторой J-матрицы. Для этого представим данные (2.1) в следующей эквивалентной форме, считая $\mu_0=0$. Числа $\mu_k^{\pm}$ $(k=0,\dots n)$ определяют точки z-плоскости, являющиеся границей зон спектра матрицы A, при этом, как видно из формулы (2.2), $\nu_k \in [\mu_k^-, \mu_k^+]$ $(k = 1, \dots n-1)$.

Разрежем z-плоскость вдоль промежутков

$$(-\infty, 0], \ [\mu_k^-, \mu_k^+] \ (k = 1, \dots n-1), \ [\mu_n, \infty) \tag{2.9}$$

и поместим точку $\nu_k = (k = 1, \dots n-1)$ на верхний (нижний) берег разреза $[\mu_k^-, \mu_k^+]$, если $\sigma_k = +1\,(-1)$.

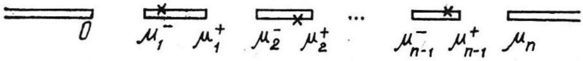

Рис. 3

Тогда данным (2.1) будет отвечать z-плоскость с разрезами (2.9) и отмеченными на ней точками ν_k $(k = 1, \dots n-1)$ (рис. 3).

Вместе с тем числа $\mu_k^\pm$ $(k = 0, \dots n)$ однозначно определяют многочлен $u_+(z)$, а следовательно, и функцию $\theta(z)$, конформно отображающую z-плоскость с разрезами (2.9) на область

$$\theta\{h_k\} = \{\theta : 0 < \operatorname{Re}\theta < n\pi\} \diagdown \bigcup_{k=1}^{n-1} \{\theta : \operatorname{Re}\theta = k\pi, \ -h_k \leqslant \operatorname{Im}\theta \leqslant h_k\}. \tag{2.10}$$

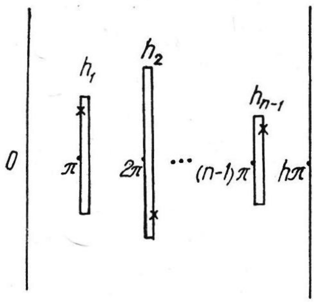

Рис. 4

При этом отображении точкам ν_k z-плоскости отвечают точки $\theta_k = k\pi + ih_k'$, $-h_k \leqslant h_k' \leqslant h_k$ области $\theta\{h_k\}$, которые попадают на верхнюю (нижнюю) часть разреза $[k\pi - ih_k, k\pi + ih_k]$, если ν_k находятся на верхнем (нижнем) береге разреза $[\mu_k^-, \mu_k^+]$ $(k = 1, \dots n-1)$ (рис. 4).

Будем в дальнейшем называть область $\Theta\{h_k\}$ с отмеченными на ней точками θ_k $(k = 1, \dots n-1)$ и точку μ_n спектральным набором матрицы A. Для восстановления матрицы A по этим данным определим $3(n-1)$ неизвестных величины $\mu_k^\pm$, γ_k $(k = 1, \dots n-1)$ из соотношений $\theta(\mu_k^\pm) = k\pi$, $\theta(\gamma_k) = k\pi + ih_k$ $(k = 1, \dots n-1)$, где

$$\theta(z) = n \int_0^z \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (\xi - \gamma_k)}{\sqrt{\xi \prod_{k=1}^{n-1} (\xi - \mu_k^-)(\xi - \mu_k^+)(\mu_n - \xi)}}\, d\xi.$$

Затем найдем ν_k $(k=1, \dots n-1)$ из системы уравнений $\theta(\nu_k) = k\pi + ih'_k$ $(k=1, \dots n-1)$ и, положив $\sigma_k = \operatorname{sign} h'_k$ $(k = 1, n-1)$, воспользуемся алгоритмом восстановления, описанным в разделе 2.1.

Пусть теперь область $\Theta\{h_k\}$ вида (2.10) и точка μ_n заданы произвольно. Выберем на одной из сторон каждого вертикального разреза $[k\pi - ih_k,\ k\pi + ih_k]$ этой области некоторую точку $\theta_k = k\pi + ih'_k$, $-h_k \leqslant h'_k \leqslant h_k$ $(k=1, \dots n-1)$. По этим данным определим описанным выше способом $\mu_k^{\pm}$, ν_k, σ_k $(k=1, \dots n-1)$, а затем и $u_{+(z)}^{(1)}$, $Q_{n-1}^{(1)}(z)$, $P_n^{(1)}(z)$, $\hat{P}_{n-1}^{(1)}(z)$.

Лемма 2.1. *Корни $\lambda_k^{(n)}$ $(k=1, \dots n)$ многочлена n-й степени $P_n^{(1)}(z)$ различны, вещественны и перемежаются с ν_k $(k=1, \dots n-1)$.*

Доказательство. Функция $P_n^{(1)}(z)$ является многочленом n-й степени в силу формулы (2.6). Многочлен $Q_{n-1}^{(1)}(z)$ восстанавливался по своим значениям (2.5) в точках ν_k $(k=1. \dots n-1)$, значит $P_n^{(1)}(\nu_k) = u_+^{(1)}(\nu_k) + \sigma_k \sqrt{u_+^{(1)2}(\nu_k) - 1}$ $(k=1, \dots n-1)$, откуда следует, что $[P_n^{(1)}(\nu_k) - u_+^{(1)}(\nu_k)]^2 = u_+^{(1)^2}(\nu_k) - 1$ или, что то же, $P_n^{(1)^2}(\nu_k) - 2P_n^{(1)}(\nu_k)\, u_+^{(1)}(\nu_k) + 1 = 0$ $(k=1, \dots n-1)$.

Определив из последнего равенства

$$u_+^{(1)}(\nu_k) = \frac{P_n^{(1)^2}(\nu_k) + 1}{2P_n^{(1)}(\nu_k)}, \tag{2.11}$$

заключаем, что

$$\operatorname{sign} u_+^{(1)}(\nu_k) = \operatorname{sign} P_n^{(1)}(\nu_k) \quad (k=1, \dots n-1). \tag{2.12}$$

Точки $\nu_k \in [\mu_k^-,\ \mu_k^+]$, значит $u_+^{(1)}(\nu_k)\, u_+^{(1)}(\nu_{k+1}) < 0$, а вместе с ними в силу (2.12) и $P_n^{(1)}(\nu_k)\, P_n^{(1)}(\nu_{k+1}) < 0$ $(k=1, \dots n-1)$, т. е. в каждом интервале (ν_k, ν_{k+1}) у многочлена $P_n^{(1)}(z)$ есть, по крайней мере, один корень $\lambda_k^{(n)}$ $(k=2, \dots n-1)$.

Кроме того, по построению $u_+^{(1)}(\mu_1^-) = -1$, а так как $\nu_1 \in [\mu_1^-,\ \mu_1^+]$, то $u_+^{(1)}(\nu_1) < -1$, значит $P_n^{(1)}(\nu_1) < 0$ **(2.13)**.

Подобные рассуждения, проведенные для ν_{n-1}, позволяют заключить, что $P_n^{(1)}(\nu_{n-1}) > 0$ **(2.14)**.

Но $u_+^{(1)}(z) \to \pm\infty$ при $z \to \mp\infty$, значит многочлен $P_n^{(1)}(z)$ в силу своего определения через $u_+^{(1)}(z)$ при $z \to \mp\infty$ ведет себя так же, что вместе с неравенствами (2.13) и (2.14) позволяет заключить, что у $P_n^{(1)}(z)$ есть корень левее ν_1 и правее ν_{n-1}. Других корней у $P_n^{(1)}(z)$ нет. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Наименьший корень $\lambda_1^{(n)}$ многочлена $P_n^{(1)}(z)$ положителен.*

Доказательство. Рассмотрев подобно тому, как в лемме 2.1, вопрос о расположении корней многочлена $Q_{n-1}^{(1)}(z)$, мы убеждаемся, что в каждом интервале (ν_k, ν_{k+1}) $(k = 1, \ldots n-2)$ у многочлена $Q_{n-1}^{(1)}(z)$ есть один корень и $\operatorname{sign} Q_{n-1}^{(1)}(\nu_k) = \operatorname{sign} u_+^{(1)}(\nu_k)$ $(k = 1, \ldots n-1)$ **(2.15)**.

Обозначим через α_1 самый левый корень $u_+^{(1)}(z)$. Так как $u_+^{(1)}(z) > 1$ при $z < 0$, а $u_+^{(1)}(\mu_1^-) = -1$, то $0 < \alpha_1 < \mu_1^-$. Но в силу (2.6) $P_n^{(1)}(\alpha_1) = -Q_{n-1}^{(1)}(\alpha_1)$, а согласно (2.12) и (2.15) $\operatorname{sign} P_n^{(1)}(\nu_1) = \operatorname{sign} u_+^{(1)}(\nu_1) = \operatorname{sign} Q_{n-1}^{(1)}(\nu_1)$ и это знак «—».

Учитывая, что левее ν_1 у $Q_{n-1}(z)$ корней нет, заключаем, что $Q_{n-1}^{(1)}(\alpha_1) < 0$, $P_n^{(1)}(\nu_1) < 0$, $P_n^{(1)}(\alpha_1) > 0$, т. е. между α_1 и ν_1 у $P_n^{(1)}(z)$ есть корень, и это $\lambda_1^{(n)}$. Значит, положение $\lambda_1^{(n)}$ следующее: $0 < \alpha_1 < \lambda_1^{(n)} < \nu_1$. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Многочлен k-й степени $P_k^{(1)}(z)$ имеет k различных вещественных корней, перемежающихся с корнями $P_{k+1}^{(1)}(z)$ $(k = 1, \ldots n-1)$.*

Доказательство следует из леммы 2.1 по индукции.

Перейдем далее, согласно алгоритму восстановления, к определению матрицы, которую назовем A_1.

Лемма 2.4. *Получающиеся в процессе восстановления элементы матрицы A_1 обладают следующими свойствами: $a_k > 0$ $(k = n-1, \ldots 0)$, $b_k^2 > 0$ $(k = n-2, \ldots 0)$, $b_{n-1} > 0$.*

Доказательство. Воспользуемся соотношением между корнями многочленов и их коэффициентами, согласно которому у многочлена $\hat{P}_k(z) = z^k + c_k^{k-1} z^{k-1} + \cdots + c_k^1 z + c_k^0$ с корнями $\lambda_i^{(k)}$ $(i = 1, \ldots k)$; $c_k^{k-1} = -\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i^{(k)}$, $c_k^{k-2} = \sum\limits_{\substack{i \neq j \\ i, j=1}}^{k} \lambda_i^{(k)} \lambda_j^{(k)}$.

Тогда для a_k $(k = n-1, \ldots 0)$ в силу (2.8) получим

$$a_k = -\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{(k)} + \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{i+1}^{(k+1)} - \lambda_i^{(k)}) + \lambda_1^{(k+1)}.$$

Свойство $a_k > 0$ следует из лемм 2.2 и 2.3. Из формулы (2.8) следует также, что

$$b_{k-1}^2 = c_k^{k-2} + (c_{k+1}^k - c_k^{k-1})\, c_k^{k-1} - c_{k+1}^{k-1} =$$

$$= \sum_{\substack{i \neq j \\ i, j=1}}^{k} \lambda_i^{(k)} \lambda_j^{(k)} - \Big(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{(k)}\Big)^2 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{(k)} \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i^{(k+1)} - \sum_{\substack{i \neq j \\ i, j=1}}^{k+1} \lambda_i^{(k+1)} \lambda_j^{(k+1)}.$$

Упростим первые две суммы, тогда

$$b_{k-1}^2 = -\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i^{(k)})^2 \sum_{\substack{i \neq j \\ i, j=1}}^{k} \lambda_i^{(k)} \lambda_j^{(k)} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{(k)} \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i^{(k+1)} -$$

$$- \sum_{i<j}^{k+1} \lambda_i^{(k+1)} \lambda_j^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{k} \Big[(\lambda_j^{(k)} - \lambda_j^{(k+1)}) \sum_{i=j}^{k} (\lambda_{i+1}^{(k+1)} - \lambda_i^{(k)})\Big].$$

Последнее равенство легко проверяется поэлементно.

Учитывая перемежаемость корней $\lambda_i^{(k+1)}$ $(i=1, \ldots k+1)$ и $\lambda_i^{(k)}$ $(i=1, \ldots k)$, получаем $b_{k-1}^2>0$ $(k=n-1, \ldots 0)$. Элемент $b_{n-1}=(c_n^n b_0 \ldots b_{n-2})^{-1}$.

В лемме 2.1 показано, что $P_n^{(1)}(z)\to\pm\infty$, $z\to\mp\infty$, значит $c_n^n<0$. Отсюда и из $b_k<0$ $(k=0, \ldots n-2)$ заключаем, что $b_{n-1}<0$, и все утверждения леммы доказаны.

Нам осталось показать, что данные $\mu_k^{\pm}$ $(k=0, \ldots n)$, ν_k, σ_k $(k=1, \ldots n-1)$, полученные в процессе восстановления, являются спектральными данными A_1, тем самым будет установлена единственность этой матрицы.

Замечание. Так как точки θ_k $(k=1, \ldots n-1)$ выбирались нами на разрезах области $\Theta\{h_k\}$ произвольно, мы таким способом можем найти все матрицы с заданными краями зон спектра.

Решим прямую задачу, обозначив фундаментальную систему решений уравнения $A_1\vec{y}=z\vec{y}$ через $\{P_k(z)\}$ и $\{Q_k(z)\}$ $(k=0, 1, \ldots)$.

Лемма 2.5. *Спектр матрицы A_1 совпадает с $S=\bigcup\limits_{k=0}^{n-1}[\mu_k^+, \mu_{k+1}^-]$, корни $P_{n-1}(z)$ совпадают с ν_k $(k=1, \ldots n-1)$, $\operatorname{sign} u_-(\nu_k)$ совпадают с σ_k $(k=1, \ldots n-1)$.*

Доказательство. Многочлены $P_k(z)\equiv P_k^{(1)}(z)$ $(k=0, \ldots n)$ (**2.16**), так как удовлетворяют системам уравнений с одинаковыми матрицами и имеют одинаковые начальные значения. Значит, корни $P_{n-1}^{(1)}(z)$ и $P_{n-1}(z)$ совпадают, и это ν_k $(k=1, \ldots n-1)$. Покажем теперь, что $u_{\pm}(z)\equiv u_{\pm}^{(1)}(z)$.

По построению A_1 периодическая J-матрица, следовательно, для $Q_k(z)$ и $P_k(z)$ $(k=n, n-1)$ справедливо тождество (2.3).

Положим в (2.3) $z=\nu_k$ $(k=1, \ldots n-1)$, тогда $Q_{n-1}(\nu_k)=\frac{1}{P_n(\nu_k)}$ и

$$u_+(\nu_k)=\frac{P_n(\nu_k)+\frac{1}{P_n(\nu_k)}}{2} \quad (k=1, \ldots n-1). \tag{2.17}$$

Многочлен $P_n^{(1)}(z)$ определялся по формуле (2.6), т. е.

$$u_+^{(1)}(z)=\frac{P_n^{(1)}(z)+Q_{n-1}^{(1)}(z)}{2}$$

и в точках ν_k $(k=1, \ldots n-1)$ в силу (2.11) принимал значения

$$u_+^{(1)}(\nu_k)=\frac{P_n^{(1)}(\nu_k)+\frac{1}{P_n^{(1)}(\nu_k)}}{2}.$$

Отсюда и из (2.17) заключаем, что $u_+(\nu_k) = u_+^{(1)}(\nu_k)$ $(k = 1, \ldots n-1)$ **(2.18)**. Но $u_-(\nu_k) = u_-^{(1)}(\nu_k)$ $(k = 1, \ldots n-1)$ **(2.19)** также. Действительно, по определению функций $u_\pm(z)$ и $u_\pm^{(1)}(z)$ $P_n(z) = u_+(z) + u_-(z)$, $P_n^{(1)}(z) = u_+^{(1)}(z) + u_-^{(1)}(z)$.

Следовательно, $P_n(\nu_k) = u_+(\nu_k) + u_-(\nu_k)$, $P_n^{(1)}(\nu_k) = u_+^{(1)}(\nu_k) + u_-^{(1)}(\nu_k)$ $(k = 1, \ldots n-1)$, что вместе с (2.16) и (2.18) дает (2.19). Функции $u_\pm(z)$ и $u_\pm^{(1)}(z)$ определяют также $Q_{n-1}(z) = u_+(z) - u_-(z)$, $Q_{n-1}^{(1)}(z) = u_+^{(1)}(z) - u_-^{(1)}(z)$.

Отсюда и из равенств (2.18), (2.19) следует, что $Q_{n-1}(z) \equiv Q_{n-1}^{(1)}(z)$, а вместе с ними в силу (2.16) и $u_+(z) \equiv u_\pm^{(1)}(z)$.

Из последнего тождества следуют все остальные утверждения леммы.

Теорема 2.1. *Для того, чтобы последовательность* $0 < \mu_1^- \leqslant \leqslant \mu_1^+ < \mu_2^- \leqslant \mu_2^+ < \cdots < \mu_{n-1}^- \leqslant \mu_{n-1}^+ < \mu_n$ *состояла из границ зон спектра оператора, порожденного бесконечной периодической J-матрицей A, необходимо и достаточно, чтобы она задавалась формулой* $\mu_k^\pm = z(k\pi \pm 0)$ $(k = 0, \ldots n)$, *где* $z(\theta)$ — *функция, осуществляющая конформное отображение области* $\theta\{h_k\}$ *вида* (см. рис. 1) *на верхнюю полуплоскость, переводящее бесконечно удаленную точку полуполосы θ-плоскости в бесконечно удаленную точку z-плоскости.*

Доказательство необходимости этих условий проведено в теореме 1.1, а достаточность следует из алгоритма восстановления и лемм 2.1—2.5.

Рассмотрим якобиевы матрицы

$$A^\pm = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{-1}^\pm & a_0 & b_0^\pm & & & & \\ & b_0^\pm & a_1 & b_1^\pm & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & b_{k-1}^\pm & a_k & b_k^\pm & & & \end{pmatrix},$$

у которых $a_{k+n} = a_k > 0$, $b_{k+n}^+ = b_k^+ > 0$, $b_{k+n}^- = b_k^- < 0$ соответственно.

При восстановлении матрицы мы выбирали $b_k < 0$, т. е. в качестве A рассматривали матрицу A^- как отвечающую физическому смыслу исходной задачи.

Лемма 2.6. *Многочлены* $P_k^\pm(z)$ *и* $Q_k^\pm(z)$, *построенные для матриц* $A^\pm$ *соответственно, совпадают с точностью до знака, при этом* $P_k^+(z) = (-1)^k P_k^-(z)$ $(k = 0, 1, \ldots)$, $Q_k^+(z) = (-1)^{k+1} Q_k^-(z)$ $(k = -1, 0, \ldots)$.

Доказательство. Многочлены $P_k^\pm(z)$ $(k = 1, \ldots)$ являются решениями систем уравнений $A^\pm \vec{P}^\pm = z\vec{P}^\pm$ соответственно, отвечающими начальным значениям $P_{-1}^{\pm}(z)=0$, $P_0^{\pm}(z)=1$ и строятся по формулам

$$P_k^{\pm}(z)=\frac{z-a_{k-1}}{b_{k-1}^{\pm}}P_{k-1}^{\pm}(z)-\frac{b_{k-2}^{\pm}}{b_{k-1}^{\pm}}P_{k-2}^{\pm}(z)\ (k=1,\,2,\,\dots).$$

Поэтому для P_k^+ $(k=1,\,2)$ имеем

$$P_1^+(z)=\frac{z-a_0}{b_0^+}=\frac{z-a_0}{-b_0^-}=-P_1^-(z),\ P_2^+(z)=$$

$$=\frac{z-a_1}{b_1^+}P_1^+(z)-\frac{b_0^+}{b_1^+}P_0^+(z)=\frac{z-a_1}{b_1^-}P_1^-(z)-\frac{b_0^-}{b_1^-}P_0^-(z)=P_2^-(z)\cdot$$

Положив $P_i^+(z)=(-1)^iP_i^-(z)$ при $i=k-2,\ k-1$, для $i=k$ получим

$$P_k^+(z)=\frac{z-a_{k-1}}{b_{k-1}^+}P_{k-1}^+(z)-\frac{b_{k-2}^+}{b_{k-1}^+}P_{k-2}^+(z)=$$

$$=\frac{z-a_{k-1}}{b_{k-1}^-}(-1)^kP_{k-1}^-(z)-\frac{b_{k-2}^-}{b_{k-1}^-}(-1)^{k-2}P_{k-2}^-(z)=(-1)^kP_k^-(z).$$

Отсюда заключаем, что $P_k^+(z)=(-1)^kP_k^-(z)$ при всех $k=0,\,1,\,\dots$.

Проделав то же самое для многочленов $Q_k^{\pm}(z)$ $(k=1,\,\dots)$, получим второе утверждение леммы.

Следствие 2.5.

$$u_+^{\pm}(z)=-u_+^{\mp}(z),\quad u_-^{\pm}(z)=-u_-^{\mp}(z). \tag{2.20}$$

Теорема 2.2. *Границы зон спектра матриц A^+ и A^- совпадают.*

Доказательство теоремы следует из того факта, что границы зон спектра матриц $A^{\pm}$ являются корнями уравнений $u_+^{\pm 2}(z)-1=0$ соответственно и следствия 2.5.

Отметим также, что если набор $\mu_k^{\pm}$ $(k=0,\,1,\,\dots\,n)$, ν_k, σ_k $(k=1,\,\dots\,n-1)$ отвечает матрице A^-, то в силу леммы 2.5 и равенств (2.20) спектральными данными матрицы A^+ являются числа $\mu_k^{\pm}$ $(k=0,\,\dots\,n)$, ν_k, $-\sigma_k$ $(k=1,\,\dots\,n-1)$, если же спектральные данные A^- представлены в виде области $\Theta\{h_k\}$ вида (2.10) с отмеченными на ней точками $\theta_k^-=k\pi+ih_k'$ $(k=1,\,\dots\,n-1)$, то матрице A^+ отвечает та же область $\Theta\{h_k\}$, а точки $\theta_k^+=k\pi-ih_k'$ $(k=1,\,\dots\,n-1)$.

Список литературы; 1. *Марченко В. А.* Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения.— К.: Наук. думка, 1977.— 329 с.
2. *Марченко В. А., Островский И. В.* Характеристика спектра оператора Хилла.— Мат. сб., 1975, **97**, вып. 4, с. 540—606.
3. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов.— М.: Физматгиз, 1961.— 310 с.

Поступила в редколлегию 10.11.82.