УДК 513.88

М. И. ОСТРОВСКИЙ

О СВОЙСТВАХ РАСТВОРА И СВЯЗАННЫХ С НИМ ХАРАКТЕРИСТИК БЛИЗОСТИ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

1. Пусть X и Y — замкнутые подпространства банахова пространства Z, $S(X)$ и $S(Y)$ — их единичные сферы. Раствором X и Y называется [6] величина

$$\theta(X, Y) = \max\{\sup_{x\in S(X)} \operatorname{dist}(x, Y), \sup_{y\in S(Y)} \operatorname{dist}(y, X)\}.$$

Это понятие имеет применения в теории операторов (см. [1, 5]). Раствор θ не является метрикой, так как не выполнено неравенство треугольника. В связи с этим в работах [2, 3] вводились следующие модификации раствора:

$$\tilde{\theta}(X, Y) = \max\{\sup_{x\in S(X)} \operatorname{dist}(x, S(Y)), \sup_{y\in S(Y)} \operatorname{dist}(y, S(X))\},$$

$$\hat{\theta}(X, Y) = \max\{\sup_{x\in S(X)} \operatorname{dist}(x, B(Y)), \sup_{y\in S(Y)} \operatorname{dist}(y, B(X))\},$$

где $B(X)$, $B(Y)$ — замкнутые единичные шары X и Y. Эти модификации уже являются метриками, и по ним множество всех подпространств данного пространства полно [2, 3]. Растворы θ, $\tilde{\theta}$, $\hat{\theta}$ изучались в [4], где с их помощью введен ряд величин, характеризующих близость банаховых пространств. Положим $d_i(X, Y) = \inf\limits_G \inf\limits_{U,V} \theta(UX, VY)$, $i = 0{,}1$, где при $i = 0$ (при $i = 1$) G пробегает класс всех банаховых пространств, содержащих подпространства, изометричные (изоморфные) X и Y, а U и V — множество всех изометричных (изоморфных) вложений X и Y в G. Аналогично по $\tilde{\theta}$ и $\hat{\theta}$ определяются $\tilde{d}_0$, $\tilde{d}_1$, $\hat{d}_0$, $\hat{d}_1$. Целью настоящей работы является изучение свойств приведенных выше характеристик близости банаховых пространств. Сформулируем основные результаты.

Теорема. 1. *Величина* $\hat{d}_0$ *обладает свойствами: а)* $\hat{d}_0(X, Y) \leqslant \hat{d}_0(X, Z) + \hat{d}_0(Z, Y)$; б) $\hat{d}_0(X_n, X_m) \to 0$ $(n, m \to \infty) \Rightarrow \exists X$; $\hat{d}_0(X_n, X) \to 0$ $(n \to \infty)$; *в) существуют неизоморфные* X *и* Y, *для которых* $\hat{d}_0(X, Y) = 0$. *Иначе говоря,* $\hat{d}_0$ — *полная квазиметрика.*

Теорема 2. *Если* X *рефлексивно, а* Y *не рефлексивно, то* $d_1(X, Y) \geqslant 1/2$.

Напомним, что пространство называется суперрефлексивным, если оно изоморфно равномерно выпуклому (это одно из эквивалентных определений). Пространство называется B-выпуклым, если $\sup\limits_n \inf \{d(l_1^n, Y) : Y \subset X, \ \dim Y = n\} = \infty$, где d — дистанция Банаха—Мазура. Каждое суперрефлексивное пространство B-выпукло, обратное неверно.

Теорема 3. *Если* X *суперрефлексивно, а* Y *не суперрефлексивно, то* $d_1(X, Y) = 1$.

Теорема 4. *Если* X *является, а* Y *не является* B*-выпуклым, то* $d_1(X, Y) = 1$.

Замечание. Ясно, что $1 \geqslant d_0 \geqslant d_1$, $2 \geqslant \tilde{d}_0 \geqslant \tilde{d}_1$, $1 \geqslant \hat{d}_0 \geqslant \hat{d}_1$. В силу известных неравенств между растворами [2, 3] имеем $2d_i \geqslant \tilde{d}_i \geqslant d_i$, $2\hat{d}_i \geqslant \tilde{d}_i \geqslant \hat{d}_i$, $2d_i \geqslant \hat{d}_i \geqslant d_i$. Мы не будем формулировать следствия наших результатов, непосредственно получаемые с помощью этих неравенств. Отметим также, что теорему, аналогичную теореме 1, можно доказать и для $\tilde{d}_0$.

В работе будут получены также некоторые уточнения и дополнения известных результатов о растворах. В частности, будет дан отрицательный ответ на следующий вопрос М. Г. Крейна, М. А. Красносельского и Д. П. Мильмана (см. [6, с. 104]). Имеет ли место для бесконечномерных пространств X и Y следующая импликация: $(\theta(X, Y) < 1) \Rightarrow (\dim X = \dim Y)$? (Размерностью бесконечномерного пространства называется минимальная мощность всюду плотного множества).

2. Доказательство теоремы 1. а) Пусть $U_1: X \to G_1$; $V_1: Z \to G_1$; $U_2: Z \to G_2$; $V_2: Y \to G_2$ — такие изометричные вложения, что $\theta(U_1X, V_1Z) \leqslant \hat{d}_0(X, Z) + \varepsilon$, $\hat{\theta}(U_2Z, V_2Y) \leqslant \hat{d}_0(Z, Y) + \varepsilon$. Рассмотрим фактор-пространство $G = (G_1 \oplus G_2)_1/M$, где M — подпространство в $(V_1Z \oplus U_2Z)_1$, заданное так: $M = \{(a, b): V_1^{-1}a = U_2^{-1}b\}$ (по поводу определения прямых сумм, используемых здесь и в дальнейшем, см., например, [8.1], с. xii). Фактор-отображение обозначим F. Заметим, что FU_1, FV_1, FV_2 — изометричные вложения соответственно X, Z и Y в G, при этом $\hat{\theta}(FU_1X, FV_1Z) = \hat{\theta}(U_1X, V_1Z)$, $\hat{\theta}(FV_1Z, FV_2Y) = \hat{\theta}(U_2Z, V_2Y)$. Воспользовавшись неравенством треугольника для $\hat{\theta}$, имеем $\hat{\theta}(FU_1X, FV_2Y) \leqslant \hat{d}_0(X, Z) + \hat{d}_0(Z, Y) + 2\varepsilon$. Устремляя ε к нулю, получим неравенство а).

б) Выберем в $\{X_n\}$ подпоследовательность такую, что $\hat{d}_0(X_{n_i}, X_{n_{i+1}}) \leqslant 1/2^i$, и обозначим ее снова $\{X_n\}$. Пусть $U_n: X_n \to G_n$, $V_n: X_{n+1} \to G_n$ — изометричные вложения такие, что $\hat{\theta}(U_nX_n, V_nX_{n+1}) \leqslant 1/2^{n-1}$. Рассмотрим факторпространство $G = (\sum \oplus G_i)_1/ /M$, где $M = [M_i]_{i=1}^{\infty}$ (квадратные скобки здесь и в дальнейшем означают замыкание линейной оболочки), а $M_i = \{(0, \ldots, 0, a, b, 0, \ldots)\}$, где $a \in V_iX_{i+1}$ стоит на i-м, $b \in U_{i+1}X_{i+1}$ на $(i+1)$-м месте и $U_{i+1}^{-1}b = V_i^{-1}a$. Обозначим через F соответствующее фактор-отображение. Тогда FU_j — изометричные вложения X_j в G, при этом $\hat{\theta}(FU_jX_j, FU_{j+1}X_{j+1}) \leqslant 1/2^{j-1}$. Воспользовавшись полнотой по $\hat{\theta}$, получим существование $X \subset G$ такого, что $\hat{\theta}(FU_jX_j, X) \to 0$. При этом, очевидно, имеем $\hat{d}_0(X_j, X) \to 0$. Применив неравенство треугольника для тех X_k, которые не попали в подпоследовательность, получим б).

Нам понадобится следующее обобщение результата [4], получаемое близким методом.

Предложение 1. *Если $p > 1$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon, p) > 0$, что из $|r - p| < \delta(\varepsilon, p)$ следует $\tilde{d}_0(l_p, l_r) < \varepsilon$.*

Доказательство. Рассмотрим отображения $A: S(l_p) \to S(l_r)$; $B: S(l_q) \to S(l_s)$, $(1/p + 1/q = 1,\ 1/r + 1/s = 1)$, определенные равенствами: $A(\{x_i\}) = \{|x_i|^{p/r}\operatorname{sign} x_i\}$, $B(\{y_i\}) = \{|y_i|^{q/s} \times \operatorname{sign} y_i\}$. Введем в алгебраической сумме $l_p \oplus l_r$ следующую норму: $\|(x, y)\| = \sup\{|\langle x, z\rangle + \langle y, Bz\rangle|,\ z \in S(l_q)\}$. Ясно, что канонические образы l_p и l_r изометричны l_p и l_r соответственно. Оценим $\tilde{d}_0(l_p, l_r)$. Ясно, что $\tilde{d}_0(l_p, l_r) \leqslant \sup\{\|(x, -Ax)\|: x \in S(l_p)\} = \sup\{|\langle x, y\rangle - \langle Ax, By\rangle|: x \in S(l_p),\ y \in S(l_q)\}$. Оценим величину $|\langle x, y\rangle - \langle Ax, By\rangle| = |\sum_{i=1}^{\infty} x_iy_i - \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{p/r}|y_i|^{q/s}\operatorname{sign} x_i \times \operatorname{sign} y_i|$. Рассмотрим случай $p \geqslant 2$, $r \geqslant 2$. Имеем $|\langle x, y\rangle - \langle Ax, By\rangle| \leqslant$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} (|x_i|^{p/r} |y_i| \, \| x_i|^{1-p/r} - |y_i|^{q/s-1}|) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{p/r} |y_i| \, \| x_i|^{(r-p)/r} -$$

$$- |y_i|^{(r-p)/((p-1)r)} | \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{p/r} |y_i| \, |(r-p)/r| \max \{ |x_i|^{(r-p)/r-1};$$

$$|y_i|^{1/(p-1)((r-p)/r-1)} \} \, \| x_i| - |y_i|^{1/(p-1)}| \leqslant \frac{|r-p|}{r} \sum_{i=1}^{\infty} \max\{|y_i|; \ |x_i|^{p/r} \times$$

$$\times |y_i|^{1-q/r}\} \, \| x_i| - |y_i|^{q/p}| \leqslant \frac{|r-p|}{r} \sum_{i=1}^{\infty} \| x_i| - |y_i|^{q/p}| \ (|x_i|^{p/q} + |y_i|) \leqslant$$

$\leqslant (|r-p|/r) \ \| \{ \| x_i| - |y_i|^{q/p} | \} \|_p \| \{ |x_i|^{p/q} + |y_i| \} \|_q \leqslant 4 |r-p|/r$ (так как $p \geqslant 2$, $r \geqslant 2$, то $1 - q/r \geqslant 0$, и поэтому $\max \{ |y_i|, |x_i|^{p/r} |y_i|^{1-q/r} \} \leqslant |y_i| + |x_i|^{p/q}$). Таким образом, $\tilde{d}_0 (l_p, l_r) \leqslant 4 |r-p|/r$. В случае $p \leqslant 2$, $r \leqslant 2$ записываем $|\langle x, y\rangle - \langle Ax, By\rangle| \leqslant$ $\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| |y_i|^{q/s} | |y_i|^{1-q/s} - |x_i|^{p/r-1}|$ и, проводя аналогичную выкладку, получаем $\tilde{d}_0 (l_p, l_r) \leqslant 4 |q-s|/s$. Так как при $p > 1$ близость r к p равносильна близости s к q, то предложение доказано.

Перейдем к построению пространств X и Y, существование которых утверждается в в). Пусть $\{p_n\}$, $\{r_n\}$ — счетные плотные подмножества отрезка $\{2 \leqslant a \leqslant 3\}$, причем $2 \in \{r_n\}$ и $2 \notin \{p_n\}$. Пусть $X = (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus l_{r_n})_3$ $Y = (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus l_{p_n})_3$ — прямые суммы по l_3. Сначала докажем $\tilde{d}_0 (X, Y) = 0$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и последовательность $h_j > 0$ такую, что $\Sigma h_j^3 < \varepsilon^3$. В силу предложения 1 последовательности $\{p_n\}$, $\{r_n\}$ можно перенумеровать так, что $\hat{d}_0 (l_{p_j}, l_{r_j}) < h_j$. Пусть $\psi_j : l_{p_j} \to G_j$, $\varphi_j : l_{r_j} \to G_j$ — изометричные вложения такие, что $\hat{\theta} (\varphi_j (l_{r_j}), \ \psi_j (l_{p_j})) < h_j$. Рассмотрим прямую сумму $G = (\sum_{j=1}^{\infty} \oplus G_j)_3$ и естественные вложения $\varphi : X \to G$; $\psi : Y \to G$. Ясно, что $\theta (\varphi (X), \ \psi (Y)) < \varepsilon$ и, следовательно, $\hat{d}_0 (X, Y) = 0$.

Перейдем к доказательству неизоморфности X и Y. Для этого покажем, что любой оператор из Y в l_2 компактен. Предположим противное. Тогда существует оператор $Q : Y \to l_2$ и слабо сходящаяся к нулю, а следовательно, и ограниченная, последовательность $\{x_n\} \subset Y$ такая, что $\| Qx_n \| > 2\varepsilon$. Каждый вектор из Y можно записать в виде бесконечной матрицы, i-й столбец которой дает координатную запись проекции вектора на l_{p_i}. Носителем вектора $x \in Y$ будем называть множество пар (l, j), для которых $(x)_{ij} \neq 0$, финитными — векторы с конечными носителями. Каждый вектор из последовательности $\{x_n\}$ можно считать финитным, а их носители непересекающимися. Запишем $x_n = (x_n)_{p_1} +$

$+\ldots+(x_n)_{p_{i(n)}}$, где через $(x_n)_{p_i}$ обозначена проекция x_n на l_{p_i}. Переходя при необходимости к подпоследовательности, можно считать, что последовательность норм $\|(x_n)_{p_1}\|$ сходится. Если эта последовательность сходится к нулю, то заменим последовательность $\{x_n\}$ другой, которую обозначим $\{x_n^1\}$ и для которой $(x_n^1)_{p_1}=0$. Для новой последовательности (после, возможно, отбрасывания конечного числа членов и перенумерации) будем иметь $\|Qx_n^1\|>3\varepsilon/2$. Таким образом, мы построили последовательность $\{x_n^1\}$ такую, что $\|(x_n^1)_{p_1}\|$ либо сходится к положительному числу, либо состоит из нулей, и при этом $\|Qx_n^1\|>3\varepsilon/2$. Рассуждая аналогично, можем по $\{x_n^1\}$ построить последовательность $\{x_n^2\}$, для которой $\|(x_n^2)_{p_2}\|$ либо сходится к положительному числу, либо состоит из нулей, и при этом $\|Qx_n^2\|>5\varepsilon/4$. Продолжая процесс построения последовательностей неограниченно, получим $\{x_n^3\}$, $\{x_n^4\}$, ... Рассмотрим последовательность $\{x_n^n\}$. Имеем $\|Qx_n^n\|>\varepsilon$, и при каждом $i=1, 2, \ldots$ существует $\lim\limits_{n\to\infty}\|(x_n^n)_{p_i}\|=$ $=\alpha_i$, причем $\alpha_i=0$ тогда и только тогда, когда последовательность $\{(x_n^n)_{p_i}\}$ финитна (по n). Так как последовательность $\{x_n^n\}$ ограничена, то имеем $\Sigma\alpha_i^3<\infty$. Разложим каждый вектор x_n^n в сумму $x_{n_1}+x_{n_2}$ так, чтобы носители x_{n_1} и x_{n_2} содержались в носителе x_n^n, а x_{n_1} являлось той «частью» x_n^n, для которой либо $\alpha_k/2\leqslant\|(x_{n_1})_{p_k}\|\leqslant 3\alpha_k/2$, либо $(x_{n_1})_{p_k}=0$. Тогда последовательности $(x_{n_2})_{p_k}$ финитны по n при всех $k=1, 2, \ldots$ и, при необходимости переходя к подпоследовательности, можем считать, что для любой числовой последовательности $\{s_n\}$ выполняется $\|\Sigma s_n x_{n_2}\|=$ $=(\Sigma|s_n|^3\|x_{n_2}\|^3)^{1/3}$.

Построим теперь последовательность $g_j>0$ так, чтобы ряд $\Sigma g_j x_j$ сходился, а ряд $\Sigma g_j Qx_j$ расходился. Заметим, что для расходимости $\Sigma g_j Qx_j$ достаточно, чтобы $\Sigma g_j^2=\infty$, так как последовательность $\{Qx_j\}$ можно считать эквивалентной ортонормированному базису l_2. Запишем $\Sigma g_j x_j=\Sigma g_j x_{j_1}+\Sigma g_j x_{j_2}$. Для сходимости второго ряда достаточно, чтобы $\Sigma g_j^3<\infty$. Для первого ряда имеем:

$$\left\|\sum_{n}^{m} g_j x_{j_1}\right\|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\left(\sum_{j=n}^{n} g_j^{p_i}\right)^{1/p_i}3\alpha_i/2\right\}^3\right)^{1/3}. \qquad (*)$$

Ряд $\Sigma\alpha_i^3$ сходится, следовательно, можно найти $a_i\to\infty$ такие, что и ряд $\Sigma(\alpha_i a_i)^3$ сходится. Воспользуемся следующей леммой, доказательство которой опустим.

Лемма 1. *Пусть $C>p_i>2$ и $b_i\to\infty$, $b_i\geqslant s>0$. Тогда существует последовательность $g_j>0$ такая, что $\sum\limits_{j=1}^{\infty} g_j^{p_i}<b_i$, $i=1, 2, \ldots$, но $\Sigma g_j^2=\infty$.*

Применив лемму с $b_i = a_i^{p_i}$, построим последовательность $\{g_j\}$ такую, что $(\sum_j g_j^{p_i})^{1/p_i} \leqslant a_i$, но $\sum g_j^2 = \infty$. Для этой последовательности правая часть (⋇) стремится к нулю при m, $n \to \infty$, так как выражение в фигурных скобках стремится к нулю при m, $n \to \infty$ и оценивается сверху величиной $3\alpha_i a_i/2$, $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i\alpha_i)^3 < < \infty$. Поэтому ряд $\Sigma g_j x_{j_1}$, а следовательно, и $\Sigma g_j x_j$ сходится. Тем самым утверждение в) доказано.

3. Доказательство теоремы 2. Пусть $d_1(X, Y) < 1/2 - \delta$. Тогда существуют изоморфные вложения $U: X \to Z$, $V: Y \to Z$ такие, что $\theta(UX, VY) < 1/2 - \delta$. Согласно теореме 3 из [7] в нерефлексивном пространстве VY для произвольного $0 < \varepsilon < 1$ существует последовательность $\{y_i\}$, содержащаяся в единичном шаре $B(VY)$ такая, что для всех k выполняется dist (conv $\{y_1, \ldots, y_k\}$, conv $\{y_{k+1}, \ldots\} \geqslant 1 - \varepsilon$. Пусть последовательность $\{x_i\} \subset UX$ такова, что $\| x_i - y_i \| \leqslant 1/2 - \delta$. Тогда dist (conv $\{x_1, \ldots, x_k\}$, conv $\{x_{k+1}, \ldots\}) \geqslant$ dist (conv $\{y_1, \ldots, y_k\}$, conv $\{y_{k+1}, \ldots\}) - 1 + + 2\delta \geqslant 2\delta - \varepsilon$. Выбрав ε так, чтобы $2\delta - \varepsilon > 0$, согласно другому утверждению теоремы 3 из [7] (примененному к последовательности $\{x_i/2\}$) получаем, что UX, а следовательно, и X нерефлексивны. Полученное противоречие доказывает теорему.

4. Доказательство теоремы 3. Пусть $d_1(X, Y) < 1 - \delta$. Тогда существуют изоморфные вложения $U: X \to Z$, $V: Y \to Z$ такие, что $\theta(UX, VY) < 1 - \delta$. Из известных результатов о суперрефлексивных пространствах (см. теорему 6 из [7]) следует, что в несуперрефлексивном пространстве VY для любого $0 < < \varepsilon < 2$ и для любого положительного целого m существует множество $\{y_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k} : 1 \leqslant k \leqslant m;\ \varepsilon_k = 1, 2\}$, содержащееся в единичном шаре $B(VY)$ такое, что $y_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k} = (y_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k 1} + y_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k 2})/2$, $\| y_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k 1} - y_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k 2} \| \geqslant 2 - \varepsilon$. Выберем $x_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m} \in UX$, $\varepsilon_i = 1, 2$ так, чтобы $\| y_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m} - x_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m} \| < 1 - \delta$. Определим $x_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k}$, $k < m$ по индукции как $x_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k} = (x_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k 1} + x_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k 2})/2$. При этом $\| y_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k} - - x_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k} \| < 1 - \delta$. Имеем: $\| x_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k 1} - x_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k 2} \| \geqslant \| y_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k 1} - y_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k 2} \| - - 2(1 - \delta) \geqslant 2\delta - \varepsilon$. Выберем ε так, чтобы $2\delta - \varepsilon > 0$. Тогда согласно другой части теоремы 6 из работы [7] (примененной к системе $\{x_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k}/2\}$) получим, что UX не суперрефлексивно. Полученное противоречие доказывает теорему.

5. Доказательство теоремы 4. Пусть $d_1(X, Y) < 1 - \delta$. Тогда существуют изоморфные вложения $U: X \to Z$, $V: Y \to Z$ такие, что $\theta(UX, VY) < 1 - \delta$. В силу того, что Y не B-выпукло и результата [8.II.I.E.4] для любого n и любого $\varepsilon > 0$ найдутся $e_1, \ldots, e_n \in S(VY)$ такие, что для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ выполняется $\Sigma |\alpha_i| / (1 + \varepsilon) \leqslant \| \Sigma \alpha_i e_i \| \leqslant \Sigma |\alpha_i|$. Так как $\theta(UX, VY) < < 1 - \delta$, то в UX можно найти $f_1, \ldots, f_n$ такие, что $\| f_i - e_i \| <$

$< 1-\delta$. Тогда $2\Sigma|\alpha_i| \geqslant \|\Sigma\alpha_i f_i\| \geqslant \|\Sigma\alpha_i e_i\| - \Sigma|\alpha_i|(1-\delta) \geqslant$ $\geqslant \Sigma|\alpha_i|(1/(1+\varepsilon)-(1-\delta))$. Выбрав ε так, чтобы $1/(1+\varepsilon)-$ $-(1-\delta)>0$, получим, что UX, а следовательно, и X не B-выпукло. Теорема доказана.

6. Дополнительные предложения о характеристиках близости.

Предложение 2. $\hat{d}_0(X, Y) \leqslant d(X, Y)-1$, *где d — дистанция Банаха—Мазура.*

Доказательство. Пусть $U: X \to Y$ — изоморфизм, $\|U\| =$ $= 1$, $\|U^{-1}\| \leqslant d(X, Y)+\varepsilon$. Рассмотрим в алгебраической сумме $X \oplus Y$ полунорму $p((x, y)) = \sup\{|y^*(y)+U^*y^*(x)/\|U^*y^*\||: y^* \in$ $\in Y^*,\ \|y^*\|=1\}$.
Профакторизируем $X \oplus Y$ по нуль-пространству этой полунормы. Пространства X и Y изометрично вложены в полученное нормированное пространство и $\hat{\theta}(X, Y) \leqslant \sup\{p((x, -Ux)),\ x \in X,\ \|x\| =$ $= 1\} \leqslant \sup\{\ |-y^*(Ux)+U^*y^*(x)/\|U^*y^*\||,\ \|x\|=1,\ \|y^*\|=1\} =$ $= \sup\{|y^*(Ux)|\,|-1+1/\|U^*y^*\||, \|x\|=1, \|y^*\|=1\} \leqslant \|(U^*)^{-1}\| -$ $-1 \leqslant d(X, Y)-1+\varepsilon$. Устремляя ε к 0, получаем доказываемое предложение.

Пусть X, Y — подпространства банахова пространства Z. Нам понадобятся следующие результаты (см. [1, теоремы 1.1, 6.1, 6.2, 6.4]):

А) $(\min(\dim Y, \dim X) < \infty,\ \theta(X, Y) < 1) \Rightarrow (\dim X = \dim Y)$;
Б) $(\theta(X, Y) < 1/2) \Rightarrow (\dim X = \dim Y)$;
В) $\theta(X, Y) = \theta(X^\perp, Y^\perp)$;
Г) $\theta(X, Y) < 1/2 \Rightarrow \dim(Z/X) = \dim(Z/Y)$.

Выведем из этих результатов некоторые предложения о характеристиках близости.

Предложение 3. $(\min(\dim X, \dim Y) < \infty,\ d_1(X, Y) < 1) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\dim X = \dim Y)$.

Предложение 4. $\dim X \neq \dim Y \Rightarrow d_1(X, Y) \geqslant 1/2$. Эти предложения непосредственно следуют из А и Б соответственно.

Предложение 5. $\dim X^* \neq \dim Y^* \Rightarrow d_1(X, Y) \geqslant 1/2$.

Доказательство. Пусть $d_1(X, Y) < 1/2$; $U: X \to G$, $V: Y \to$ $\to G$ — изоморфные вложения такие, что $\theta(UX, VY) < 1/2$. Тогда в силу В) $\theta((UX)^\perp, (VY)^\perp) < 1/2$, и применение Г) дает $\dim$ $(G^*/(UX)^\perp) = \dim(G^*/(VY)^\perp)$.

7. Некоторые результаты о растворах. Построим пример, показывающий, что ответ на вопрос из [6], приведенный нами в п. 1, — отрицательный.

Предложение 6. *Существуют пространство Z и его подпространства X и Y, Y — сепарабельное, а X — нет, такие, что* $\hat{\theta}(X, Y) \leqslant 5/6$.

Доказательство. Рассмотрим алгебраическую сумму:

$$Z = c_0([0, 1]) \oplus \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \oplus C(0,1)\Big)_1 \oplus \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \oplus C(0,1)\Big)_1$$

(обозначения см. [8.1]). Введем в Z норму:

$$\| (h_0, (h_i)_{i=1}^{\infty}, (g_j)_{j=1}^{\infty} \| = \max \left(\sum_{i=0}^{\infty} \| h_i - \frac{1}{2} g_{i+1} \|, \ \sum_{j=1}^{\infty} \| g_j - \frac{1}{2} h_{j+1} \| \right),$$

где все нормы в правой части — супремумы модуля на $[0,1]$. Ясно, что пространство $X = \{(h_0, (h_i)_{i=1}^{\infty}, (0)_{j=1}^{\infty})\}$ изометрично $c_0([0,1]) \oplus_1 (\sum_{i=1}^{\infty} \oplus C(0,1))_1$, а пространство $Y = \{(0, (0)_{i=1}^{\infty}, (g_j)_{j=1}^{\infty})\}$ изометрично $(\sum_{j=1}^{\infty} \oplus C(0,1))_1$. Ясно также, что Y сепарабельно, а X — нет. Оценим $\hat{\theta}(X, Y)$. Для этого достаточно оценить $\operatorname{dist}(\tilde{h}_i, B(Y))$, $\operatorname{dist}(\tilde{g}_j, B(X))$ для векторов $\tilde{h}_i \in S(X)$, $\tilde{g}_j \in S(Y)$ вида $\tilde{h}_0 = (h_0, (0)_{i=1}^{\infty}, (0)_{j=1}^{\infty})$; $\tilde{h}_i = (0, (0, \ldots, 0, h_i, 0, \ldots), (0)_{j=1}^{\infty})$, где h_i стоит на i-м месте; $\tilde{g}_j = (0, (0)_{i=1}^{\infty}, (0, \ldots, 0, g_j, 0, \ldots))$, где g_j стоит на j-м месте. Для всех таких векторов, кроме векторов вида $\tilde{h}_0$ и $\tilde{h}_1$, это делается одинаково. Проведем оценку для $\tilde{h}_2$. Рассмотрим вектор $f_2 = (0, (0)_{i=1}^{\infty}, (0, 0, (1/3) h_2, 0, \ldots)) \in B(Y)$. Имеем $\operatorname{dist}(\tilde{h}_2, B(Y)) \leqslant \| \tilde{h}_2 + f_2 \| \leqslant \max \{ \|(5/6) h_2\|, \|(1/3) h_2\| + \|(1/2) h_2\| \} = 5/6$. Для $\tilde{h}_1$ оценку получаем так же, она будет иметь вид: $\operatorname{dist}(\tilde{h}_1, B(Y)) \leqslant \max \{ \|(5/6) h_1\|, \|(1/3) h_1\| \}$. Проведем теперь оценку для $\tilde{h}_0$. Введем множество $A = \{x, |h_0(x)| \geqslant 1/3\}$. Это множество конечно. Определим функцию $g: A \to \mathbf{R}$ так: $g(x) = (1/3) \operatorname{sign}(h_0(x))$. Продолжим ее как непрерывную на весь отрезок так, чтобы $\sup \{ |g(x)| : x \in [0,1] \} = 1/3$. Тогда $\sup \{ | g(x) - h_0(x) | : x \in [0,1] \} = 2/3$. Рассмотрим вектор $z = (0, (0)_{i=1}^{\infty}, (2g, 0, \ldots))$. Имеем $\|z\| \leqslant 2/3$; $\operatorname{dist}(\tilde{h}_0, B(Y)) \leqslant \| \tilde{h}_0 + z \| \leqslant \max \{ \|h_0 - g\|, 2\|g\| \} = 2/3$. Следовательно, $\hat{\theta}(X, Y) \leqslant 5/6$. Предложение доказано.

Замечание. В предложении 6, как и в предложении 9, константу 5/6 можно несколько уменьшить, заменив ее на $2(\sqrt{2} - 1)$. Для этого нужно в соответствующих местах числа 1/2 и 1/3 заменить положительным корнем уравнения $a^2 + 2a - 1 = 0$.

Покажем, что если ввести некоторые дополнительные ограничения, то ответ на вопрос, поставленный в [6], становится положительным.

Определение. *Система векторов $\{x_i, i \in I\}$ (I — множество индексов произвольной мощности) в банаховом пространстве X называется безусловным монотонным обобщенным базисом, если:* а) *любой $x \in X$ единственным образом представим в виде безусловно сходящегося ряда $\sum_{i \in I} \alpha_i x_i$ ($\alpha_i \neq 0$ для не более чем счетного множества индексов, называемого носителем* *вектора* x); *б*) $\|\sum_{i\in A}\alpha_i x_i\| \leqslant \|\sum_{i\in B}\alpha_i x_i\|$, *если* $A\subset B$. По поводу пространств с таким базисом см. [9, § 17].

Предложение 7. *Если в пространстве* X, *имеющем безусловный монотонный обобщенный базис, для подпространств* Y *и* Z *имеем* $\theta(Y, Z)<1$, *то* $\dim Y = \dim Z$.

Лемма 2. *Пусть* X — *банахово пространство,* Y, Z — *его подпространства,* $\theta(Y, Z)<1$, *и пусть существует проектор* $P: X\to Y_1\supset Y$ *такой, что при* $x\in Z$ *выполняется* $\|(I-P)x\|\leqslant h(x)$, где $h(x)$ — расстояние x *до* Y *и* $\dim Y_1=\dim Y$. *Тогда* $\dim Z\leqslant \dim Y$.

Доказательство. Пусть $\dim Z \geqslant \dim Y$ и пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — подмножество в $S(Z)$ такое, что $\operatorname{card} A = \dim Z$ и при $\alpha\neq\beta$ имеем $\|x_\alpha - x_\beta\|>1-\varepsilon$. Так как $Px_\alpha\in Y_1$, то для любого $\delta>0$ существуют $\alpha\neq\beta$ такие, что $\|Px_\alpha - Px_\beta\|<\delta$. Обозначим $y=x_\alpha - x_\beta$. Имеем: $\|y\|>1-\varepsilon$, $\|Py\|<\delta$. Поэтому $\|y/\|y\| - P(y/\|y\|)\| > 1-\delta/(1-\varepsilon)$. Следовательно, $h(y/\|y\|)\geqslant 1-\delta/(1-\varepsilon)$. Так как δ можно взять сколько угодно малым, получаем противоречие с тем, что $\theta(Y, Z)<1$. Лемма доказана.

Доказательство предложения 7. Результат А позволяет рассматривать лишь случай, когда Y и Z бесконечномерны. В качестве Y_1 возьмем $[x_i]_{i\in H}$, где H — объединение носителей элементов из Y, P определим так: $P(\sum_{i\in A}\alpha_i x_i) = \sum_{i\in A\cap H}\alpha_i x_i$. Ясно, что так определенные P и Y_1 удовлетворяют условиям леммы 2 (именно в силу бесконечномерности Y). Следовательно, $\dim Z\leqslant \dim Y$. Поменяв Y и Z местами, аналогично рассуждая, получим $\dim Y\leqslant\dim Z$. Предложение доказано.

В связи с вопросом, приведенным в конце п. 1, докажем

Предложение 8. *Если в* $B(Z)$ *для любого* $\delta>0$ *найдется подмножество* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *с* $\operatorname{card} A=\dim Z$ *такое, что* $\|x_\alpha - x_\beta\|\geqslant 2-\delta$ *при* $\alpha\neq\beta$ *и* $\theta(Y, Z)<1$, *то* $\dim Y\geqslant \dim Z$.

Доказательство. Пусть $\theta(Y, Z)<1-\varepsilon$. Возьмем $\delta<2\varepsilon$ и выберем в $B(Z)$ подмножество $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\operatorname{card} A=\dim Z$, такое, что $\|x_\alpha-x_\beta\|\geqslant 2-\delta$ при $\alpha\neq\beta$. Выберем в Y элементы y_α такие, что $\|x_\alpha - y_\alpha\|\leqslant 1-\varepsilon$ (это можно сделать, так как $\theta(Y, Z)<1-\varepsilon$). Тогда $\|y_\alpha - y_\beta\|\geqslant \|x_\alpha - x_\beta\| - \|y_\alpha - x_\alpha\| - \|y_\beta - x_\beta\|\geqslant 2\varepsilon-\delta$ и, следовательно, $\dim Y\geqslant \operatorname{card} A$. Предложение доказано. Примерами пространств, удовлетворяющих его условиям, являются $l_1(\Gamma)$, $l_\infty(\Gamma)$.

В заключение уточним следующее утверждение работы [3, с. 195]:

Если в сепарабельном банаховом пространстве для подпространств P и Q $\theta(P, Q)<1$ и P изометрично l_1, то Q изоморфно P.

Таким образом, доказано лишь то, что при указанных условиях Q содержит подпространство, изоморфное l_1.

Покажем, что в приведенной формулировке утверждение не имеет места.

Предложение 9. *Существуют такие пространство X и подпространства P и Q в нем, что P изометрично l_1, Q не изоморфно l_1 и $\hat{\theta}(P, Q) < 1$.*

Доказательство. В алгебраической сумме $C = l_1 \oplus l_1$ введем норму:

$$\| ((a_i)_{i=1}^{\infty},\ (b_i)_{i=1}^{\infty}) \| = \max \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left| a_i - \frac{1}{2} b_{i+1} \right|,\ \sum_{i=1}^{\infty} \left| b_i - \frac{1}{2} a_{i+1} \right| \right\}.$$

Ясно, что подпространства $A = \{((a_i),\ (0))\}$, $B = \{((0),\ (b_i))\}$, $B' = \{((0), (b_i)),\ b_1 = 0\}$ изометричны l_1. Орты A будем обозначать e_i, а орты $B - f_i$. Покажем, что $\hat{\theta}(A,\ B) \leqslant 5/6$, $\hat{\theta}(A,\ B') \leqslant 5/6$. Поскольку A, B и B' изометричны l_1, то достаточно показать $\operatorname{dist}(e_i,\ B(B')) \leqslant 5/6$, $\operatorname{dist}(f_i,\ B(A)) \leqslant 5/6$. В самом деле, $\operatorname{dist}(e_i,$ $B(B')) \leqslant \| e_i - (-(1/3) f_{i+1}) \| \leqslant \max \left\{ \left(1 - \frac{1}{6}\right),\ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \right\} = 5/6$, второе неравенство доказывается аналогично. Рассмотрим теперь $X = (\sum_{i=1}^{\infty} \oplus C)_1$, $P = (\sum_{i=1}^{\infty} \oplus A)_1$, $T = (\sum_{i=1}^{\infty} \oplus B)_1$, $T' = (\sum_{i=1}^{\infty} \oplus B')_1$. Ясно, что P, T, T' изометричны l_1, $T = T' \oplus l_1$, $\hat{\theta}(T,\ P) \leqslant 5/6$, $\theta(T', P) \leqslant 5/6$. Следовательно, для любого Q, $T' \subset Q \subset T$ $\hat{\theta}(Q, P) \leqslant 5/6$. Но в l_1 существуют подпространства Z, ему не изоморфные (см., например, [8, II, с. 107]). Тогда вследствие теоремы 2.a.3 из [8, I] $Q = T' \oplus Z$ не изоморфно l_1. Предложение доказано. Но все же имеет место

Предложение 10. *Если P изометрично l_1 и $\hat{\theta}(P,\ Q) < 1/2$, то Q изоморфно l_1.*

Доказательство. Пусть $\hat{\theta}(P,\ Q) < 1/2 - \delta$. Обозначим $\{e_i\}$ — канонический базис в $P = l_1$, а векторы $\{f_i\} \subset Q$ возьмем такими, что $\| f_i \| \leqslant 1$, $\| f_i - e_i \| < 1/2 - \delta$. Тогда $\left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\right)(1/2 + \delta) \leqslant$ $\leqslant \| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$. Покажем, что $[f_i] = Q$. Пусть это не так. Тогда существует $h \in Q$, $\|h\| = 1$ такой, что $\operatorname{dist}(h,\ [f_i]) > 1 - 2\delta$. Так как $\hat{\theta}(P,\ Q) < 1/2 - \delta$, то существует $g \in B(P)$ такой, что $\| h - g \| < 1/2 - \delta$; $g = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$. Тогда $\| h - \sum \beta_i f_i \| \leqslant \| h - \sum \beta_i e_i \| +$ $+ \| \sum \beta_i (e_i - f_i) \| \leqslant (1/2 - \delta) + \sum |\beta_i| (1/2 - \delta) \leqslant 1 - 2\delta$ (использовалось то, что $\sum |\beta_i| \leqslant 1$). Полученное противоречие доказывает справедливость предложения.

Список литературы: 1. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов.— Усп. мат. наук, 1957, **12**, вып. 2, с. 43—118. 2. *Гохберг И. Ц. Маркус А. С.* Две теоремы о растворе подпространств банахова пространства.— Усп. мат. наук, 1959, **14**, вып. 5, с 135—140. 3 *Гурарий В. И.* О растворах и наклонах подпространств банахова пространства.— Теория функций, функцион. анализ и их приложения, 1965, вып. 1, с. 194—204. 4. *Кадец М. И.* Замечание о растворе подпространств.—Функцион. анализ и его приложения, 1975, **9**, вып. 2, с. 73—74. 5. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.— М.: Мир, 1972. — 740 с. 6. *Крейн М. Г., Красносельский М. А., Мильман Д. П.* О дефектных числах линейных операторов в банаховом пространстве и о некоторых геометрических вопросах.— Тр. ин-та математики АН УССР, 1948, **11**, с. 97—112. 7. *James R. C.* Some self-dual properties of normed linear spaces.— Annals of Mathematics Studies, 1972, v. 69, p. 159—175. 8. *Lindenstrauss J., Fzafriri L.* Classical Banach Spaces, **1**, 2. Berlin: Springer, 1977.— 431 p. 9. *Singer J.* Bases in Banach Spaces II. Berlin: Springer, 1981.— 880 p.

Поступила в редколлегию 10.11.82.