УДК 517.982

С. Я. НОВИКОВ, Е. М. СЕМЕНОВ, Е. В. ТОКАРЕВ

О СТРУКТУРЕ ПОДПРОСТРАНСТВ ПРОСТРАНСТВ $\Lambda_p(\mu)$

Настоящая работа посвящена расширенному изложению результатов, анонсированных в статье [1]. Изложение ведется для более общего случая пространств $\Lambda_p(\varphi, \mu)$ измеримых функций на пространстве (T, Σ, μ) с положительной вероятностной мерой.

1. Предварительные сведения. Пусть (T, Σ, μ) — измеримое пространство с неотрицательной вероятностной мерой (т. е. $\mu(T) = 1$); $S \equiv S(T, \Sigma, \mu)$ — K-пространство (= условно полная векторная решетка) всех (эквивалентных классов) μ-измеримых функций $x(t)$ $(t \in T)$.

Для $x(t) \in S$ положим: $n_x(\tau) = \mu\{t : x(t) > \tau\}$; $x^*(s) = \inf\{\tau : n_{|x|}(\tau) < s\}$; $s \in [0, 1]$.

Пространство Лоренца $\Lambda_p(\varphi, \mu)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ — это банахово пространство измеримых функций, являющееся фундаментом в $S(T, \Sigma, \mu)$ и состоящее из тех $x(t) \in S$, для которых конечна норма

$$\| x \|_{\Lambda_p(\varphi,\mu)} = \left[\int_0^1 [x^*(s)]^p \, d\varphi(s) \right]^{1/p},$$

где $\varphi(s)$ — вогнутая на $[0, 1]$ неубывающая функция, непрерывная в начале координат, такая, что $\varphi(0) = 0$; $\varphi(1) = 1$.

Частным случаем пространств $\Lambda_p(\varphi, \mu)$ являются известные пространства Лебега — Рисса $L_p(\mu)$ (при $\varphi(s) \equiv s$), а также обычные пространства Лоренца $\Lambda(\varphi)$ и $\Lambda_p(\varphi)$ (в случае, когда (T, Σ, μ) — это отрезок $[0, 1]$ с мерой Лебега $\operatorname{mes} e$).

Для подмножества $K \subset \Lambda_p(\varphi, \mu)$ положим

$$\eta_{\Lambda_p(\varphi,\mu)}(K) = \lim_{\tau \to 0+} \sup_{x \in K \setminus \{0\}} \sup_{e \in \Sigma;\ \mu e = \tau} \frac{\| x(t) \chi_e(t) \|}{\| x \|},$$

где $\chi_e(t)$ — индикаторная функция множества $e \in \sum$.

Выделим следующие классы подпространств $\Lambda_p(\varphi, \mu)$.

Класс $K[\Lambda_p(\varphi, \mu)] \equiv K[\Lambda_p]$ состоит из тех подпространств B пространства $\Lambda_p(\varphi, \mu)$, для которых $\eta_{\Lambda_p(\varphi,\mu)}(B) < 1$.

Класс $K_0[\Lambda\ ] \subset K[\Lambda_p]$ выделяется условием: $B \in K_0[\Lambda_p] \leftrightarrow \eta_{\Lambda_p(\varphi,\mu)}(B) = 0$. Класс $\mathscr{D}[\Lambda_p]$ является дополнением класса $K[\Lambda_p]$ в классе $P[\Lambda_p]$ всех подпространств $\Lambda_p(\varphi, \mu)$.

Приведем известные факты о строении введенных классов. Эти результаты получены независимо в [2—4].

$\langle 1 \rangle$ Всякое подпространство B из класса $K[\Lambda_p]$ рефлексивно; если $B \in K[\Lambda_p]$, то на B эквивалентны нормы $\| \cdot \|_{\Lambda_p(\varphi,\mu)}$ и $\| \cdot \|_{L_1}(\mu)$, а также сходимости по норме и по мере.

$\langle 2 \rangle$ Всякое подпространство B из класса $\mathscr{D}[\Lambda_p]$ бесконечномерно; если $B \in \mathscr{D}[\Lambda_p]$, то для всякого $\varepsilon > 0$ B содержит подпространство B_1, $(1 + \varepsilon)$ — изоморфное l_p, дополняемое в Λ_p, причем стандартный базис B_1 эквивалентен дизъюнктной системе функций.

Напомним также, что при $p > 1$ всякое пространство $\Lambda_p(\varphi, \mu)$ является рефлексивным, а $\Lambda_1(\varphi, \mu) \equiv \Lambda(\varphi, \mu)$ слабо секвенциально полно, так что всякое пространство $\Lambda_p(\varphi, \mu)$ обладает абсолютно непрерывной нормой, т. е. для любого $x \in \Lambda_p$, $\| x\chi_e \|_{\Lambda_p} \to 0$ при $\mu e \to 0$.

Для всякого $\Lambda_p(\varphi, \mu)$ справедливы непрерывные вложения: $L_p(\mu) \supseteq \Lambda_p(\varphi, \mu)$, т. е. для всех $x \in L_p(\mu)$, $\| x \|_{L_p(\mu)} \leqslant \| x \|_{\Lambda_p(\varphi,\mu)}$.

Пространство $\Lambda_p(\varphi, \mu)$ назовем бинарным, если $K[\Lambda_p] = K_0[\Lambda_p]$. Очевидно, в бинарных пространствах характеристика $\eta_{\Lambda_p}(B)$ на подпространствах $B \in P[\Lambda_p]$ принимает два значения: 0 или 1.

2. Бинарные пространства $L_p(\mu)$. Для упрощения обозначим $\|\cdot\|_{L_p(\mu)}$ через $\|\cdot\|_p$, а $\eta_{L_p(\mu)}(B)$ через $\eta_p(B)$.

Теорема 1. *Всякое пространство $L_p(\mu)$ при $1 \leqslant p < 2$ является бинарным.*

Доказательство. Согласно определению бинарности $L_p(\mu)$ и определению классов $K[L_p]$ и $K_0[L_p]$ требуется доказать, что из условий $B \in K[L_p]$ и $\eta_p(B) = \alpha < 1$ вытекает $\alpha = 0$.

Предположим противное. Пусть $B \in K[L_p]$ и $\eta_p(B) = \alpha \neq 0$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, что $\alpha + \varepsilon < 1$. В силу определения $\eta_p(B)$ найдется такая последовательность множеств $e_n \subset T$; $e_n \in \sum$ и такая последовательность элементов (x_n) из B, что

$$\sup_{t \in T \setminus e_n} |x_n(t)| \leqslant \inf_{t \in e_n} |x_n(t)|, \tag{1}$$

$$\alpha - \varepsilon \leqslant \|x_n \chi_{e_n}\|_p \leqslant \alpha; \quad \|x_n\|_p = 1, \tag{2}$$

$$\sum \mu e_n < \infty, \tag{3}$$

причем $(x_n \chi_{e_n}) / \|x_n \chi_{e_n}\|_p (1 + \varepsilon)$ эквивалентна стандартному базису пространства l_p.

В силу абсолютной непрерывности нормы в пространстве $L_p(\mu)$ и свойств перестановок функций (см. [4, с. 81]), для любого n найдется множество $f_n \subset T$; $f_n \in \sum$ такое, что

$$\sup_{t \in T \setminus f_n} |x_n(t)| \leqslant \inf_{t \in f_n} |x_n(t)|, \tag{4}$$

$$\|x_n \chi_{f_n}\|_p = \alpha + \varepsilon. \tag{5}$$

Если бы $\inf \mu f_n = 0$, то $\eta_p(B) \geqslant \alpha + \varepsilon$, что противоречит предположению, поэтому $\theta = \theta(\varepsilon) = \inf_n \mu f_n > 0$. Сравнивая (1), (2) и (4), (5), видим, что $e_n \subset f_n$. Каждую функцию $x_n(t)$ можно представить в виде $x_n(t) = x_n(t)\chi_{e_n}(t) + x_n(t)\chi_{f_n \setminus e_n}(t) + x_n(t)\chi_{T \setminus f_n}(t) = u_n(t) + v_n(t) + w_n(t)$.

Построенные функции обладают следующими свойствами: А) для любых n_0 и $(\beta_n)_1^{n_0}$

$$(1 - \varepsilon)(\alpha - \varepsilon)\left(\sum_1^{n_0} |\beta_n|^p\right)^{1/p} \leqslant \left\|\sum_1^{n_0} \beta_n u_n\right\| \leqslant (1 + \varepsilon)\alpha\left(\sum_1^{n_0} |\beta_n|^p\right)^{1/p}; \tag{7}$$

Б) так как носители функций $v_n(t)$ и $u_n(t)$ дизъюнктны и выполнено (2), (5), то

$$\|v_n\|_p \leqslant [(\alpha + \varepsilon)^p - (\alpha - \varepsilon)^p]^{1/p} \leqslant 2\sqrt{\varepsilon}; \tag{8}$$

В) в силу (6) $|w_n(t)| \leqslant \theta^{-1/p}$. Тем более,

$$\|w_n\|_p \leqslant \theta^{-1/p}. \tag{9}$$

Рассмотрим функции

$$X_{n,s}(t)=n^{-1/p}\sum_{n+1}^{2n} r_n(s)\,x_n(t)=n^{-1/p}\sum_{n+1}^{2n} r_n(s)\,u_n(t)+$$
$$+n^{-1/p}\sum_{n+1}^{2n} r_n(s)\,v_n(t)+n^{-1/p}\sum_{n+1}^{2n} r_n(s)\,w_n(t)=$$
$$=U_{n,s}(t)+V_{n,s}(t)+W_{n,s}(t),$$

где $r_n(t)=\operatorname{sign}\sin 2^n\pi s$ — функции Радемахера. В силу (2) и (7)

$$(1-\varepsilon)(\alpha-\varepsilon)\leqslant\|U_{n,s}\|_p\leqslant\alpha+\varepsilon. \tag{10}$$

Докажем теперь, что для некоторых n, s нормы функций $V_{n,s}$ и $W_{n,s}$ достаточно малы.

Функции Радемахера, как известно, ортогональны на [01]. Учитывая это и (8), имеем:

$$\int_0^1\|V_{n,s}\|_p^p ds=\int_0^1\left[\frac{1}{n}\int_T\left|\sum_{n+1}^{2n} r_n(s)\,v_n(t)\right|^p d\mu\right]ds=$$
$$=\frac{1}{n}\int_T\int_0^1\left|\sum_{n+1}^{2n} r_n(s)\,v_n(t)\right|^p ds\,d\mu\leqslant\frac{1}{n}\int_T\left(\int_0^1\left|\sum_{n+1}^{2n} r_n(s)\,v_n(t)\right|^2 ds\right)^{p/2}d\mu=$$
$$=\frac{1}{n}\int_T\left(\sum_{n+1}^{2n} v_n^2(t)\right)^{p/2}d\mu\leqslant\frac{1}{n}\int_T\sum_{n+1}^{2n}|v_n(t)|^p d\mu\leqslant 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Отсюда $\mu\{s:\|V_{n,s}\|_p^p\geqslant 3(2\sqrt{\varepsilon})^p\}\leqslant 1/3$, тем более

$$\mu\{s:\|V_{n,s}\|_p\leqslant 6\sqrt{\varepsilon}\}\geqslant 2/3. \tag{11}$$

Аналогичным образом

$$\int_0^1\|W_{n,s}\|_p^p ds\leqslant\frac{1}{n}\int_T\left(\sum w_n^2(t)\right)^{p/2}d\mu. \tag{12}$$

Из (9) следует, что $\int_T\left(\frac{1}{n}\sum w_n^2(t)\right)d\mu\leqslant\theta^{-2/p}$. Следовательно, $\int_T\left(\frac{1}{n}\sum w_n^2(t)\right)^{p/2}d\mu\,\theta^{-1}$. Используя полученное неравенство, продолжим (12): $\int_0^1\|W_{n,s}\|_p^p ds\leqslant\theta^{-1}n^{p/2-1}$, отсюда

$$\mu\{s:\|W_{n,s}\|_p\leqslant 3\theta^{-1/p}n^{1/2-1/p}\}\geqslant 2/3. \tag{13}$$

По заданному ε найдем n такое, что $3\theta^{-1/p}n^{1/2-1/p}<\sqrt{\varepsilon}$. Неравенства (11), (13) показывают, что для некоторого $s_0\in[0,\ 1]$

$$\|W_{n,s_0}\|_p+\|V_{n,s_0}\|_p<7\sqrt{\varepsilon}. \tag{14}$$

Из оценок (10), (14) следует, что $\| X_{n,s_0} \|_p \leqslant \alpha + \varepsilon + 7\sqrt{\varepsilon}$; $\| X_{n,s_0} \chi_{U_{m=n+1}^{2n} e_m} \|_p \geqslant \| U_{n,s_0} \|_p - \| V_{n,s_0} + W_{n,s_0} \|_p \geqslant (\alpha - \varepsilon)$ $(1 - \varepsilon) - 7\sqrt{\varepsilon}$. Согласно предположению (1) $\mu (U_{m=n+1}^{2n} e_m) \leqslant \sum_{n+1}^{2n} \mu e_m \leqslant \leqslant \sum_{n+1}^{\infty} \mu e_m \underset{n \to \infty}{\to} 0$, поэтому $\eta_p(B) \geqslant \frac{(1+\varepsilon)(\alpha - \varepsilon) - 7\sqrt{\varepsilon}}{\alpha + \varepsilon + 7\sqrt{\varepsilon}}$, что при достаточно малых ε противоречит предположению $\eta_p(B) = \alpha < 1$. Таким образом, если $\eta_p(B) \neq 0$, то $\eta_p(B) = 1$. Теорема доказана.

3. **Свойство p-Мазура.** Пусть $p \in [1, 2)$. Скажем, что банахово пространство X обладает свойством p-Мазура, если для всякой слабо сходящейся к нулю последовательности элементов $(x_n) \subset X$ найдется двойная последовательность положительных чисел $\{1\alpha_j^n\}_{j=1}^{m(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что

$$\sum_{j=1}^{m(n)} [\alpha_j^n]^p = 1 \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{15}$$

и последовательность $z_n = \sum_{j=1}^{m(n)} \alpha_j^n x_j$ сильно сходится к нулю (кратко: $X \in \mathrm{Maz}(p)$).

Согласно известной теореме Мазура [9], всякое банахово пространство X обладает свойством 1-Мазура, т. е. $X \in \mathrm{Maz}(1)$.

Теорема 2. *Пусть* $p \in [1, 2)$. *Если* B — *подпространство* $L_p(\mu)$ *такое, что* $\eta_p(B) = 0$, *то* $B \in \mathrm{Maz}(p)$.

Доказательство. Рассмотрим пространство $L_p(\lambda)$, состоящее из функций, суммируемых с p-й степенью на пространстве (Ω, A, λ), где Ω — прямое произведение пространств $T \otimes [0, 2]$, а $\lambda = \mu \otimes \mathrm{mes}$ — прямое произведение меры μ на меру Лебега.

Пространство $L_p(\mu)$ изометрически вкладывается в пространство $L_p(\lambda)$, так как всякой функции $x \in L_p(\mu)$ можно поставить в соответствие функцию $x \otimes \chi_{[0,1]}(t, s) \equiv x(t)\chi_{[0,1]}(s) \in L_p(\lambda)$ и это соответствие является изометрическим изоморфизмом. Ниже пространство $L_p(\mu)$ отождествляется с указанным подпространством $L_p(\lambda)$.

Пусть B — подпространство $L_p(\mu)$; $\eta_p(B) = 0$; (x_n) — слабо сходящаяся к нулю последовательность из нормированных элементов B. Можно считать, что (x_n) — базисная последовательность.

Рассмотрим в $L_p(\lambda)$ множество векторов $Z = \{z_j\}$; $z_n = x_n \otimes \otimes \chi_{[0,1]}(t, s)\gamma + k_n \chi_{e_n}(t, s)$, где $0 < \gamma < 1$; $e_n \subset T \otimes [1, 2]$ — попарно непересекающиеся множества; $k_n = (1-\gamma)/(\lambda e_n)^{1/p}$.

Множество Z ограничено в рефлексивном пространстве $L_p(\lambda)$ и, значит, слабо компактно. Поэтому существует подпоследовательность (z_{n_j}), слабо сходящаяся к некоторому $g \in L_p(\lambda)$. Это означает, что последовательность $\{z_{n_{2j}} - z_{n_{2j-1}}\}_{j=1}^{\infty}$ слабо сходится к нулю, так что из нее можно выделить базисную подпоследовательность $F = \{f_j\}$. Очевидно, $\eta_{L_p(\lambda)}(F) \neq 0$. Замыкание линейной оболочки системы F в пространстве $L_p(\lambda)$ является в $L_p(\lambda)$ подпространством, для которого $\eta_{L_p(\lambda)}(H) \neq 0$. Согласно теореме 1,

$\eta_{L_p}(H)=1$. По $\langle 2\rangle$ $H=[F]_{L_p}$ содержит почти дизъюнктную систему функций, эквивалентную стандартному базису пространства l_p. Ввиду воспроизводимости $\mathrm{Bas}\, l_p$ (см. [5]), существует блок-базис по F, представляющий собой почти дизъюнктную систему функций. Коэффициенты этого блок-базиса должны удовлетворять условию (15), так как в противном случае окажется, что подпространство B содержит почти дизъюнктную систему функций, а это противоречит условию $\eta_p(B)=0$.

Это означает, что найдется такая последовательность чисел $\{\{\alpha_j^n\}_{j=1}^{m(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющая (15), что $\|\sum\alpha_j^n x_j\|_p\to 0$. Тем самым, B обладает свойством p-Мазура. Теорема доказана.

4. Бинарность пространств $\Lambda_p(\varphi,\ \mu)$.

Теорема 3. *Если $p\in[1,\ 2)$, то всякое пространство $\Lambda_p(\varphi,\ \mu)$ является бинарным.*

Доказательство. Как отмечалось ранее, $\Lambda_p(\varphi,\ \mu)\subseteq L_p(\mu)$, т. е. $\|x\|_{L_p(\mu)}\leqslant\|x\|_{\Lambda_p(\varphi,\ \mu)}$ для всех $x\in\Lambda_p(\varphi,\ \mu)$. Пусть B — подпространство $\Lambda_p(\varphi,\ \mu)$ из класса $K[\Lambda_p]$. Тогда на B эквивалентны нормы $\|\cdot\|_{L_1(\mu)}$ и $\|\cdot\|_{\Lambda_p(\varphi,\ \mu)}$, а это значит, что $B\in K[L_p]$. Из теоремы 2 вытекает, что $B\in\mathrm{Maz}(p)$. Предположим, $\eta_{\Lambda_p(\varphi,\ \mu)}(B)\neq 0$. Поскольку $B\in K[\Lambda_p]$, $\eta_{\Lambda_p(\varphi,\ \mu)}(B)=\alpha<1$.

Аналогично доказательству теоремы 1 выберем $x_n\in B$ и $e_n\subset T$; $e_n\in\Sigma$ так, что $\mu e_n\to 0$, а $\{x_n\chi_{e_n}\}$ эквивалентна $\mathrm{Bas}\, l_p$, причем $\|x_n\chi_{e_n}\|\geqslant\alpha-\varepsilon>0$. Обозначим $\hat{x}_n(t)=x_n\chi_{e_n}$; $\bar{x}_n=x_n-\hat{x}_n$. Поскольку множество $\bar{X}=\{\bar{x}_n\}$ слабо компактно, в $\bar{X}$ можно выбрать подпоследовательность (x_{n_j}) так, что $\bar{x}_{n_j}-x_{n_{j-1}})$ слабо сходится к нулю. Поскольку $B\in\mathrm{Maz}(p)$, существуют линейные комбинации $z_j=\Sigma_{k_j+1}^{k_{j+1}}\alpha_i^j(x_{n_{2i}}-x_{n_{2i-1}})$, $\alpha_i^j>0$; $\Sigma_{k_j+1}^{k_{j+1}}[\alpha_i^j]^p=1$; $k_1<<k_2<\ldots$ такие, что $\lim\|z_j-\hat{z}_j\|=\lim\|\bar{z}_j\|=0$, где $\hat{z}_j==\Sigma_{k_j+1}^{k_{j+1}}\alpha_i^j(\hat{x}_{n_{2i}}-\hat{x}_{n_{2i-1}})$; $\bar{z}_j=z_j-\hat{z}_j$. Это означает, что $\eta_{\Lambda_p(\varphi,\ \mu)}(B)==1$, что противоречит условию $B\in K[\Lambda_p]$. Теорема доказана.

5. Структура подпространств пространств $L_p(\mu)$ и $\Lambda_p(\varphi,\ \mu)$. Следствием приведенных выше результатов является обобщение теорем Розенталя [7] и Энфло — Розенталя [8] на случай пространств $\Lambda_p(\varphi,\ \mu)$.

Отметим, эти результаты получены совершенно иным путем, чем в указанных работах, не использующим технику абсолютно суммирующих операторов, а результаты работ [7, 8], относящиеся к структуре подпространств пространств $L_p(\mu)$, являются частным случаем приводимой ниже теоремы.

Теорема 4. *Если B — подпространство $\Lambda_p(\varphi,\ \mu)$ $(1\leqslant p<2)$, то либо B содержит подпространство, изоморфное l_p (точнее $(1+\varepsilon)$ — изоморфное l_p), либо на B эквивалентны нормы $\|\cdot\|_{\Lambda p(\varphi,\ \mu)}$ и $\|\cdot\|_{L_1(\mu)}$, причем последнее выполнено в том и толь-*

ко том случае, когда B не содержит подпространств, изоморфных l_p.

Доказательство. Если B содержит подпространство, изоморфное l_p, то $B \notin \mathrm{Maz}(p)$. Тем самым $B \notin K[\Lambda_p]$, т. е. $\eta_{\Lambda_{p(\varphi,\mu)}} \times \times (B) = 1$. Но тогда в B найдется почти дизъюнктная система, натягивающая подпространство $(1+\varepsilon)$-изометричное l_p и допускающее на себя проектор [3]. Если же B не содержит l_p, то $\eta_{\Lambda_{p(\varphi,\mu)}}(B) = 0$ и согласно [4] на B эквивалентны нормы $\|\cdot\|_{\Lambda_p}$ и $\|\cdot\|_{L_1}$.

Список литературы: 1. *Новиков С. Я., Семенов Е. М., Токарев Е. В.* Структура подпространств пространств Λ_p.— Докл. АН СССР, 1979, **243**, № 3, с. 252—254. 2. *Figiel T., Johnson W. B., Tzafriri L.* On Banach lottices and spaces having local unconditional structure with applications to Lorent z function spaces.— Journ. Approx. Theory, 1975, **13**, № 4, p. 395—412. 3. *Токарев Е. В.* О подпространствах некоторых симметричных пространств.— Теория функций, функцион. анализ и их приложения, 1975, вып. 24, с. 156—161. 4. *Токарев Е. В.* О подпространствах симметричных пространств функций.— Функцион. анализ и его приложения, 1979, **13**, вып. 2, с. 93—94. 5. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов.— М.: Наука, 1979.— 400 с. 6. *Lindenstraus J., Pelczryn'ski A.* Contribution to the theory of the olassical Banach spaces.—Jsr. Journ. Math., 1972, **8**, № 8, p. 225—249. 7. *Rosenthal N. P.* On subspaces of L_p.— Ann. Math., **97**, № 2, pp. 344—373. 8. *Enflo P., Rosenthal H. P.* Some results concerning $L_p(\mu)$-spaces.— Journ. Funct. Anal., 1973, **14**, № 4, p. 325—348. 9. *Банах С.* Курс функціонального аналізу.— Київ, Наука, 1949. —198 с.

Поступила в редколлегию 13.11.82.