УДК 517.53

М. Ю. ЛЮБИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИКИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Введение. Мы рассмотрим динамическую систему на сфере Римана, порожденную итерацией рациональной функции комплексного переменного. Еще в начале века Фату высказал гипотезу [1], которая в современных терминах звучит так: «*Рациональная функция общего положения удовлетворяет аксиоме А Смейла*». Как известно, аксиома A влечет устойчивость динамики на замыкании $P(f)$ множества периодических точек функции f («*P — устойчивость*»). В настоящей работе мы покажем, что P-устойчивость является свойством общего положения в любом голоморфном семействе рациональных функций. Любопытно, что этот факт справедлив и для таких семейств, в которых ни одна функция не удовлетворяет аксиоме A.

На динамику рациональной функции существенно влияет поведение орбит критических точек. Поэтому полезно, забыв на время об остальных траекториях, посмотреть, как орбиты критических точек зависят от параметров системы. При этом возникает последовательность аналитических функций от параметров, которая исследуется с помощью теории нормальных семейств Монтеля. В разделе 2 мы развиваем этот подход, который в контексте однопараметрических семейств полиномов впервые применен Г. М. Левиным [2]. В частности, оказывается, что устойчивость орбит всех критических точек эквивалентна P-устойчивости.

С другой стороны, в окрестности неустойчивой рациональной функции имеется огромное разнообразие в поведении орбит критических точек. Например, произвольная траектория одностороннего сдвига Бернулли может быть «скопирована» траекторией критической точки. Кроме того, для типичной неустойчивой рациональной функции одна из критических точек движется весьма хаотично, а именно, топологически транзитивно на множестве Жюлиа.

Наконец, в последнем разделе рассмотрим некоторые конкретные однопараметрические семейства. Например, в семействе $f_w(z) = 1 + wz^{-2}$ для типичной неустойчивой функции множество Жюлиа совпадает со всей сферой.

Недавно автор получил препринт Сулливана, Сада и Манэ [3], в котором по существу тем же способом, что и в настоящей работе доказана типичность P-устойчивости. Более того, авторы показали, что если наложить на функцию дополнительное условие Якобсона, справедливое в общем положении, то сопрягающий гомеоморфизм продолжается почти на всю сферу. Таким образом, типичная рациональная функция структурно устойчива!

Результаты настоящей работы докладывались в декабре 1981 года на семинаре по динамическим системам под руководством Я. Г. Синая. Их краткое изложение опубликовано в [4].

1. Итерация индивидуальной функции. По поводу большинства фактов, изложенных в этом разделе, мы отсылаем читателя к классическим работам Жюлиа и Фату ([1], см. также [5]).

Сферу Римана обозначим через $\boldsymbol{P}^1$. Пусть $f(z)$ — рациональная функция степени n. Точка $z \in \boldsymbol{P}^1$ называется *регулярной*, если семейство итераций $\{f^m\}$ нормально в некоторой ее окрестности. Следуя Д. Сулливану, дополнение $F(f)$ к множеству регулярных точек будем называть *множеством Жюлиа*. Множество Жюлиа является совершенным множеством, инвариантным относительно f и f^{-1} ($f^{-1}z$ — полный прообраз точки z). Если z — любая точка сферы, кроме, быть может, двух исключений, то $\bigcup\limits_{0 \leqslant m < \infty} f^{-m}z \supset F$. Множество F нигде не плотно или совпадает со всей сферой.

Точка z называется *периодической*, если $f^p z = z$ при некотором p, называемом периодом; наименьший из периодов q — это *порядок* периодической точки z; $\{f^i z\}_{i=0}^{q-1}$ — *цикл*. Замыкание множества периодических точек мы будем обозначать через $P(f)$. Если U — локальная координата в окрестности периодической точки порядка q, то равенство $Df^q(z) = \lambda(z)\,du$ корректно определяет *мультипликатор* $\lambda(z)$. Периодическая точка (ее цикл) называется *притягивающей*, *нейтральной* или *отталкивающей* в зависимости от того, $|\lambda(z)| < 1$, $|\lambda(z)| = 1$ или $|\lambda(z)| > 1$.

Притягивающие циклы лежат вне множества Жюлиа. *К каждому притягивающему циклу сходится орбита некоторой критической точки* (точка z называется *критической*, если $Df(z) = 0$), и, следовательно, *число притягивающих циклов не превосходит* $2n - 2$.

Вопрос о принадлежности нейтрального цикла $\{f^i z\}_{i=0}^{p-1}$ множеству Жюлиа непосредственно связан с проблемой аналитической линеаризации f^p в окрестности точки z. А именно, *для того, чтобы функция f^p в окрестности точки z была аналитически сопряжена с вращением диска* (т. е. $\varphi(f^p\zeta) = \lambda\varphi(\zeta)$, где φ конформно отображает некоторую окрестность точки z на единичный диск), *необходимо и достаточно, чтобы* $z \notin F(f)$. Если цикл $\{f^i z\}_{i=0}^{p-1}$ является *рациональным* (т. е. мультипликатор λ является корнем из 1), то $z \in F(f)$. Если же $\arg\lambda$ далек от рациональных чисел ($|\arg\lambda - m/n| \geqslant Cn^{-(2+\varepsilon)}$), то по теореме Зигеля точка z лежит вне множества Жюлиа. С другой стороны, существуют нейтральные иррациональные циклы, содержащиеся в $F(f)$. В третьем разделе мы дадим простое доказательство этого факта из категорных соображений. *Если $\{z_i\}$ — рациональный цикл, то существует критическая точка, орбита которой сходится к циклу $\{z_i\}$* (Фату). *Если цикл $\{z_i\}$ иррационален и содержится в $F(f)$, то можно утверждать, что $\{z_i\}$ содержится в предельном* *множестве* $\omega(c)$ *орбиты некоторой критической точки* c. Это является следствием следующего факта.

Лемма 1.1. *Если в окрестности* U *определено семейство* $\{f_i^{-m}\}$ *однозначных ветвей функций* f^{-m}, *то* 1) *семейство* $\{f_i^{-m}\}$ *нормально и* 2) *если* $U \cap F \neq \varnothing$, *то* $\|Df_i^{-m}\| \to 0$ *равномерно на компактных подмножествах* в $U \cdot$ ($\|Dg\|$ — *сферическая норма дифференциала*).

Наконец, имеет место следующий глубокий факт, доказанный Фату: *общее число нейтральных циклов не превосходит* $4n-4$. Таким образом, функция f имеет бесконечное число отталкивающих циклов. *Отталкивающие циклы образуют плотное подмножество в множестве Жюлиа;* $F(f) = \overline{\mathrm{Per}^u(f)}$.

Через P_m обозначим множество периодических точек с периодом m, а через $\tilde{P}_m \subset P_m$ — множество периодических точек порядка m. Рассмотрим меры $\mu_m = \frac{1}{|P_m|} \sum\limits_{\zeta \in P_m} \delta_\zeta$, $\tilde{\mu}_m = \frac{1}{|\tilde{P}_m|} \sum\limits_{\zeta \in \tilde{P}_m} \delta_\zeta$, где δ_ζ — единичная масса, сосредоточенная в точке ζ. В [6] показано, что $\mu_m \to \mu$, где μ — мера, носитель которой совпадает с множеством F. Нам понадобится небольшое уточнение этого факта.

Теорема 1.1. $\lim \tilde{\mu}_m = \mu$.

Доказательство. Пусть $\{z_i\}_{i=1}^s$ — все рациональные нейтральные периодические точки функции f; p_i — порядок точки z_i; λ_i — ее мультипликатор, являющийся корнем порядка ν_i из 1. Пусть, далее, r_i — кратность корня $z = z_i$ в уравнении $f^{p_i \nu_i} z = z$. Тогда z_i является корнем той же кратности в уравнении $f^{p_i l} z = z$, если l делится на ν_i и является простым корнем этого уравнения в противном случае. Отсюда следует, что уравнение s $f^m z = z$ имеет по крайней мере $n^m + 1 - \sum\limits_{i=1}^{s} r_i$ простых корней. Следовательно, $|P_m| \sim n^m$. С другой стороны, $|P_m \setminus \tilde{P}_m| \leqslant \sum\limits_{d|m,\ d<m} (n^d + 1) = O(n^m)$. Отсюда, очевидно, вытекает, что $\lim(\mu_m - \tilde{\mu}) = 0$.

Следствие 1.1. *Для любого* ε *найдется такое* N, *что при* $m \geqslant N$ *множество* $\tilde{P}_m$ ε-*плотно в множестве Жюлиа.*

В работе [7] Д. Сулливан дал полное описание динамики на дополнении к множеству Жюлиа. Если U — компонента связности дополнения $\mathbf{P}^1 \setminus F(f)$, то при некотором l компонента $V = f^l U$ является периодической, т. е. $f^p V = V$. При этом возможны 2 случая: 1) существует такая p-периодическая точка $x \in \overline{V}$, что $f^{pm} z \to x$ $(m \to \infty,\ z \in V)$ (это вариант теоремы Данжуа — Вольфа); если $x \in \partial V$, то x — рациональная нейтральная точка; 2) f^p конформно отображает V на себя. При этом $f^p | V$ конформно эквивалентно иррациональному вращению диска (пример Зигеля) или кольца (пример Эрмана (см. [7]). Из леммы 1.1 следует, что *граница* ∂V

содержится в объединении предельных множеств орбит критических точек.

Инвариантный компакт X будем называть *отталкивающим* (точнее следовало бы говорить «гиперболически отталкивающим»), если существуют такие константы $C > 0$ и $\lambda > 1$, что $\| Df^m(x) \| \geqslant C\lambda^m (x \in X)$. Мы будем говорить, что *инвариантное множество поглощает орбиту точки* z, если $f^N z \in X$ при некотором N.

Предложение 1.1. *Если орбиты всех критических точек поглощаются отталкивающим инвариантным множеством* X, *то множество Жюлиа совпадает со всей сферой.*

Доказательство можно получить средствами, известными со времен Фату, но мы для простоты используем теорему Сулливана. Предположим, что функция f обладает диском Зигеля или кольцом Эрмана V. Можно считать, что V — ограниченная область плоскости $\boldsymbol{C}$ (так как $\boldsymbol{P}^1 \setminus V$ имеет непустую внутренность). Так как f^p конформно отображает область V на себя, то по принципу минимума $|(f^{pm})'(z)| \geqslant \min\limits_{\zeta \in \partial V} |(f^{pm})'(\zeta)| (z \in V)$. Но граница ∂V содержится в объединении ω-предельных множеств орбит критических точек и, значит, принадлежит отталкивающему множеству X. Отсюда вытекает, что $|(f^{pm})'(z)| \to \infty (z \in V)$ вопреки нормальности семейства $\{f^{pm}\}$ в области V.

Если же $F(f) \neq \boldsymbol{P}^1$, но диски Зигеля и кольца Эрмана отсутствуют, то из теорем Сулливана и Фату следует, что орбита некоторой критической точки сходится к притягивающему или нейтральному циклу, которые заведомо не могут принадлежать отталкивающему множеству.

Следствие 1.2. *Если орбиты всех критических точек функции f поглощаются отталкивающими циклами, то* $F(f) = \boldsymbol{P}^1$.

Именно этот эффект лежал в основе известных примеров рациональных функций со свойством $F(f) = \boldsymbol{P}^1$.

2. Рациональная функция общего положения $\boldsymbol{P}$-устойчива. Множество Q_n рациональных функций степени n естественно вложено в $2n+1$-мерное комплексное проективное пространство $\boldsymbol{P}^{2n+1}$. Это вложение индуцирует на Q_n структуру комплексного многообразия. Рассмотрим произвольное связное комплексное подмногообразие M.

Пусть X и Y — замкнутые подмножества сферы, инвариантные относительно отображений f и g соответственно. Говорят, что $f|X$ и $g|Y$ *топологически сопряжены, если существует такой гомеоморфизм* $h: X \to Y$, *что* $hfh^{-1} = g$.

Определение 2.1. *Рациональная функция $f \in M$ называется P-устойчивой (в семействе M), если существует такая окрестность $U \subset M$ функции f, что $f|P(f)$ и $g|P(g)$ топологически сопряжены для любой функции $g \in U$, причем сопрягающий гомеоморфизм $h_g: P(f) \to P(g)$ непрерывно зависит от g (на множестве непрерывных отображений $P(f) \to \boldsymbol{P}^1$ вводится равномерная топология).*

Теорема 2.1. *Множество P-устойчивых рациональных функций открыто и плотно в M.*

Далее будем использовать элементарные свойства аналитических множеств, которые содержатся, например, в первых главах книги [8]. Основную роль при доказательстве теоремы 2.1. играет семейство $\{X_m\}$ аналитических подмножеств многообразия $M \times \boldsymbol{P}^1$, заданных в $M \times \boldsymbol{P}^1$ уравнениями $f^m z = z$. Рассмотрим естественную проекцию $\pi : M \times \boldsymbol{P}^1 \to M$. Сужение $\pi \mid X_m$ является разветвленным накрытием. Через $L_m \subset M$ обозначим множество ветвления накрытия $\pi \mid X_m$. Если $f \in L_m$, то f обладает кратной периодической точкой z (т. е. $\mathcal{D}f^m(z)/du = 1$, где u — локальный параметр в окрестности точки z). Обратное также справедливо, если в семействе M имеется хотя бы одна функция без кратных периодических точек.

Множество $\overline{\bigcup\limits_{1 \leqslant m < \infty} L_m}$ обозначим через K, а его дополнение через σ.

Мы покажем, что σ совпадает с множеством P-устойчивых функций. Для того чтобы заодно получить более точную информацию о расположении множеств L_m, введем в рассмотрение аналитическое множество $Y_m = \overline{X_m \setminus \bigcup\limits_{d|m} X_d}$. На множестве Y_m плотны такие точки (f, z), что z — периодическая точка порядка m функции f. Через $N_m \subset M$ обозначим множество ветвления проекции π: $Y_m \to M$. Следующая лемма носит предварительный характер.

Лемма 2.1. *Предположим, что $x = (f, z) \in Y_p \cap Y_q$, где $p < q$. Тогда а) q делится на p; б) точка z является периодической точкой порядка p функции f, ее мультипликатор λ равен $e^{2\pi i l/d}$, где l взаимно просто с d*; в) x — регулярная точка проекции $\pi | Y_p$ и точка ветвления проекции $\pi | Y_q$; г) если p, q, m попарно различны, то $Y_p \cap Y_q \cap Y_m = \varnothing$.*

Доказательство. Предположим, что z — периодическая точка порядка r ($(f, z) \in Y_r$). Тогда $x = (f, z)$ может принадлежать только поверхностям вида Y_{rl} (l — целое). Если мультипликатор λ не является корнем из 1, то x — регулярная точка проекции $\pi \mid X_{rl}$ и, следовательно, $x \notin Y_{rl}$.

Пусть мультипликатор λ является корнем порядка ν из 1. По тем же причинам, что и выше, $x \notin Y_{rl}$, если l не делится на ν. Разложим $f^{r\nu}$ в ряд в окрестности точки z, выбрав локальный параметр u так, чтобы точке z соответствовало $u = 0$. Имеем $f^{r\nu} = a_s u^s + \cdots$, где $a_s \neq 0$, s — индекс ветвления поверхности $f^{r\nu}\zeta = \zeta$ в точке x во всем пространстве рациональных функций. Тогда $f^{r\nu l} = l a_s u^s + \cdots$ и, следовательно, индекс ветвления поверхности $f^{r\nu l}\zeta = \zeta$ в $Q_n \times \boldsymbol{P}^1$ также равен s. Отсюда следует, что поверхности, заданные в $Q_n \times \boldsymbol{P}^1$ уравнениями $f^{r\nu}\zeta = \zeta$ и $f^{r\nu l}\zeta = \zeta$, совпадают в некоторой окрестности точки x. Это непосредственно влечет,

* Таким образом, в точке $f \in M$ происходит бифуркация рождения притягивающего цикла порядка q из притягивающего цикла порядка p.

что $x \notin Y_{r\nu l}$. Итак, мы показали, что точка x может принадлежать лишь поверхностям Y_r и $Y_{r\nu}$, и свойства а), б) и г) проверены.

Остается показать, что x — точка ветвления $\pi | Y_q$. Рассмотрим для этого преобразование $A: Y_q \to Y_q$, $A(f, z) = (f, fz)$. Так как множество неподвижных точек преобразования A^p нигде не плотно на Y_q, то в окрестности точки $x \in Y_p \cap Y_q$ найдется нетривиальная орбита. Так как орбиты лежат в слоях проекции $\pi | Y_q$, то x — точка ветвления.

Пусть Z — аналитическое множество. *Голоморфной функцией на Z мы всегда будем называть голоморфное отображение $Z \to \boldsymbol{P}^1$.* Пространство голоморфных функций снабжается топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах в Z. Так же, как и в классической ситуации, *семейство $\{\varphi_\alpha\}$ голоморфных функций на Z называется нормальным, если оно предкомпактно.* Для нас исключительно важную роль (особенно в следующем разделе) будет играть

Теорема Монтеля. *Пусть имеются 3 функции ψ_1, ψ_2, ψ_3 такие, что уравнения $\varphi_\alpha(z) = \psi_i(z)$ и $\psi_i(z) = \psi_j(z)$ $(i \neq j)$ не имеют корней в Z. Тогда семейство $\{\varphi_\alpha\}$ нормально.*

Доказательство. В случае $\psi_i = \text{const}$ см. в [9]. Случай исключительных функций сводится к этому заменой $g_\alpha = \dfrac{\varphi_\alpha - \psi_1}{\varphi_\alpha - \psi_2} \times \dfrac{\psi_3 - \psi_2}{\psi_3 - \psi_1}$.

Замечание. В действительности условие $\psi_i(z) \neq \psi_j(z)$ $(i \neq j)$ излишне, но доказательство чуть сложнее, а для наших целей достаточно такой формы теоремы Монтеля.

Через $N_m \subset M$ обозначим множество ветвления проекции $\pi | Y_m$, через λ_m — голоморфную функцию на Y_m, заданную в локальных координатах так: $\lambda_m(f, z) = \mathcal{D}f^m(z)/du$ (λ_m вне точек ветвления — это просто мультипликатор).

Основная лемма. *Пусть U — такая односвязная область в M, что $U \cap N_{m_k} = \varnothing$ для некоторой подпоследовательности $m_k \to \infty$. Тогда а) $U \cap L_m = \varnothing$ для всех m; любая связная компонента поверхности $Y_m \cap \pi^{-1}U$ задается уравнением $z = \varphi_{m, i}(f)$, где $\varphi_{m, i}: U \to \boldsymbol{P}^1$ — голоморфная функция; б) замыкание Φ семейства $\{\varphi_{m, i}\}$ обладает следующими свойствами: (i) если $\varphi(f_0) = \psi(f_0)$ $(\varphi, \psi \in \Phi)$, то $\varphi = \psi$; (ii) семейство Φ компактно; (iii) семейство Φ инвариантно относительно преобразования A: $(A\varphi)(f) = f\varphi(f)$; в) если функция $\lambda_{m, i} = \lambda_m(f, \varphi_{m, i}(f))$ отлична от константы, то $|\lambda_{m, i}| < 1$ или $|\lambda_{m, i}| > 1$ всюду в U; г) эндоморфизмы f и g, принадлежащие U, P — сопряжены. Сопрягающий гомеоморфизм преобразует $\varphi(f)$ в $\varphi(g)$ $(\varphi \in \Phi)$ и непрерывно зависит от g.*

Доказательство. На протяжении доказательства заменим многообразие на его окрестность U, не изменяя обозначений для поверхностей X_m, Y_m и т. д. Так как поверхность Y_{m_k} не имеет точек ветвления над односвязной областью U, то $Y_{m_k} = \bigcup_i Y_{m_k, i}$, где $Y_{m_k, i} \cap Y_{m_k, j} = \varnothing$ $(i \neq j)$ и $Y_{m_k, i}$ является графиком $z = \psi_{k, i}(f)$ голоморфной функции $\psi_{k, i}$ (мы пишем $\psi_{k, i}$ вместо $\varphi_{m_k, i}$ во избежание трехиндексных обозначений). Семейство функций $\{\psi_{k, i}\}$ обладает следующими свойствами: (i_0) если $\psi_{k, i}(f_0) = \psi_{l, j}(f_0)$ в некоторой точке $f_0 \in U$, то $(k, i) = (l, j)$; (ii_0) семейство $\{\psi_{k, i}\}$ нормально; (iii_0) семейство $\{\psi_{k, i}\}$ инвариантно относительно преобразования A.

Проверки: (i_0). Предположим, что $k < l$, но $\psi_{k, i}(f_0) = z_0 = \psi_{l, j}(f_0)$. Тогда по лемме 2.1 (f_0, z_0) — точка ветвления проекции $\pi \mid Y_{m_l}$ вопреки условию. Следовательно, $k = l$. Если, далее, $i \neq j$, то $Y_{m_k, i} \cap Y_{m_k, j} = \varnothing$, т. е. $\psi_{k, i}(f) \neq \psi_{k, j}(f)$.

(ii_0) Пусть g_1, g_2, g_3 — какие-нибудь 3 функции семейства $\{\psi_{k, i}\}$. Достаточно проверить нормальность семейства, оставшегося после удаления функций g_i. Но в силу свойства (i_0), если $\psi_{k, i} \neq g_j$, то $\psi_{k, i}(f) \neq g_j(f)$ для любого $f \in U$. Из теоремы Монтеля следует требуемое.

Свойство (iii_0) следует из того, что преобразование A переставляет связные компоненты поверхности Y_m.

Рассмотрим теперь замыкание Ψ семейства $\{\psi_{k, i}\}$. Из свойств (ii_0) и (iii_0) следует, что Ψ обладает свойствами (ii) и (iii). Проверим свойство (i). Предположим, что $\varphi(f_0) = \psi(f_0)$ $(\varphi, \psi \in \Psi)$. Существуют последовательности $\{\varphi_m\}$ и $\{\psi_m\}$ семейства $\{\psi_{k, i}\}$, сходящиеся к функциям φ и ψ соответственно. Без ограничения общности можно считать, что $\varphi(f_0) \neq \infty$. Тогда в некоторой окрестности $V \subset U$ функции φ_m и ψ_m голоморфны при достаточно больших m. Имеем, далее, $\varphi_m(f_0) - \psi_m(f_0) \to 0$, но $\varphi_m - \psi_m \to \varphi - \psi \not\equiv 0$. По теореме Гурвица для всех достаточно больших m найдется $h_m \in V$ такое, что $\varphi_m(h_m) - \psi_m(h_m) = 0$. В силу свойства (i_0) $\varphi_m = \psi_m$ и, значит, $\varphi = \psi$. Противоречие доказывает (i) для семейства Ψ.

Рассмотрим теперь отображение $\rho_f : \Psi \to P(f)$, $\varphi \to \varphi(f)$. Очевидно, ρ_f непрерывно. В силу свойства (i) ρ_f инъективно. Так как Ψ компактно, то ρ_f является гомеоморфизмом на свой образ $I(f)$. Образ $I(f)$ содержит все периодические точки функции f порядка m_k. По следствию 1.1 множество Жюлиа $F(f)$ содержится в $I(f)$. Очевидно, отображение ρ_f сопрягает преобразование $A \mid \Psi$ и функцию $f \mid I(f)$. Следовательно, $\rho_{g, f} = \rho_g \rho_f^{-1} : I(f) \to I(g)$ сопрягает $f \mid I(f)$ и $g \mid I(g)$.

Заметим теперь, что 1) $\rho_{g, f}$ преобразует $F(f)$ в $F(g)$, так как множество Жюлиа $F(f)$ выделяется из $I(f)$ топологическим свойством: его точки не изолированы; 2) $\rho_{g, f}$ преобразует периодические точки в периодические. Следовательно, если $\psi \in \Psi$ и $z_0 = \psi(f_0)$ — отталкивающая периодическая точка функции f_0, то $z = \psi(f)$ — отталкивающая или нейтральная точка функции f. Но так как мультипликатор $\lambda_\psi(f)$ является голоморфной функцией в области U, то $\psi(f)$ — отталкивающая точка при всех $f \in U$.

Далее, график $z=\psi(f)$ содержится в связной компоненте Z множества X_p (p — порядок периодической точки z_0), проходящей через точку (f_0, z_0) и не содержит точек ветвления проекции $\pi | X_p$. Следовательно, этот график совпадает с Z.

Пусть теперь $z_0 = \psi(f_0)$ $(\psi \in \Psi)$ — нейтральная периодическая точка функции f_0 порядка p. Тогда из доказанного следует, что $|\lambda_p(f, \psi(f))| \leqslant 1$ и, следовательно, $\lambda_p(f, \psi(f)) \equiv \text{const}$. Мы проверили свойство *в)* для функций из семейства Ψ.

Наконец, предположим, что (f_0, z_0) — точка ветвления проекции $\pi | X_p$. Тогда $\lambda_p(f_0, z_0) = 1$ и так же, как и выше, мы получим, что $\lambda_p | Z \equiv 1$, где Z — неприводимая компонента множества X_p, проходящая через (f_0, z_0). Но тогда $z \in F(f)$, если $(f, z) \in Z$. Следовательно, через любую точку $(f, z) \in Z$ проходит график некоторой функции $\psi \in \Psi$. Беря точку гладкости множества Z, получаем, что соответствующий ей график совпадает с компонентой Z. Но тогда через точку (f_0, z_0) проходит еще одна компонента Z_1 поверхности X_p, которая тоже параметризуется функцией $\psi_1 \in \Psi$. С другой стороны, из свойства (i) семейства Ψ вытекает, что $\psi \equiv \psi_1$. Противоречие показывает, что на X_p нет точек ветвления и пункт *а* доказан.

Теперь в качестве последовательности $\{m_k\}$ можем рассмотреть весь натуральный ряд. Тогда семейство Ψ будет совпадать с семейством Φ, а для первого из этих семейств свойства *б* и *в* уже установлены. Для окончания доказательства пункта *г* остается заметить, что образ отображения ρ_f, построенного по семейству Φ, совпадает с $P(f)$, а также проверить непрерывную зависимость сопрягающего гомеоморфизма $\rho_{g, f}$ от g. Но семейство Φ равностепенно непрерывно в окрестности точки g. Следовательно, если h достаточно близко к g, то $d(\varphi(g), \varphi(h)) < \varepsilon$ $(\varphi \in \Phi)$, т. е. $\rho_{h, f}$ равномерно близко к $\rho_{g, f}$.

Следствие 2.1. *Множество P-устойчивых функций семейства M совпадает с σ.*

Доказательство. По Основной лемме все функции $f \in \sigma$ P-устойчивы. Обратно, пусть $f \in L_p$. Сколь угодно близко к f имеются $g \notin L_p$. Тогда $|(\pi | X_p)^{-1} f| < |(\pi | X_p)^{-1} g|$. Но $(\pi | X_p)^{-1} f$ — это число f-периодических точек с периодом p, инвариантное относительно P-сопряженности. Следовательно, f не является P-устойчивым.

Следствие 2.2. *Если $f \in K$, то найдется такая последовательность $f_m \to f$, что $f_m \in N_m$.*

Через $s_p(f)$ обозначим число притягивающих циклов функции f порядка p, $s(f) = \sum s_p(f)$ — общее число притягивающих циклов, $\nu_{p, \lambda}$ — число нейтральных циклов порядка p с мультипликатором λ.

Следствие 2.3. *а) Функции $s_p(f)$, $\nu_{p, \lambda}(f)$ постоянны на связных компонентах множества σ. б) Если $f \in K$, то существует последовательность $h_p \to f$ такая, что h_p имеет притяги-*

вающий цикл порядка p. *Следовательно*, $s(h_p) > s(f)$ *при достаточно больших* p.

Доказательство б). Через Z_p обозначим объединение таких неприводимых компонент поверхности Y_p, на которых функция λ_p тождественно равна 1. Таких множеств Z_p имеется лишь конечное число, так число нейтральных рациональных циклов не превосходит $2n-2$. Положим $p_0 = \max\{p \mid Z_p \neq \varnothing\}$. По предыдущему следствию существует такая последовательность $f_p \to f$, что $f_p \in N_p$. Пусть V_p — неприводимая компонента множества Y_p, проходящая через соответствующую точку ветвления $(f_p, z_p) \in Y_p$. Функция λ_p голоморфна на V_p, не равна тождественно 1 при $p > p_0$ и $\lambda_p(f_p, z_p) = 1$. Следовательно, сколь угодно близко от (f_p, z_p) найдется такая точка $(h_p, \zeta_p) \in V_p$, что $|\lambda_p(h_p, \zeta_p)| < 1$, т. е. ζ_p — притягивающий цикл порядка p для h_p, что и требовалось. Свойство $s(h_p) > s(f)$ следует из того, что при малом возмущении притягивающие циклы функции f не исчезнут.

Следствие 2.4. *Множество* K *нигде не плотно.*

Доказательство. Если $f \in K$, то сколь угодно близко от f найдется функция f_1, такая что $s(f_1) > s(f)$. Если $f_1 \in K$, то процедура повторяется. Так как $s(f_i) \leqslant 2n-2$, то процесс оборвется за конечное число шагов.

Итак, множество σ плотно в M, и теорема 2.1 доказана: рациональная функция общего положения P-устойчива.

Будем говорить, что *множество* $Z \subset M$ *является множеством локальной единственности, если для любой области* U, *пересекающейся с* Z, *и любой голоморфной функции* $\varphi\colon U \to \boldsymbol{P}^1$ *из того, что* $\varphi \mid Z = 0$ *следует, что* $\varphi = 0$. *Очевидно, множество локальной единственности является совершенным.*

Мы говорим, что $x \in M$ *является точкой сгущения семейства подмножеств* $\{Z_\alpha\}$, *если существует последовательность* $x_{\alpha k} \in \in Z_{\alpha_k} \setminus \bigcup_{i<k} Z_{\alpha_i}$, *такая что* $x_{\alpha_k} \to x$.

Теорема единственности. *Пусть в области* $U \subset M$ *задано семейство* $\{Z_\alpha\}$ *замкнутых однородно* $\dim M - 1$*-мерных аналитических подмножеств, имеющее точку сгущения внутри* U. *Если голоморфная функция* $\varphi: U \to \boldsymbol{P}^1$ *обращается в нуль на всех множествах* Z_α, *то* $\varphi = 0$.

Следствие 2.5. *Множество* K *является множеством локальной единственности.*

Доказательство. Пусть $f \in K$, U — окрестность точки f, $f_m \in N_m$ и $f_m \to f$. Через T_m обозначим какую-нибудь неприводимую компоненту множества $N_m \cap U$, проходящую через точку f_m. Тогда T_m — замкнутое аналитическое подмножество в U коразмерности 1. Если $T_{m_i} = T_{m_j}$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$, то $l \leqslant 2n-2$. Действительно, по лемме 2.1 b функция $f \in \bigcap T_{m_i}$ имеет, по крайней мере, l различных нейтральных рациональных циклов. Следовательно, существует последовательность $\{T_{m_i}\}_{i=1}^{\infty}$, такая что $T_{m_i} \neq T_{m_j}$. Но тогда сколь угодно близко от f_{m_j} найдется $\tilde{f}_{m_j} \in T_{m_j} \setminus \bigcup_{l<j} T_{m_k}$. Следовательно, f — точка сгущения семейства $\{T_m\}$.

Будем говорить, что *нейтральный цикл* $\{f^i z\}_{i=0}^{p-1}$ *функции* f *является устранимым, если мультипликатор* λ_p *отличен от* const *на любой неприводимой компоненте поверхности* Y_p, *проходящей через точку* $(f, z) \in M \times \boldsymbol{P}^1$. Из теоремы единственности следует, что тогда это свойство выполняется в любой окрестности $U \subset Y_p$ точки (f, z). Если в семействе M имеется хотя бы одна функция f_0 без нейтральных циклов, то нейтральные циклы любой функции $f \in M$ устранимы. Из пункта b основной леммы сразу вытекает

Следствие 2.6. *Если функция* $f \in M$ *имеет устранимый нейтральный цикл, то* $f \in K$.

Заметим также, что множество функций с устранимым нейтральным циклом плотно в K, так как нейтральные циклы всех функций f_p из следствия 2.2, начиная с некоторой, устранимы (см. доказательство следствия 2.3).

Лемма 2.2. *Пусть* $\varphi : U \to \boldsymbol{P}^1$ — *такая голоморфная функция в окрестности* $U \subset M$, *что свойство* $f^p(\varphi(f)) = \varphi(f)$ *выполняется или нарушается одновременно для всех* $f \in U$. *Предположим, что* $\varphi(f)$ *не принадлежит орбитам критических точек функции* f. *Тогда* $U \subset \sigma$.

Доказательство. Рассмотрим поверхность $\Gamma_m \subset U \times \boldsymbol{P}^1$, заданную уравнением $f^m z = \varphi(f)$. Из условия леммы следует, что проекция $\Gamma_m \to U$ является неразветвленным накрытием. Без ограничения общности можно считать, что область U односвязна. Тогда поверхность Γ_m является объединением попарно не пересекающихся листов $\Gamma_{m,i}$, задаваемых уравнениями $z = \psi_{m,i}(f)$, где $\psi_{m,i} : U \to \boldsymbol{P}^1$ — голоморфная функция. Семейство $\{\psi_{m,i}\}$ обладает следующими свойствами: (i) если $\psi_{m,i}(f_0) = \psi_{k,j}(f_0)$, то $\psi_{m,i} = \psi_{k,j}$; (ii) семейство $\{\psi_{m,i}\}$ нормально; (iii) если $m \geqslant 1$, то $A\psi_{m,i} = \psi_{m-1,j}$, где $j = j(m, i)$, A преобразует функцию $\varphi(f)$ в функцию $f(\varphi(f))$; (iv) множество Жюлиа $F(f)$ содержится в предельном множестве для $\{\psi_{m,i}(f)\}_{m,i}$. Из этих свойств так же, как и при доказательстве основной леммы, вытекает, что любая функция f из U является P-устойчивой, т. е. $U \subset \sigma$.

Напомним, что *цикл* $\{f^i z\}_{i=0}^{p-1}$ *мы называем поглощающим, если он содержится в орбите некоторой критической точки. Поглощающий цикл будем называть устранимым, если на каждой неприводимой компоненте* Z *множества* X_p, *проходящей через точку* (f, z), *есть такая точка* (g, ζ), *сколь угодно близкая к* (f, z), *что* $\{g^i \zeta\}_{i=0}^{p-1}$ *не является поглощающим циклом.* Если в семействе M имеется хотя бы одна функция f_0 без поглощающих циклов, то любой поглощающий цикл функции $f \in M$ устраним. Через S обозначим множество функций $f \in M$, обладающих устранимым отталкивающим поглощающим циклом.

Следствие 2.7. *Множество S является плотным подмножеством в K.*

Доказательство. Поглощение орбиты критической точки отталкивающим циклом является P-инвариантным свойством. Но если $f \in S$, то это свойство нарушается малым возмущением функции f. Следовательно, $S \subset K$.

Пусть теперь $f_0 \in K$ и $\{f_0^k z^0\}_{k=0}^{p-1}$ — непоглощающий отталкивающий цикл функции f_0. Тогда в окрестности точки (f_0, z_0) множество $f^p z = z$ допускает голоморфную параметризацию $z = \varphi(f)$. Из предыдущей леммы следует, что сколь угодно близко от f_0 есть такая функция f, что цикл точки $\varphi(f)$ поглощает орбиту некоторой критической точки функции f. Этот цикл является отталкивающим, если f достаточно близка к f_0 и является устранимым, так как цикл точки z_0 непоглощающий. Следовательно, множество S плотно в K.

3. Устойчивость орбиты критической точки. Рассмотрим аналитическое множество критических точек $C = \{(f, c) \in M \times \boldsymbol{P}^1 \mid \mathcal{D}f(c) = 0\}$ и последовательность голоморфных функций $\psi_m : C \to \boldsymbol{P}^1$ на нем: $\psi_m : (f, c) \to f^m c$. Эта последовательность отвечает за зависимость орбиты критической точки от параметров системы. Так как ее изучение практически не использует специфику возникновения множества C, то мы рассмотрим более общую ситуацию.

Пусть f_x — семейство рациональных функций, голоморфно зависящее от точки x аналитического пространства Z. Мы будем предполагать далее, что Z локально неприводимо. Рассмотрим последовательность голоморфных функций $\psi_m : Z \to \boldsymbol{P}^1$, удовлетворяющую рекуррентному уравнению $\psi_{m+1}(x) = f_x(\psi_m(x))$ (или сокращенно $\psi_{m+1} = f(\psi_m)$). Мы далее считаем, что последовательность $\{\psi_m\}$ не является периодической, начиная с некоторого места (этот случай тривиален). Точка $x \in Z$ называется *регулярной*, если семейство $\{\psi_m\}$ нормально в некоторой ее окрестности. Множество регулярных точек обозначим через $\mathfrak{R}$, а его дополнение через L. Основой изучения этой последовательности служит признак нормальности Монтеля, сформулированный в начале второго раздела.

Мы опустим доказательство следующего простого факта.

Предложение 3.1. *Предположим, что орбита $\{\psi_m(x_0)\}$ сходится к притягивающему циклу $\{z_0^{(i)}\}_{i=0}^{p-1}$ функции $f_0 \equiv f_{x_0}$. Тогда а) $x_0 \in \mathfrak{R}$; б) орбита $\{\psi_m(x)\}$ также сходится к притягивающему циклу функции f_x, если x лежит в компоненте связности $\mathfrak{R}_0$ множества $\mathfrak{R}$, содержащей точку x_0; в) предельные функции семейства $\{\psi_m(x)\}$ в компоненте $\mathfrak{R}_0$ — это голоморфные ветви кривой $X_p = \{(x, z) \in Z \times \boldsymbol{P}^1 \mid f_x^p(z) = z\}$, проходящие через точки $(x_0, z_0^{(i)})$.*

Связные компоненты множества $\mathfrak{R}$, на которых имеет место описанная ситуация, будем называть *компонентами первого рода*, а остальные — *компонентами второго рода*.

Рассмотрим цикл $\rho = \{f_0^i z_0\}_{i=0}^{p-1}$ функции $f_0 \equiv f_{x_0}$ порядка p с мультипликатором λ. Напомним, что этот цикл мы называем *устранимым нейтральным*, если $|\lambda| = 1$ и функция $\lambda_p(x, z)$ отлична от const на всех неприводимых компонентах множества X_p, проходящих через точку (f_0, z_0).

Предложение 3.2. *Предположим, что имеет место одна из возможностей: а) цикл ρ — отталкивающий; б) ρ — устранимый нейтральный иррациональный цикл; в) ρ — нейтральный рациональный цикл. Пусть цикл ρ поглощает орбиту $\{\psi_m(x_0)\}$. Тогда $x_0 \in L$. При этом в случае а ни одна подпоследовательность $\{\psi_{m_k}\}$ не является нормальной в окрестности точки x_0.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $z_0 = 0$, z_0 является неподвижной точкой функции f_0, причем в случае b ее мультипликатор равен 1. Кроме того, заменяя функцию ψ_0 на некоторую функцию ψ_l, можно считать, что $\psi_0(x_0) = 0$. Так как $\psi_1 \not\equiv \psi_0$, то существует голоморфная кривая $x = \gamma(w)$ $(\gamma(0) = x_0)$ в Z, не содержащаяся в множестве $\psi_1(x) = \psi_0(x)$. Ограничив семейство f_x и последовательность $\{\psi_m\}$ на эту кривую, мы получим голоморфную функцию $f_w(z)$ в окрестности $(0, 0)$ в $\boldsymbol{C}^2$ $(f_0(0) = 0,\ f_0'(0) = \lambda)$ и последовательность $\{\psi_m(w)\}$ голоморфных функций, удовлетворяющую рекуррентному соотношению $\psi_{m+1}(w) = f_w(\psi_m(w))$, причем $\psi_m(0) = 0$, $\psi_1 \not\equiv \psi_0$. Предположим, что последовательность $\{\psi_m\}$ нормальна.

Последовательность $\{\psi_m\}$ — это траектория бесконечномерной динамической системы, преобразующей функцию ψ в функцию $f(\psi)$. Если $\lambda \neq 1$, то эта система обладает неподвижной точкой h. Удобно превратить h в начало координат. Положим $X = \psi - h$. Имеем: $Y = f(X) - h = f'(h)X + \frac{1}{2!}f''(h)X^2 + \cdots$ Перепишем это преобразование в координатах $X = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k w^{k+1}$, $Y = \sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k w^{k+1}$. Получим $y_k = \lambda x_k + g_k(x_0 \ldots x_{k-1}) + G_k(x_0 \ldots x_{k-1})$, где g_k — линейная форма, а полином G_k не содержит линейных членов и свободного члена. Треугольная форма позволяет явно решать нашу систему. Через $x_k^{(m)}$ обозначим коэффициенты функции $X_m = \psi_m - h$.

а) $|\lambda| > 1$. Если подпоследовательность $\{\psi_{m_k}\}$ нормальна, то подпоследовательность $\{x_0^{(m_k)}\}$ ограничена. Тогда из уравнения $x_0^{(m+1)} - \lambda x_0^{(m)} = 0$ следует, что $x_0^{(m)} = 0$ $(m = 0, 1, \ldots)$. Предполагая, что $x_i^{(m)} = 0$ $(i < k)$, получаем для $x_k^{(m)}$ уравнение $x_k^{(m)} - \lambda x_k^{(m-1)} = 0$, откуда заключаем, что $x_k^{(m)} = 0$. Следовательно, $X_m = 0$, т. е. $\psi_m = h$. Противоречие. *б)* Предположим по индукции, что $g_{k-1}(x_0 \ldots x_{k-2}) = 0$ и $x_i^{(m)} = \lambda^m x_i + \sum\limits_{j \geqslant 2} c_j \lambda^{jm}$ $(i < k)$ (сумма конечна, $x_i \equiv x_i^{(0)}$). Тогда последовательность $\{x_k^{(m)}\}_m$ удовлетворяет линейному неоднородному уравнению, в правой части которого стоит комбинация прогрессий со знаменателями $\neq 1$ (так как λ — не корень из 1):

$$x_k^{(m+1)} - \lambda x_k^{(m)} = \lambda^m g_k(x_0 \ldots x_{k-1}) + \sum_{j \geqslant 2} d_j \lambda^{jm}.$$

Отсюда находим $x_k^{(m)} = \lambda^m x_k + k\lambda^m g_k(x_0 \ldots x_{k-1}) + \sum\limits_{j \geqslant 2} e_j \lambda^{jm}$. Ограниченность $\{x_k^{(m)}\}_m$ и стоящей справа суммы влечет равенство $g_k(x_0 \ldots x_{k-1}) = 0$ и требуемый для индукции вид $x_k^{(m)}$.

Но формы $g_k(x_0 \ldots x_{k-1}) + \lambda x_k$ задают в координатах линейную часть нашей системы, т. е. $X \to f'(h) X$. Следовательно, $(f'(h) - \lambda) X_0 \equiv 0$. Так как z_0 — устранимая нейтральная периодическая точка, то $f'(h) \neq \lambda$. Следовательно, $X_0 = 0$, т. е. $\psi_0 = h$. *в*) Если $\lambda = 1$, то мы не можем, вообще говоря, голоморфно параметризовать кривую $f(z, w) = z$. Поэтому приходится действовать в исходных координатах: $\psi_m(w) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k^{(m)} w^k$. Тогда $x_k^{(m+1)} - x_k^{(m)} = \alpha_k + h_k(x_0^{(m)} \ldots x_{k-1}^{(m)})$, где свободный член полинома h_k равен нулю. Отсюда очевидной индукцией по k (с использованием ограниченности $\{x_k^{(m)}\}_m$) вытекает, что $x_k^{(m)} = \text{const} = x_k$. Следовательно, $\psi_1 = \psi_0$. Противоречие.

Положим $\Psi(x) = \overline{\{\psi_m(x)\}}$. Будем говорить, что функция f_x *Ψ-устойчива*, если $f_x \mid \Psi(x)$ и $f_y \mid \Psi(y)$ топологически сопряжены при y, достаточно близких к x и сопрягающий гомеоморфизм непрерывно зависит от y. Через B обозначим множество таких регулярных значений параметра x, для которых орбита $\{\psi_m(x)\}$ конечна. Определение тонкого множества см. [8].

Теорема 3.1. *а) Если U — компонента первого рода множества $\mathfrak{K}$, то $U \cap B$ — объединение двух тонких множеств. б) Если U — компонента второго рода, то $U \cap B$ — тонкое замкнутое подмножество в U; в) Множество B нигде не плотно в $\mathfrak{K}$: 2) Множество Ψ-устойчивых значений параметра совпадает с $\mathfrak{K} \setminus B$.*

Доказательство. Аналитическое множество $\Gamma_{m,p}\,(p > 0)$, заданное в Z уравнением $\psi_{m+p}(x) = \psi_m(x)$, не совпадает с Z, так как мы предполагаем, что последовательность $\{\psi_m\}$ бесконечна. Следовательно, множество $B = \bigcup \Gamma_{m,p} \cap \mathfrak{K}$ имеет первую категорию по Бэру. Таким образом, $\mathfrak{K} \setminus B$ плотно в $\mathfrak{K}$.

Зафиксируем связную компоненту U множества $\mathfrak{K}$. Рассмотрим односвязную область V, компактно содержащуюся в U. Пусть $x' \in V \cap \Gamma_{m,p}$. Тогда из предложения 3.2 вытекает, что $z' = \psi_m(x')$ является притягивающей или неустранимой нейтральной периодической точкой. При этом существует голоморфная функция $\varphi: V \to \boldsymbol{P}^1$, параметризующая ветвь поверхности X_p, проходящую через точку (x', z'). Таких функций может быть лишь конечное число, так как общее число притягивающих и нейтральных циклов не превосходит $\eta(n)$. Обозначим эту конечную систему функций через T.

Рассмотрим аналитическое множество Δ_m^φ, заданное в V уравнением $\psi_m(x) = \varphi(x)$. Мы показали, что $B \cap V = \bigcup_{\varphi \in \tau} \bigcup_m \Delta_m^\varphi$. Проверим, что $\Delta^\varphi \equiv \bigcup_m \Delta_m^\varphi$ обладает свойствами а), б) при фиксированной функции $\varphi \in \tau$. При этом можно считать, что $\varphi(x)$ — неподвижная точка для f_x. Тогда $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \ldots$ (индекс φ мы опускаем). Предположим, что последовательнсcть $\{\Delta_m\}$ имеет предельную точку $x_0 \in V$. Пусть ψ — произвольная предельная функция для нормального семейства $\{\psi_m\}$. Тогда $\varphi | \Delta_m = \psi | \Delta_m$. По теореме единственности $\varphi = \psi$. Следовательно, $\psi_m \to \varphi$.

Рассмотрим, далее, аналитическое множество Λ «прообразов», заданное в $V \times \boldsymbol{P}^1$ уравнением $f(x, z) = \varphi(x)$. Предположим, что $(x_0, \varphi(x_0))$ не является особой точкой этого множества. Тогда через точку $(x_0, \varphi(x_0))$ проходит единственная локальная компонента множества Λ, а именно график $z = \varphi(x)$. Так как $\psi_m \to \varphi$, то графики $z = \psi_m(x)$ не пересекаются с остальными компонентами (в некоторой окрестности $W \ni x_0$ и при $m \geqslant N$). Но тогда $\Delta_{m+1} \cap W = \Delta_m \cap W$ $(m \geqslant N)$, вопреки тому, что x_0 — точка сгущения для $\{\Delta_m\}$. Следовательно, $(x_0, \varphi(x_0))$ — особая точка множества Λ. Этим доказано, что Δ_m — объединение двух тонких множеств.

Заметим, наконец, что если $(x_0, \varphi(x_0))$ — особая точка поверхности Λ, то $\varphi(x_0)$ — суперпритягивающая неподвижная точка для f_{x_0} и, следовательно, U — компонента первого рода. Пункты *а* и *б* доказаны. Пункт *в* непосредственно следует из *а* и *б*. Доказательство пункта *г* (в нетривиальную сторону) проводится так же, как в основной лемме при помощи следующих свойств семейства $\{\psi_m\}$ в $U \setminus B$: (*i*) $\psi_m(x) \neq \psi_l(x)$ $(m \neq l)$: (*ii*) семейство $\{\psi_m\}$ нормально: (*iii*) семейство $\{\psi_m\}$ инвариантно относительно преобразования $A: \varphi \mapsto f(\varphi)$.

Следующий результат дополняет предложение 3.2. Его постановка связана с тем, что любой нейтральный цикл, лежащий в множестве Жюлиа, содержится в предельном множестве орбиты некоторой критической точки. Спрашивается, может ли поведение этой орбиты быть устойчивым по параметру?

Предложение 3.3. *Пусть z_0 — устранимая нейтральная периодическая точка функции f_{x_0}. Предположим, что $z_0 \in \overline{\{\psi_m(x_0)\}_m}$.* Тогда $x_0 \in L$.

Доказательство. Предположим, что $x_0 \in \mathfrak{R}$, U — связная компонента множества $\mathfrak{R}$, содержащая точку x_0. Тогда U — компонента второго рода (так как $z_0 \in \Psi(x_0)$), а функция $f_{x_0}\Psi$ — устойчива. Следовательно, существует такая голоморфная функция $z = h(x)$ в окрестности точки x_0, что $z_0 = h(x_0) \mapsto h(x)$ при построенной в теореме 3.1 Ψ-сопряженности. Отсюда вытекает, что функция $z = h(x)$ параметризует ветвь множества $f_x^p(z) = z$ (p — порядок точки x_0), проходящую через (x_0, z_0). Так как z_0 — устранимая нейтральная точка, то $z' = h(x')$ порождает притягивающий цикл при некотором x', причем $z' \in \Psi(x')$. Следовательно, U — компонента первого рода. Противоречие.

Через $S_{p, m}$ обозначим множество тех x, для которых $\psi_m(x)$ — отталкивающая периодическая точка порядка p. Мы знаем, что $S_{p, m} \subset L$.

Лемма 3.1. *Любое иррегулярное значение параметра $x_0 \in L$ является точкой сгущения множеств $S_{p, m}$.*

Доказательство. Рассмотрим какой-нибудь отталкивающий цикл $\{z_0^{(i)}\}_{i=0}^{p-1}$ функции f_0 порядка $p \geqslant 3$, такой что $f_0 \notin S_{p,m}$. Пусть $z^{(i)} = h_i(x)$ — параметризация кривой X_p в окрестности точки $(x_0, z_0^{(i)})$. По теореме Монтеля в любой окрестности точки x_0 одно из уравнений $\psi_m(x) = h_i(x)$ имеет корень.

Из леммы вытекает

Предложение 3.4. *L — множество локальной единственности.*

Рассмотрим теперь голоморфную функцию g в некоторой области U. Мы будем говорить, что g — *исключительная функция*, если $g(x)$ — исключительная точка отображения f_x при всех $x \in U$. Исключительных функций существует не более двух. Через $E_m^{(g)}$ обозначим множество, заданное уравнением $\psi_m(x) = g(x)$.

Предложение 3.5. *Пусть g — не исключительная функция, $x_0 \in L$. Тогда существует последовательность $y_m \to x_0$,* такая что $y_m \in E_m^{(g)}$.

Доказательство. Предполагая противное, найдем окрестность U точки x_0 и последовательность $m_k \nearrow \infty$, такие что $E_{m_k} \cap U = \varnothing$. В окрестности U найдется такое значение параметра x', что $z' = h(x')$ — не исключительная точка для $f_{x'}$. Тогда при некотором l имеем $|f_{x'}^{-l} z'| \geqslant 3$. Следовательно, множество Λ, заданное в $U \times \boldsymbol{P}^1$ уравнением $f_x^l(z) = h(x)$ является k — листным разветвленным накрытием над U, где $k \geqslant 3$. Множество ветвления $\Gamma \subset U$, являясь тонким, не покрывает все $U \cap L$. Найдем $x'' \in (U \cap \cap L) \setminus \Gamma$. Над окрестностью точки x'' множество Λ распадается в объединение графиков $k \geqslant 3$ функций. По теореме Монтеля семейство $\{\psi_{m_k}\}$ нормально в этой окрестности, вопреки предложению 3.2.

В заключение рассмотрим основной частный случай.

Пусть C — аналитическое пространство, заданное в $M \times \boldsymbol{P}^1$ уравнением $Df(c) = 0$. Чтобы были применимы результаты настоящего раздела заменим C на его нормализацию p: $\hat{C} \to C$, которая уже является локально неприводимым пространством. Пусть $\hat{\pi} = \pi p$: $\hat{C} \to M$. В качестве последовательности ψ_m рассмотрим поднятие на $\hat{C}$ последовательности функций $(f, c) \mapsto f^m c$. Множество $\mathfrak{R}$ плотно в $\hat{C}$. Действительно, если $x \in L$, то в любой окрестности x есть корень уравнения $\psi_m(x) = c(px)$. Это значит, что критическая точка c функции f (где $(f, c) = px$) порождает супер-притягивающий цикл и, следовательно, $x \in \mathfrak{R}$.

Следующий факт связывает результаты второго и третьего разделов:

Теорема 3.2. *Для того чтобы функция $f \in M$ была P-устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы $\hat{\pi}^{-1} f \in \mathfrak{R}$.*

Доказательство непосредственно получается сравнением предложения 2.7 и леммы 3.1.

4. Типичные свойства неустойчивых функций. Примеры. Пусть, по-прежнему, f_x — семейство рациональных функций, голоморфно зависящее от параметра $x \in Z$, где Z — аналитическое пространство. Предположим, что некоторая функция $f_0 \equiv f_{x_0}$ имеет инвариантное отталкивающее множество (см. раздел 1). Тогда в некоторой окрестности U точки x все функции f_x также имеют инвариантное отталкивающее множество Λ_x, такое, что $f_0 | \Lambda_0$ и $f_x | \Lambda_x$ топологически сопряжены (на самом деле это справедливо для любых гладких отображений, C^1 — близких к f_0 [10]). При этом сопрягающий гомеоморфизм $h_x : \Lambda_0 \to \Lambda_x$ непрерывно зависит от x.

Лемма 4.1. *Предположим, что в множестве Λ_0 плотны периодические точки функции f_0. Тогда $h_x(a)$ аналитически зависит от x при каждом фиксированном $a \in \Lambda_0$.*

Доказательство. Пусть сначала a — периодическая точка функции f_0, p — ее порядок. Тогда $z = h_x(a) \in \Lambda_x$ является отталкивающей периодической точкой функции f_x. Следовательно, $(x, h_x(a))$ не является точкой ветвления поверхности $f_x^p z = z$, а непрерывная функция $z = h_x(a)$ параметризует ветвь этой поверхности, проходящую через точку (x_0, a). Но такая параметризация автоматически является аналитической. Наконец, если a — произвольная точка множества Λ_0, то функция $h_x(a)$ является равномерным пределом функций $h_x(a_i)$, где $a_i \in P(f_0)$, так как периодические точки плотны в Λ_0, а отображение $(x, a) \mapsto h_x(a)$ непрерывно по совокупности переменных.

Мы будем говорить, что *g — орбита $\{g^m \zeta\}$ точки ζ копирует f-орбиту $\{f^m z\}$ точки z, если отображение $f^m z \mapsto g^m \zeta$ продолжается до гомеоморфизма замыканий наших орбит.* Следующий результат позволяет строить примеры рациональных функций с предписанным поведением траектории критической точки.

Предложение 4.1. *Пусть Λ_0 — инвариантное отталкивающее множество функции $f_0 \equiv f_{x_0}$, $a \in \Lambda_0 \subset P(f_0)$. Тогда сколь угодно близко к x_0 существует такое значение параметра $x \in Z$, что при некотором N орбита $\{\psi_{m+N}(x)\}_{m=0}^{\infty}$ копирует орбиту $\{f_0^m a\}_{m=0}^{\infty}$.*

Доказательство. Одно из уравнений $\psi_N(x) = h_x(a)$ имеет решение в любой окрестности точки x_0 (предл. 3.5. и предыдущая лемма). Гомеоморфизм $h_x : \Lambda_0 \to \Lambda_x$ дает нужное сопряжение.

Подмножество локально компактного метрического пространства L называется массивным, если оно содержит плотное в L

подмножество типа G_δ (пересечение счетного числа открытых множеств). Далее некоторое свойство будем называть типичным, если оно выполняется на массивном подмножестве значений параметра.

Теорема 4.1. *Для типичного иррегулярного значения параметра $x \in L$ орбита $\{\psi_m(x)\}$ содержится в множестве Жюлиа $F(f_x)$ и плотна в нем.*

Доказательство. Через $\rho_p(x)$ обозначим сферическое расстояние от орбиты $\{\psi_m(x)\}$ до самой далекой отталкивающей периодической точки функции f_x порядка p. Мы покажем, что $\rho_p = 0$ на массивном подмножестве в L. Множество Λ_p тех значений параметра $x \in L$, для которых f_x обладает устранимым нейтральным циклом, нигде не плотно в L. Поэтому достаточно проверить, что в некоторой окрестности U любой точки $x_0 \in L \setminus \Lambda_p$ свойство $\rho_p = 0$ типично. Пусть $a_1, \ldots, a_l$ — отталкивающие периодические точки функции f_0, $z = \varphi_{p,i}(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$ — параметризация кривой $f_x^p z = z$ в окрестности точки (x_0, a_i). Окрестность U выберем так, чтобы она не пересекалась с множеством Λ_p (множество Λ_p замкнуто). Тогда $\{\varphi_{p,i}(x)\}_{i=1}^{l}$ — это полный набор отталкивающих периодических точек функции f_x порядка p. Рассмотрим в окрестности U функцию $\rho_{p,i}^{(m)}(x) = d(\varphi_{p,i}(x), \ \psi_m(x)\}$ (d — сферическая метрика). Так как $\rho_{p,i}^{(m)}$ непрерывна, то функция $\rho_{p,i}(x) = \inf\limits_{1 \leqslant m < \infty} \rho_{p,i}^{(m)}(x)$ полунепрерывна сверху. Но множество нулей неотрицательной полунепрерывной функции есть множество типа G_δ. С другой стороны, это множество плотно в $U \cap L$, так как содержит те значения параметра, при которых отталкивающий цикл точки $\varphi_{p,i}(x)$ поглощает орбиту $\{\psi_m(x)\}$. Следовательно, свойство $\rho_{p,i}(x) = 0$ типично в $U \cap L$. Но тогда свойство $\rho_p(x) \equiv \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant l} \rho_{p,i}(x) = 0$ также типично в $U \cap L$, а значит, и на всем множестве L. Наконец, отсюда вытекает, что $\rho(x) \equiv \sup \rho_x(x) = 0$ на массивном подмножестве в L. Но $\rho(x) = 0$ означает, что все отталкивающие циклы функции f_x содержатся в замыкании орбиты $\{\psi_m(x)\}$, т. е. $F(f_x) \subset \overline{\{\psi_m(x)\}}$.

Для доказательства обратного включения рассмотрим функцию $r_p(x)$ — расстояние от точки $\psi_0(x)$ до ближайшей отталкивающей точки функции f_x порядка p. Функция $r_p(x)$ полунепрерывна сверху (так как отталкивающие циклы не исчезают) и, следовательно, функция $r(x) = \inf r_p(x)$ полунепрерывна сверху. Отсюда вытекает, что $r(x)$ обращается в нуль на множестве типа G_δ. С другой стороны, это свойство выполняется на плотном подмножестве (в L) тех значений параметра, для которых орбита $\{\psi_m(x)\}$ поглощается отталкивающим циклом.

Пример 1. $f_w(z) = z^2 + w$ $(w \in \boldsymbol{C})$. Это семейство при вещественных значениях параметра w (и вещественной переменной z) интенсивно изучалось в последнее время. Характер бифуркаций в комплексной ситуации описан в работах [11, 12]. Мы ограничимся одним метрическим свойством.

Предложение 4.2. *Для типичного иррегулярного значения параметра $w \in K$ лебегова мера множества Жюлиа $F(f_w)$ равна 0.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{D}_\infty(w) = \{z \mid f_w^m z \to \infty\}$ область притяжения ∞ функции f_w, $\Gamma_m(w) = \{z \mid |f_w^m z| \leqslant 2\}$. Легко показать, что при $w \in K$ $\boldsymbol{C} \setminus \mathscr{D}_\infty(w) = \bigcap_m \Gamma_m(w)$. Рассмотрим функцию $\rho_m(w) = \lambda(\Gamma_m(w))$, где λ — лебегова мера. Так как ρ_m непрерывна, то функция $\lambda(\boldsymbol{C} \setminus \mathscr{D}_\infty(w)) = \inf \rho_m(w)$ полунепрерывна сверху и, следовательно, обращается в нуль на множестве типа G_δ. С другой стороны, если орбита критической точки 0 поглощается отталкивающим циклом, то $\lambda(\boldsymbol{C} \setminus \mathscr{D}_\infty(w)) = 0$ [13]. Следовательно, свойство $\lambda(\boldsymbol{C} \setminus \mathscr{D}_\infty(w)) = 0$ типично. Тем более типично свойство $\lambda(F(f_w)) = 0$.

Пример 2. $f_\lambda(z) = \lambda z + z^2 + \ldots$ $(|\lambda| = 1)$. Это классический пример, рассмотренный Зигелем. По теореме Зигеля для почти всех значений λ на единичной окружности S^1 функция f_λ аналитически приводится к повороту.

Предложение 4.3. *Для типичного (в топологическом смысле) значения $\lambda \in S^1$ функция f_λ не приводится к повороту.*

Доказательство. Рассмотрим снова функцию $\rho_{(\lambda)}$ — расстояние от точки $z = 0$ до ближайшей отталкивающей периодической точки функции f_λ. Так же, как и ранее, убедимся в том, что функция $\rho(\lambda)$ полунепрерывна сверху и, следовательно, $\rho(\lambda)$ на множестве типа G_δ. Но обращение $\rho(\lambda)$ в нуль эквивалентно неприводимости к повороту функции f_λ. Остается заметить, что множество нулей функции $\rho(\lambda)$ плотно на единичной окружности, так как содержит все корни из 1.

Пример 3. $f_w(z) = 1 + wz^{-2}$ $(w \in \boldsymbol{C} \setminus 0)$. Функция f_w имеет две критические точки: 0 и ∞, причем $0 \mapsto \infty \mapsto 1$. Поверхность Z состоит из двух плоскостей с проколами: $Z_1 = \{(w, 0) \mid w \in \boldsymbol{C} \setminus 0\}$, $Z_2 = \{(w, \infty) \mid w \in \boldsymbol{C} \setminus 0\}$, причем точка $(w, 0)$ регулярна, когда точка (w, ∞) регулярна. Следовательно, множество $L \subset Z$ иррегулярных точек естественно отождествляется с множеством $K \subset \boldsymbol{C} \setminus 0$ неустойчивых значений параметра w. Множество K непусто. Например, при $w = 4/27$ функция f_w обладает устранимой кратной неподвижной точкой $z = 2/3$ и, следовательно, $4/27 \in K$. Таким образом, K совершенное нигде не плотное множество.

Предложение 4.4. *Для типичного иррегулярного значения параметра $w \in K$ множество Жюлиа функции $f_w(z) = 1 + wz^{-2}$ совпадает со всей сферой. При этом орбиты критических точек 0, ∞ плотны на сфере.*

Доказательство. Рассмотрим множество $S \subset K$ тех значений параметра, при которых орбита $\{f_w^m 1\}$ поглощается отталкивающим циклом. Это счетное, плотное в K множество, для которого по следствию 1.2 $F(f_w) = \boldsymbol{P}^1$. С другой стороны, покажем, что условие $F(f_w)=\boldsymbol{P}^1$ выделяет в K подмножество типа G_δ. Действительно, пусть $\{a_i\}$ — счетное плотное подмножество сферы, $\rho_{m.i}(w)$ — расстояние от a_i до ближайшей отталкивающей периодической точки периода m. Так как $\rho_{m,i}$ полунепрерывна сверху, то функция $\rho_i=\inf\limits_{1\leqslant m<\infty}\rho_{m,i}$ полунепрерывна сверху и, следовательно, ρ_i обращается в нуль на множестве типа G_δ. Но тогда множество общих нулей функций ρ_i также является множеством типа G_δ. Но свойство $\rho_i(w)=0$ $(i=1,2\ldots)$ эквивалентно тому, что $F(f_w)=\boldsymbol{P}^1$.

Наконец, по теореме 4.1 орбита $\{f_w^m 1\}$ плотна в множестве $F(f_w)$ для типичного значения параметра w. Что и требовалось.

Ранее известные примеры функций со свойством $F(f)=\boldsymbol{P}^1$ были основаны на поглощении орбит критических точек отталкивающими циклами [5, 14]. Недавно автору стало известно, что Эрман построил континуум попарно топологически несопряженных рациональных функций, обладающих свойством $F(f)=\boldsymbol{P}^1$. Покажем, что в нашем семействе $1+wz^{-2}$ присутствует такой континуум.

Рассмотрим значение $w_0=4/27$ параметра, при котором функция $f_{w_0}\equiv f_0$ имеет кратную неподвижную точку $z_0=2/3$. Легко найти две точки $a<0<b$, такие что $f_0[0,b]=[-\infty,0]$, $f_0[a,0]=[-\infty,b]$. При этом $|f_0(x)|\geqslant\lambda>1$ при $x\in[a,0]\cup[0,b]$. Рассмотрим инвариантное множество $\Lambda=\{x\mid f^m x\in[a,b]\ (m=0,1,\ldots)\}$. Каждой точке $x\in\Lambda$ можно сопоставить последовательность $hx=(\varepsilon_0,\varepsilon_1\ldots)$ из нулей и единиц следующим образом: $\varepsilon_m=0$, если $f^m x\in[a,0]$ и $\varepsilon_m=1$, если $f^m x\in[0,b]$. Это соответствие установит топологическое сопряжение между $f|\Lambda$ и сдвигом σ на односторонней топологической марковской цепи $\sum_A^+$ с матрицей переходов $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$. Инвариантное множество Λ будет отталкивающим, так как $|f'(x)|\geqslant\lambda>1$ на Λ. Тогда по предложению 4.1 мы можем найти значение параметра w, такое что орбита $\{f_w^{m+N}\}_{m=0}^\infty$ будет копировать орбиту $\{f_0^m x\}_{m=0}^\infty$ любой точки $x\in\Lambda$, которая в свою очередь копирует орбиту $\{\sigma^m(hx)\}_{m=0}^\infty$ точки $hx\in\sum_A^+$. При этом точка $f_w^N 1$ будет лежать в некотором отталкивающем множестве Λ_w функции f_w. По предложению 1.1 $F(f_w)=\boldsymbol{P}^1$. Итак, мы имеем.

Предложение 4.5. *Для любой точки $y\in\sum_A^+$ найдется такое значение параметра w и такое N, что орбита $\{f_w^{m+N}1\}_{m=0}^\infty$ функции $f_w=1+wz^{-2}$ копирует орбиту $\{\sigma^m y\}_{m=0}^\infty$, а множество Жюлиа $F(f_w)$ совпадает со всей сферой.*

Это дает континуальный запас функций, попарно топологически несопряженных и обладающих свойством $F(f_w)=\boldsymbol{P}^1$. Действительно, если функции f_{w_1} и f_{w_2} топологически сопряжены, то асимптотическое распределение орбит $\{f_w^m 1\}$ должно быть одинаковым. Рассмотрим на $\sum_A^+$ марковскую меру μ_p с матрицей переходов $\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $(0 \leqslant p \leqslant 1/2)$. Динамические системы (σ, μ_p) попарно неизоморфны, так как у них разные энтропии. Пусть x_p — типичная точка для системы (σ, μ_p) $\left(\text{т. е. } \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \varphi(\sigma^k x_p) \to \int \varphi d\mu_p\right.$ для любой непрерывной функции φ на $\sum_A^+$. Мы знаем, что существует рациональная функция $f_{w_p} = 1 + w_p z^{-2}$, у которой $F(f_{w_p}) = \boldsymbol{P}^1$, а орбита $\{f_{w_p}^{m+N_p} 1\}_{m=0}^{\infty}$ копирует орбиту $\{\sigma^m x_p\}_{m=0}^{\infty}$. Функции f_{w_p} попарно топологически не сопряжены.

Список литературы: 1. *Fatou P.* Sur les equations fonctionelles.— Bull. Soc. Math. France, 1920, **48**, p. 208—314. 2. *Левин Г. М.* О нерегулярных значениях параметра семейства полиномиальных отображений.— Усп. мат. наук, 1981, **36**, № 6, с. 219—220. 3. *Mañe R., Sad P., Sullivan D.* On the dynamics of rational maps.— Preprint, IHES, 1982—36 с. 4. *Любич М. Ю.* Некоторые типичные свойства динамики рациональных функций.— Усп. мат. наук 1983, **38**, № 5. 5. *Монтель П.* Нормальные семейства аналитических функций.— М.; Л.: НКТП СССР, 1936.—213 с. 6. *Lyubič M.* Entropy properties of rational endomorphisms of Riemann sphere.— Dyn. Syst. and Erg. Fh., 1982, **2**, № 7. *Sullivan D.* Iteration des fonctions analytiques complexes.— C. R. Acad, Sci., 1982, **294**, № 9, p. 301—304. 8. *Ганнинг Р., Росси Х.* Аналитические функции многих комплексных переменных.— М.: Мир, 1969.— 395 с. 9. *Kobayashi S.* Hyperbolic manifolols and holomorphic maps.— Pure and Appl. Math., Dekker, New York, 1970.—153 с. 10. *Каток А. Б.* Локальные свойства гиперболических множеств.— В кн.: Нитецки. Введение в дифференциальную динамику, М.: Мир, 1975.— 302 с. 11. *Левин Г. М.* О последовательности бифуркаций однопараметрического семейства отображений.— Усп. мат. наук, 1981, **37**, № 3, с. 189—190. 12. *Douady A., Hubbard H.* Iteration des polynomes quadratiques complexes.— C. R. Acad. Sci., 1982, **294**, № 3, p. 123—126. 13. *Любич М. Ю.* О типичном поведении траекторий рационального отображения сферы.— Докл. АН СССР, 1983, № 268, с. 58—70. 14. *Guckenheimer I.* Endomorphisms of the Riemann sphere.— Proc. Symp. Pure Math., 1970, **14**, „Global Analysis", p. 95—124.

Поступила в редколлегию 14.12.82.