УДК 503.88

И. К. ЛИФАНОВ

О ПРОИЗВЕДЕНИИ ОДНОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1. В аэродинамике задача обтекания прямоугольного крыла стационарным потоком идеальной несжимаемой жидкости может быть приведена [1] к рассмотрению следующего сингулярного интегрального уравнения:

$$\int_{-b}^{b}\int_{-l}^{l} \frac{\partial\gamma(x, z)}{\partial z} \frac{x - x_0 + \sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}}{(x - x_0)(z - z_0)}\, dx\, dz = f(x_0, z_0). \qquad (1)$$

Так как уравнение (1) пока не исследовано, то желательно изучить сингулярные интегральные уравнения с двукратными сингулярными интегралами типа Коши аналогичного вида, например

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{K(x_0, z_0, x, z)}{(x-x_0)(z - z_0)} \gamma(x, z)\, dx\, dz = f(x_0, z_0), \qquad (2)$$

где $K(x_0, z_0, x, z)$ удовлетворяет условию Гёльдера [2] на квадрате и $K(x_0, z_0, x_0, z_0) \neq 0$ для любой точки $M(x_0, z_0)$ квадрата $I^2 = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Однако, как и для одномерных сингулярных уравнений [2], прежде чем изучать уравнения общего вида, надо изучить характеристические сингулярные интегральные уравнения с кратными интегралами типа Коши;

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\gamma(x, y)\, dx\, dy}{(x - x_0)(y - y_0)} = f(x_0, y_0). \qquad (3)$$

Будем рассматривать сингулярное интегральное уравнение (3) и тогда, когда область интегрирования будет произведением $L_1 \times L_2$, где L_1 и L_2 — отрезок или окружность. Более того, рассмотрим также некоторые характеристические сингулярные интегральные уравнения второго рода с кратными интегралами типа Коши.

2. Рассмотрим одномерное характеристическое сингулярное интегральное уравнение второго рода:

$$a\gamma(t_0, \tau) + \frac{b}{\pi}\int\limits_L \frac{\gamma(t, \tau)\, dt}{t - t_0} = f(t_0, \tau), \tag{4}$$

где a, b — действительные константы, $a^2 + b^2 = 1$, $b \neq 0$, L — отрезок $[-1,1]$ или окружность единичного радиуса с центром в начале координат, $f(t_0, \tau)$ удовлетворяет условию Гёльдера на множестве $L \times T$, где T — некоторая ограниченная область изменения параметра τ.

Из результатов [2] можно получить следующие утверждения.

Если L — окружность, то уравнение (4) имеет единственное решение $\gamma(t, \tau)$ при любой правой части, даваемое формулой

$$\gamma(t, \tau) = af(t, \tau) - \frac{b}{\pi}\int\limits_L \frac{f(t_0, \tau)\, dt_0}{t_0 - t}. \tag{5}$$

Если L — отрезок $[-1,1]$, то индекс $\varkappa$ уравнения (4) принимает значения 1, 0, —1, а соответствующие решения задаются формулами

$$\gamma_\varkappa(t, \tau) = af(t, \tau) - \frac{b}{\pi}\,\omega_\varkappa(t)\int\limits_L \frac{f(t_0, \tau)\, dt_0}{\omega_\varkappa(t_0)(t_0 - t)} + T_\varkappa(\alpha)\,\omega_\varkappa^\alpha(t)\, C(\tau), \tag{6}$$

где $\omega_\varkappa^\alpha(t) = (1 - t)^\alpha (1 + t)^\beta$, $0 < |\alpha|$, $|\beta| < 1$, $\varkappa = -(\alpha + \beta)$, $a + b \operatorname{ctg} \alpha\pi = 0$, $T_1(\alpha) = -[\Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha)]^{-1}$, $T_0(\alpha) = T_{-1}(\alpha) = 0$, $C(\tau)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию Гёльдера. Если $\varkappa = 1$, то

$$\int\limits_L \gamma_1(t, \tau)\, dt = C(\tau). \tag{7}$$

Если $\varkappa = -1$, то функция $\gamma_{-1}(t, \tau)$ является решением уравнения (4) только при условии

$$\int\limits_L \frac{f(t_0, \tau)\, dt_0}{\omega_{-1}(t_0)} \equiv 0. \tag{8}$$

3. Запишем теперь уравнение (4) в операторной форме

$$A_{L, t_0}\gamma(t, \tau) = f(t_0, \tau), \tag{9}$$

где A_{L, t_0} означает символ тех операций, которые применяются справа в (4) к функции $\gamma(t, \tau)$, и который будем называть характеристическим сингулярным интегральным оператором второго рода.

Рассмотрим теперь такие характеристические сингулярные интегральные уравнения второго рода с двукратными интегралами типа Коши, операторы которых можно представить как произведение соответствующих одномерных операторов по каждой из переменных, т. е. уравнения вида

$$A_{L_1,\, t_0} \times A_{L_2,\, \tau_0}\gamma(t, \tau) = f(t_0, \tau_0) \tag{10}$$

или

$$A_{L_1,\, t_0}(A_{L_2,\, \tau_0}\gamma(t, \tau)) = A_{L_2,\, \tau_0}(A_{L_1,\, t_0} \cdot \gamma(t, \tau)).$$

В развернутом виде уравнение (10) запишется следующим образом:

$$a_1 \cdot a_2\gamma(t_0, \tau_0) + \frac{a_2 b_1}{\pi}\int\limits_{L_1}\frac{\gamma(t, \tau_0)\,dt}{t - t_0} + \frac{a_1 b_2}{\pi}\int\limits_{L_2}\frac{\gamma(t_0, \tau)\,d\tau}{\tau - \tau_0} +$$

$$+ \frac{b_1 \cdot b_2}{\pi^2}\iint\limits_{L_1 \times L_2}\frac{\gamma(t, \tau)\,dt\,d\tau}{(t - t_0)(\tau - \tau_0)} = f(t_0, \tau_0). \tag{10a}$$

Найдем теперь решение уравнения (10) при разных предположениях на L_1 и L_2.

Пусть L_1, L_2 — окружности единичного радиуса с центрами в начале координат, применяя повторно формулу (5), получим

$$\gamma(t, \tau) = A^{-1}_{L_2 \tau} \cdot (A^{-1}_{L_1,\, t} f(t_0, \tau_0)) = a_1 a_2 f(t, \tau) - \frac{a_2 b_1}{\pi} \times$$

$$\times \int\limits_{L_1}\frac{f(t_0, \tau)\,dt_0}{t_0 - t} - \frac{a_1 b_2}{\pi}\int\limits_{L_2}\frac{f(t, \tau_0)\,d\tau_0}{\tau_0 - \tau} + \frac{b_1 b_2}{\pi^2}\iint\limits_{L_1 \times L_2}\frac{f(t_0, \tau_0)\,dt_0\,d\tau_0}{(t_0 - t)(\tau_0 - \tau)}. \tag{11}$$

Пусть теперь L_1 — окружность, а L_2 — отрезок $[-1,1]$.

Будем вначале искать решение, имеющее по координате τ индекс 1. В рассматриваемом случае оператор $A_{L_1,\, t_0}$ однозначно обратим по любой правой части. Для однозначного обращения оператора $A_{L_2,\, \tau_0}$ надо еще знать функцию $\int\limits_{L_2}\gamma(t, \tau)\,d\tau$, которая будет однозначно найдена, если будет задана функция

$$A_{L_1,\, t_0}\int\limits_{L_2}\gamma(t, \tau)\,d\tau = C_1(t_0). \tag{12}$$

Будем считать, что функция $C_1(t_0)$ удовлетворяет условию Гёльдера на L_1.

Таким образом, в этом случае для однозначного разрешения уравнения (10) надо рассматривать систему

$$\begin{gathered} A_{L_1,\, t_0}(A_{L_2,\, \tau_0} \cdot \gamma(t, \tau)) = f(t_0, \tau_0), \\ A_{L_1,\, t_0}\Big(\int\limits_{L_2}\gamma(t, \tau)\,d\tau\Big) = C_1(t_0). \end{gathered} \tag{13}$$

Применяя теперь последовательно формулы (5) и (6), при $\varkappa = 1$ получим:

$$\gamma(t, \tau) = A_{L_2, \tau}^{-1}(A_{L_1, t}^{-1} f(t_0, \tau_0)) + T_1(\alpha_2)\,\omega_1^{\alpha_2}(\tau)\, A_{L_1, t}^{-1} C_1(t_0) =$$

$$= a_1 \cdot a_2 f(t, \tau) - \frac{a_2 b_1}{\pi}\int\limits_{L_1}\frac{f(t_0, \tau)\,dt_0}{t_0 - t} - \frac{a_1 b_2}{\pi}\,\omega_1^{\alpha_2}(\tau) \times$$

$$\times \int\limits_{L_2}\frac{f(t, \tau_0)\,d\tau_0}{\omega_1(\tau_0)(\tau_0 - \tau)} + \frac{b_1 b_2}{\pi^2}\,\omega_1^{\alpha_2}(\tau)\iint\limits_{L_1 \times L_2}\frac{f(t_0, \tau_0)\,dt_0 d\tau_0}{\omega(\tau_0)(t_0 - t)(\tau_0 - \tau)} +$$

$$+ T_1(\alpha_2)\,\omega_1^{\alpha_2}(\tau)\left[a_1 C_1(t) - \frac{b_1}{\pi}\int\limits_{L_1}\frac{C_1(t_0)\,dt_0}{t_0 - t}\right]. \qquad (14)$$

Если решение уравнения (10) будет иметь индекс нуль или минус единицу по переменной τ, то решение его будет даваться формулой

$$\gamma(t, \tau) = A_{L_2, \tau}^{-1}(A_{L_1, t}^{-1} f(t_0, \tau_0)). \qquad (14a)$$

При этом, если индекс равен -1 по переменной τ, то $\gamma(t, \tau)$ будет решением при условии

$$\int\limits_{L_2}\frac{f(t, \tau_0)\,d\tau_0}{\omega_{-1}^{\alpha_2}(\tau_0)} \equiv 0. \qquad (15)$$

Наконец, рассмотрим случай, когда L_1, L_2 — отрезки $[-1, 1]$.

Будем искать решение, имеющее индекс 1, по обеим переменным, т. е. $\varkappa = (1, 1)$. В этом случае для однозначной разрешимости оператора A_{L_1, t_0} надо знать функцию $\int\limits_{L_1}(A_{L_2, \tau_0}\gamma(t, \tau))\,dt = C_2(\tau_0)$. Для однозначной разрешимости оператора A_{L_2, τ_0} надо знать функцию $\int\limits_{L_2}\gamma(t, \tau)\,d\tau$, которая будет однозначно найдена с помощью оператора A_{L_1, t_0}, если будут известны функция $A_{L_1, t_0}\left(\int\limits_{L_2}\gamma(t, \tau) \times d\tau\right) = C_1(t_0)$ и число $\int\limits_{L_1} dt \int\limits_{L_2}\gamma(t, \tau)\,d\tau = C$.

Таким образом, в этом случае решение будет найдено из системы

$$\begin{gathered} A_{L_1, t_0}(A_{L_2, \tau_0}\gamma(t, \tau)) = f(t_0, \tau_0), \\ \int\limits_{L_1} dt\,(A_{L_2, \tau_0}\gamma(t, \tau)) = C_2(\tau_0), \\ A_{L_1, t_0}\left(\int\limits_{L_2}\gamma(t, \tau)\,d\tau\right) = C_1(t_0), \\ \int\limits_{L_1}\left(\int\limits_{L_2}\gamma(t, \tau)\,d\tau\right) dt = C. \end{gathered} \qquad (16)$$

Применяя теперь последовательно формулу (6), получим

$$\gamma(t,\tau)=A^{-1}_{L_2,\tau}(A^{-1}_{L_1,t}f(t_0,\tau_0)+T_1(\alpha_1)\,\omega_1^{\alpha_1}(t)\,C_2(\tau_0))+ + T_1(\alpha_2)\,\omega_1^{\alpha_2}(\tau)\,(A^{-1}_{L_1,t}C_1(t_0)+T_1(\alpha_1)\,\omega_1^{\alpha_1}(t)\,C). \quad (17)$$

Пусть теперь решение имеет индекс 0 по переменной t и индекс 1 по τ, т. е. $\varkappa=(0,1)$. Тогда оператор A_{L_1,t_0} однозначно обратим по любой правой части, а для однозначной обратимости оператора A_{L_2,τ_0} надо знать функцию $\int\limits_{L_2}\gamma(t,\tau)\,d\tau$, и поэтому решение будет однозначно найдено из системы

$$\begin{aligned}&A_{L_1,t_0}(A_{L_2,\tau_0}\gamma(t,\tau)=f(t_0,\tau_0),\\ &A_{L_1,t_0}\Big(\int\limits_{L_2}\gamma(t,\tau)\,d\tau\Big)=C_1(t_0).\end{aligned} \quad (18)$$

Опять применяя последовательно формулу (6), получим

$$\gamma(t,\tau)=A^{-1}_{L_2,\tau}(A^{-1}_{L_1,t}f(t_0,\tau_0))+T_1(\alpha_2)\,\omega_1^{\alpha_2}(\tau)\,A^{-1}_{L_1,t}C_1(t_0). \quad (19)$$

Везде выше функции $C_1(t_0)$, $C_2(\tau_0)$ удовлетворяют условию Гёльдера на соответствующей кривой.

Укажем теперь решение и систему, из которой его надо искать для остальных случаев индекса.

Если $\varkappa=(-1,1)$, то система будет иметь вид (18), решение — вид (19), но при условии

$$\int\limits_{L_1}\frac{f(t_0,\tau_0)\,dt_0}{\omega_{-1}^{\alpha_1}(t_0)}\equiv\int\limits_{L_1}\frac{C_1(t_0)\,dt_0}{\omega_{-1}^{\alpha_1}(t_0)}=0. \quad (20)$$

Решения индексов $\varkappa=(0,0)$; $(0,-1)$; $(-1,0)$; $(-1;-1)$ находятся однозначно из уравнения (10). Причем для той переменной, по которой индекс отрицателен, для правой части должно выполняться тождество (20).

Аналогично находятся решения индексов $\varkappa=(1,0)$; $(1,-1)$.

Итак, если L_1, L_2 — отрезки $[-1,1]$, то решение $\gamma_{\varkappa_1,\varkappa_2}(t,\tau)$ индекса $\varkappa=(\varkappa_1,\varkappa_2)$ получается по формуле

$$\gamma_{(\varkappa_1\ \varkappa_2)}(t,\tau)=A^{-1}_{L_2,\tau}(A^{-1}_{L_1,t}f(t_0,\tau_0)+T_{\varkappa_1}(\alpha_1)\,\omega_{\varkappa_1}^{\alpha_1}(t)\,C_2(\tau_0))+ + T_{\varkappa_2}(\alpha_2)\,\omega_{\varkappa_2}^{\alpha_2}(\tau)\,(A^{-1}_{L_1t}C_1(t_0)+T_{\varkappa_1}(\alpha_1)\,\omega_1^{\alpha_1}(t)\cdot C), \quad (21)$$

где $C_2(\tau_0)$, $C_1(t_0)$ — произвольные функции Гёльдера; C — произвольная константа.

Заметим, что аналогичным образом можно рассмотреть решение характеристических сингулярных интегральных уравнений с интегралами типа Коши любой кратности при условии, что левая часть представляется как произведение одномерных сингулярных операторов.

Список литературы: 1. *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Некоторые сингулярные интегральные уравнения аэродинамики.— Диф. уравнения, 1981, **17**, № 9, с. 1539—1547. 2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Наука, 1968.— 512 с.

Поступила в редколлегию 14.04.82.