а в комплексном пространстве оценку вида $\ln|f(z)|\leqslant\sum l_j|z_j|+o(|z|)$, $(|z|\to\infty)$, следовательно, и оценку $\ln|f(z)|\leqslant\sum l_j\times|y_j|+o(|z|)$, $(|z|\to\infty)$. Тогда так построенная $\omega(z_1, \ldots, z_n)$ будет P-майорантой для $f(z_1, \ldots, z_n)$.

Напомним, что рост целой функции $F(z_1, \ldots, z_n)$ экспоненциального типа, удовлетворяющей условию $\ln^+|F(x)|=o(|x|)$, $(|x|\to\infty)$, может быть охарактеризован индикатором Планшереля — Пойя (определение см. в [9, гл. 3, § 4]):

$$h_f(y_1, \ldots, y_n)\overset{\text{def}}{=}\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1}\cdot\ln|F(x_1+iry_1, \ldots, x_n+iry_n)).$$

(Этот предел один и тот же для всех $x\in\boldsymbol{R}^n$, за исключением множества нулевой n-мерной лебеговой меры, где возможно «понижение»).

В связи с этим возникает следующий вопрос: *Пусть $f(z_1, \ldots, z_n)$ — вещественная целая функция экспоненциального типа, допускающая на вещественной плоскости оценку $|f(x_1, \ldots, x_n)|\leqslant\leqslant\varphi(|x|)$, где $\varphi\geqslant 1$ монотонна и удовлетворяет условию неквазианалитичности. Существует ли у этой $f(z)$ P-майоранта $\omega(z)$ с тем же, что и у f, индикатором Планшереля — Пойя?*

Приведенная выше конструкция дает утвердительный ответ лишь если $h_f(y)=\sum l_j|y_j|$.

Теоремы **1**, **2** получены автором в 1975 г. и навеяны докладом И. В. Островского на семинаре по теории функций ХГУ, где излагалась теоретико-функциональная часть работы [2].

Список литературы: 1. *Ахиезер Н. И., Левин Б. Я.* Неравенства для производных, аналогичные неравенству С. Н. Бернштейна. — Докл. АН СССР, 1957, **117**, с. 735—738. 2. *Марченко В. А., Островский И. В.* Характеристика спектра оператора Хилла. — Мат. сборник, 1975, **97**, № 4, с. 540—606. 3. *Крейн М. Г.* Об обратных задачах теории фильтров и λ-зон устойчивости. — Докл. АН СССР, 1953, № 5, с. 767—770. 4. *Островский И. В.* Об одном классе целых функций. — Докл. АН СССР, 1976, **229**, № 1, с. 39—42. 5. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: ГИТТЛ, 1956.— 632 с. 6. *Левин Б. Я.* Об одном специальном классе целых функций и о связанных с ними экстремальных свойствах целых функций конечной степени. — Изв. АН СССР, 1950, **14**, № 1, с. 45—84. 7. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. — М.: Физматгиз, 1971. — 430 с.8. *Иноземцев О. И., Марченко В. А.* О мажорантах нулевого рода. — Усп.мат. наук, 1956, **11**, вып. 2, с. 173—178. 9. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных. — М.: Физматгиз, 1971. — 430.

Поступила в редколлегию 27.12.82.

УДК 513.88

Д. Г. КЕСЕЛЬМАН

О ГРАНИЦЕ ШИЛОВА В СИМПЛЕКСЕ ШОКЕ

В симплексе Шоке S введем обозначения: $E(S)$ — множество его крайних точек; $Sh_S=\overline{E(S)}\setminus E(S)$; μ_x — максимальная мера, представляющая точку x; $M_x^+(\overline{E(S)})$ — множество всех вероятностных мер, представляющих точку x и сосредоточенных на границе Шилова $\overline{E(S)}$; $P(S)$ — множество всех непрерывных и выпуклых на S функций; $A(S) = P(S) \cap (-P(S))$.

Пусть T — произвольное подмножество S. Для ограниченной функции g: $T \to R$ обозначим через $\hat{g} = \inf\{a \in A(S) : a|_T \geqslant g\}$ и $\check{g} = \sup\{a \in A(S) : a|_T \leqslant g\}$ ее верхнюю и нижнюю огибающие соответственно.

Рассмотрим точку x из границы Шилова $\overline{E(S)}$ и направленность $y_\alpha \to x$.

Определение. *Направленность* $\{y_\alpha\}$ *называется регулярной, если* $\{\mu_{y_\alpha}\}$ *слабо сходится к мере Дирака* ε_x (*мы будем обозначать слабую сходимость* $\mu_{y_\alpha} \twoheadrightarrow \varepsilon_x$.

Определение. *Точка* $x \in S$ *обладает системой квазипиков на* S, *если для каждой окрестности* $U(x)$ *этой точки существует квазипик, т. е. такая функция* $a \in A(S)$, *что* $a(x) > 0$ *и* $a|_{S \setminus U(x)} < 0$.

Как мы уже знаем [1], множество точек, которые обладают системой квазипиков на S, — это крайние точки и только они.

Цель данной работы состоит в получении новых топологических характеристик точек из $E(S)$ с помощью максимальных мер и регулярных направленностей и доказательства того факта, что в метризуемом S каждая точка из $\overline{E(S)}$ обладает регулярной последовательностью, которую можно выбрать из произвольного плотного в S подмножества D.

В случае, когда D выпукло, мы докажем, что для каждой точки $x \in S$ и вероятностной меры $\nu \in M_x^+(\overline{E(S)})$ существует последовательность $\{x_n\} \subset D$, которая сходится к x и $\mu_{x_n} \twoheadrightarrow \nu$.

Нам понадобится понятие так называемой тонкой топологии [2], т. е. слабейшей топологии, в которой все функции вида $\hat{p}$, где $p \in P(S)$, становятся непрерывными*.

Теорема 1. *Пусть* $x \in S$. *Следующие утверждения эквивалентны: 1)* $x \in E(S)$; *2) для каждой открытой окрестности* $U(x)$ *точки* x *и для каждого числа* $\varepsilon > 0$ *существует такая открытая окрестность* $V(x) \subseteq U(x)$ *точки* x, *что для всех* y *из* $V(x)$ *выполняется неравенство* $\mu_y(S \setminus U(x)) < \varepsilon$; 3) *каждая направленность* $x_\alpha \to x$ *является регулярной.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Пусть $\varepsilon > 0$, и $U(x)$ — произвольная открытая окрестность точки x. Рассмотрим непрерывную функцию $f: S \to [0; 1]$, удовлетворяющую равенствам: $f(x) = 1$ и $f|_{S \setminus U(x)} = 0$.

Согласно теореме Урысона такая функция существует.

---

* По теореме Шоке-Мейера множество C таких функций на симплексе является конусом, поэтому можно говорить о тонкой топологии.

По теореме Эрве (см. [3 теорема 1.4.1) выполняется равенство $\check{f}(x)=f(x)$, поэтому существует функция a из $A(S)$, для которой справедливы неравенства: $a\leqslant f$ и $a(x)>1-\varepsilon$. Рассмотрим открытое множество $V(x)=\{y\in U(x)\colon\ a(y)>1-\varepsilon\}$. Множество $V(x)$ является окрестностью точки x, и для каждой точки y из $V(x)$ имеем $1-\varepsilon<a(y)=\int\limits_{S\setminus U(x)} a\,d\mu_y+\int\limits_{U(x)} a\,d\mu_y\leqslant\int\limits_{U(x)} a\,d\mu_y\leqslant$ $\leqslant\mu_y(U(x))$.

2) $\Rightarrow$ 3). Предположим, что направленность $\{x_\alpha\}$ сходится к x. Рассмотрим положительное число $\varepsilon>0$ и функцию $f\not\equiv 0$ из $C(S)$. Выберем такую открытую окрестность $U_{(x)}$ точки x, что для всех y из $U(x)$ выполняется неравенcто $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$.

По утверждению 2) в множестве $U(x)$ можно выбрать меньшую открытую окрестность $U(x)$ точки x, причем такую, что для каждой точки y из $V(x)$ справедливо неравенство $\mu_y(S\setminus U(x))<\frac{\varepsilon}{4\|f\|}$. Существует такой индекс α_0, что для всех $\alpha\geqslant\alpha_0$ точки x_α попадут в окрестность $V(x)$, и тогда

$$|\mu_{x_\alpha}(f)-f(x)|\leqslant\int\limits_{S\setminus U(x)}|f-f(x)|\,d\mu_{x_\alpha}+\int\limits_{U(x)}|f-f(x)|\,d\mu_{x_\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant 2\|f\|\cdot\frac{\varepsilon}{4\|f\|}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

А это и означает, что направленность x_α является регулярной.

3) $\Rightarrow$ 1). Предположим, что x не принадлежит $E(S)$. Так как

$$E(S)=\bigcap_{q\in -P(S)}\{y\in S: q(y)=\check{q}(y)\},$$

то существует неотрицательная вогнутая функция q из $-P(S)$, такая, что $\check{q}(x)<q(x)$. В тонкой топологии, определенной по конусу C, множество $S\setminus\{x\}$ не является разреженным в точке x (см. [2 с. 13]), поэтому $\varliminf\limits_{\substack{y\to x\\ y\in S\setminus\{x\}}}\check{q}(y)=\check{q}(x)$.

Выберем направленность $\{y_\alpha\}$ из $S\setminus\{x\}$ такую, что $\lim\limits_{y_\alpha\to x}\check{q}(y_\alpha)=$ $=\check{q}(x)$. Тогда

$$\lim_{y_\alpha\to x}\mu_{y_\alpha}(q)=\lim_{y_\alpha\to x}\mu_{y_\alpha}(\check{q})=\lim_{y_\alpha\to x}\check{q}(y_\alpha)=\check{q}(x)<q(x),$$

т. е. $\mu_{y_\alpha}\nrightarrow\varepsilon_x$.

Теорема доказана.

Следствие 1.1. Пусть $x\in \mathrm{Sh}_S$, $\varepsilon>0$, тогда для каждой открытой окрестности $U(x)$ точки x существует такое отрытое множество $V\subseteq U(x)$, что для всех точек y из V справедливо неравенство $\mu_y(\overline{S\setminus U(x)})<\varepsilon$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную открытую окрестность $U(x)$ точки x. Пусть t — произвольная точка из $E(S) \cap U(x)$. Так как $U(x)$ является открытой окрестностью и для точки t, то по теореме 1 существует такое открытое подмножество $V \subseteq U(x)$, содержащее точку t, что для всех y из V выполняется неравенство $\mu_y(S \setminus U(x)) < \varepsilon$. Очевидно, что множество V является искомым.

Предложение 2. Рассмотрим точку x из $\overline{E(S)}$ и направленность $y_\alpha \to x$. Следующие утверждения эквивалентны: 1) направленность $\{y_\alpha\}$ является регулярной.; 2) для каждого $\varepsilon > 0$ и для каждой открытой окрестности $U(x)$ существует такой индекс α_0, что для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$ выполняется неравенство $\mu_{y_\alpha}(U(x)) > 1 - \varepsilon$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Предположим, что направленность $\{y_\alpha\}$ регулярна, и рассмотрим непрерывную функцию $f: S \to [0; 1]$, удовлетворяющую равенствам $f(x) = 1$ и $f|_{S \setminus U(x)} = 0$. Так как $\mu_{y_\alpha}(f) \to f(x) = 1$, то по $\varepsilon > 0$ выберем такой индекс α_0, что для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$ справедливо неравенство $\mu_{y_\alpha}(f) > 1 - \varepsilon$. Но тогда $1 - \varepsilon < \int f\, d\mu_{y_\alpha} = \int\limits_{U(x)} f\, d\mu_{y_\alpha} < \mu_{y_\alpha}(U(x))$.

2) $\Rightarrow$ 1). Рассмотрим функцию $f \not\equiv 0$ из $C(S)$, число $\varepsilon > 0$ и такую открытую окрестность $U(x)$ точки x, что для всех y из $U(x)$ выполняется неравенство $|f(y) - f(x)| < \varepsilon/2$. По утверждению 2) существует такой индекс α_0, что для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$ справедливо неравенство $\mu_{y_\alpha}(U(x)) > 1 - \frac{\varepsilon}{4\|f\|}$. Имеем

$$|\mu_{y_\alpha}(f) - f(x)| \leqslant \int\limits_{U(x)} |f - f(x)|\, d\mu_{y_\alpha} + \int\limits_{S \setminus U(x)} |f - f(x)|\, d\mu_{y_\alpha} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2\|f\| \cdot \frac{\varepsilon}{4\|f\|} = \varepsilon.$$

Предложение доказано.

Следствие 2.1. Пусть D — произвольное плотное подмножество метрического симплекса S, тогда для каждой точки $x \in \overline{E(S)}$ множество D содержит регулярную последовательность $y_n \to x$.

Доказательство. Если $x \in E(S)$, то по теореме 1 любая последовательность $\{y_n\} \subset D$, сходящаяся к точке x, является регулярной. Предположим, что $x \in \mathrm{Sh}_S$ и рассмотрим базис $\{U_n(x)\}$ вложенных открытых окрестностей точки x.

По следствию 1.1 в пересечении $D \cap U_n(x)$ можно выбрать точку y_n, удовлетворяющую неравенству $\mu_{y_n}(S \setminus U_n(x)) \leqslant 1/n$.

Очевидно, что последовательность $\{y_n\}$ удовлетворяет условию 2) предложения 2 и потому регулярна.

Теорема 3. *Пусть D — плотное выпуклое подмножество метрического симплекса S; x — произвольная точка S; мера $\nu \in$*

$\in M_x^+(\overline{E(S)})$. *Тогда в* D *можно выбрать такую последовательность* $x_n \to x$, *что* $\mu_{x_n} \to \nu$.

Доказательство. В силу метризуемости S мера ν имеет счетную базу $B = \{V_n\}_{n \in N}$ окрестностей в слабой топологии.

Пусть $V \in B$, тогда существует такое конечное множество функций $\{f_i\}_{i=1}^k$ из $C(\overline{E(S)})$ и число $\delta > 0$, что для всех мер μ из окрестности V выполняются неравенства $|\nu(f_i) - \mu(f_i)| < \delta$, $i = 1, \ldots, k$.

Покажем, что V содержит максимальные меры с барицентрами из D. Можно считать, что симплекс S вложен в некоторое локально выпуклое пространство Z.

В силу равномерной непрерывности существует такая окрестность нуля W в пространстве Z, что для всех пар точек z и y из $\overline{E(S)}$, для которых $z - y \in W$, выполняются неравенства $|f_i(z) - f_i(y)| < \delta/2$, $i = 1, \ldots, k$.

В силу компактности границы Шилова $\overline{E(S)}$ выберем конечное подмножество точек $\{y_j\}_{j=1}^m$ из $\overline{E(S)}$, таких, что $\overline{E(S)} \subseteq \bigcup_{j=1}^m (W + y_j)$.

Положим $W_0 = \varnothing$, $W_j = W + y_j$, $j = 1, \ldots, m$ и рассмотрим борелевские множества $A_j = \overline{E(S)} \cap (W_j \setminus (W_1 \cup \ldots \cup W_{j-1}))$, $j = 1, \ldots, m$. Очевидно, что $\overline{E(S)} = \bigcup_{j=1}^m A_j$. Рассмотрим конечное число множеств $\{A_j^0\}_{j=1}^l = \{A_j : \nu(A_j) > 0\}$ и вероятностные меры $\nu_j = \lambda_j^{-1} \cdot \nu|_{A_j^0}$, где $\lambda_j = \nu(A_j^0)$, $j = 1, \ldots, l$. Для каждого индекса j выберем произвольную точку x_j из A_j^0. По следствию 2.1 существует последовательность максимальных мер $\{\mu_n^j\}_{n \in N}$ с барицентрами из D, сходящаяся в слабой топологии к мере Дирака ε_{x_j}.

Тогда для всех $n \geqslant n_0$ выполняются неравенства $|\mu_n^j(f_i) - f_i(x_j)| < \delta/2$, $i = 1, \ldots, k$. Отсюда для всех $n \geqslant n_0$ $|\nu_j(f_i) - \mu_n^j(f_i)| \leqslant |\nu_j(f_i) - f_i(x_j)| + |f_i(x_j) - \mu_n^j(f_i)| < \delta$. Рассмотрим последовательность мер

$$\mu_n^0 = \sum_{j=1}^l \lambda_j \mu_n^j.$$

В силу выпуклости множества D барицентры мер μ_n^0 принадлежат D.

Так как мера $\nu = \sum_{j=1}^l \lambda_j \nu_j$, то существует такой номер $n \in N$, что максимальная мера μ_n^0 принадлежит окрестности V.

Следовательно, существует такая последовательность точек $\{x_n\}$ из D, что их максимальные представляющие меры μ_{x_n} слабо сходятся к мере ν.

Так как пространство $A(S)$ разделяет точки S, то $x_n \to x$, и теорема доказана.

Список литературы: 1. *Кесельман Д. Г.* Гармонические пространства и связанные с ними симплексы Шоке: Автореф. ... канд. физ.-мат. наук. — Ростов-на-Дону, 1981. — 148 с. 2. *Брело М.* О топологиях и границах в теории потенциала. — М.: Мир, 1974. — 224 с. 3. *Alfsen E. M.* Compact convex sets and boundary integrals. — Berlin, Springer — Verlag, 1971. — 212 p.

Поступила в редколлегию 14.04.82.

УДК 503. 88

И. К. ЛИФАНОВ

О ПРОИЗВЕДЕНИИ ОДНОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1. В аэродинамике задача обтекания прямоугольного крыла стационарным потоком идеальной несжимаемой жидкости может быть приведена [1] к рассмотрению следующего сингулярного интегрального уравнения:

$$\int_{-b}^{b}\int_{-l}^{l}\frac{\partial\gamma(x,z)}{\partial z}\,\frac{x-x_0+\sqrt{(x-x_0)^2+(z-z_0)^2}}{(x-x_0)(z-z_0)}\,dx\,dz = f(x_0, z_0). \qquad (1)$$

Так как уравнение (1) пока не исследовано, то желательно изучить сингулярные интегральные уравнения с двукратными сингулярными интегралами типа Коши аналогичного вида, например

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{K(x_0, z_0, x, z)}{(x-x_0)(z-z_0)}\,\gamma(x,z)\,dx\,dz = f(x_0, z_0), \qquad (2)$$

где $K(x_0, z_0, x, z)$ удовлетворяет условию Гёльдера [2] на квадрате и $K(x_0, z_0, x_0, z_0) \neq 0$ для любой точки $M(x_0, z_0)$ квадрата $I^2 = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Однако, как и для одномерных сингулярных уравнений [2], прежде чем изучать уравнения общего вида, надо изучить характеристические сингулярные интегральные уравнения с кратными интегралами типа Коши;

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\gamma(x,y)\,dx\,dy}{(x-x_0)(y-y_0)} = f(x_0, y_0). \qquad (3)$$