УДК 517.5

В. Э. КАЦНЕЛЬСОН

К ТЕОРИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КЛАССА КАРТРАЙТ

Для целой функции $F(z)$ экспоненциального типа $\sigma_F \overset{\text{def}}{=} \overline{\lim}\,|z|^{-1}\ln|F(z)|$, $(|z|\to\infty)$, $0\leqslant\sigma_F<\infty$ индикатор роста $h_F(\theta)$ определяется как $h_F(\theta)=\lim r^{-1}\cdot\ln|F(re^{i\theta})|$, $(r\to\infty)$. Целая функция $F(z)$ называется *функцией класса М. Картрайт*, если F экспоненциального типа, и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln^+|F(x)|}{1+x^2}\,dx<\infty.$$

Определение. *Область, получающаяся удалением из полуплоскости* $\operatorname{Im}\theta>0$ *система отрезков (разрезов)* $\operatorname{Re}\theta=k\pi$, $0\leqslant\operatorname{Im}\theta\leqslant h_k$, $(k\in\mathbf{Z})$, *где* $0\leqslant h_k<\infty$, *называется гребенчатой областью* (рис. 1).

В это определение включаются и предельные случаи «четверть плоскости с разрезами» и «полуполосы с разрезами» (рис. 2).

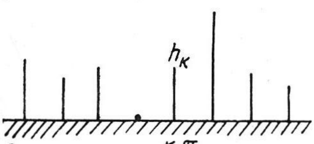

Рис. 1

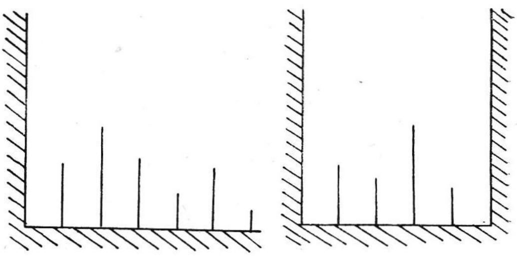

Рис. 2

Бесконечно удаленная точка «$\theta=\infty$» является граничной точкой гребенчатой области.

Пусть $\theta(z)$ — функция, осуществляющая конформное отображение полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$ на некоторую гребенчатую область*, причем $\theta(\infty)=\infty$.

Функция $\theta(z)$ аналитична в $\operatorname{Im}z>0$ и непрерывна в $\operatorname{Im}z\geqslant 0$. Функция $C(z)=\cos\theta(z)$ аналитична в $\operatorname{Im}z>0$, непрерывна

* Такие отображения составляют узкий подкласс класса отображений, которые применялись в [I] при исследовании экстремальных задач теории целых функций.

в $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ и вещественна на вещественной оси. По принципу симметрии, $C(z)$ продолжается до целой функции, которую мы также обозначим через $C(z)$.

Определение. *Функция вида* $C(z) = \cos\theta(z)$, *где* $\theta(z)$ — *функция, конформно отображающая* $\operatorname{Im} z > 0$ *на некоторую гребенчатую область, и* $\theta(\infty) = \infty$, *называется гребенчатой целой функцией.*

Очевидно, всякая гребенчатая целая $C(z)$ вещественна. Так как $\operatorname{Im}\theta(z)$ — положительная гармоническая в $\operatorname{Im} z > 0$, то $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im}\theta(x) \cdot (1 + x^2)^{-1}\, dx < \infty$ и $\operatorname{Im}\theta(z) = O((1 + |z|^2/y)$. Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\ln^+|C(x)|) \cdot (1 + x^2)^{-1}\, dx < \infty \quad \text{и} \quad \ln^+|C(z)| = O((1 + |z|^2)/|y|),$$

откуда следует, что всякая гребенчатая целая функция $C(z)$ является целой функцией класса Картрайт*.

Так как при $a = +1$ и при $a = -1$ все a-точки** функции $\cos\theta$ вещественны, то для любой гребенчатой целой функции все ее ± 1 — точки вещественны. Это свойство характеризует гребенчатые целые функции, как показывает

Теорема (В. А. Марченко, И. В. Островский [2, § 1]). *Всякая вещественная целая функция* ($\not\equiv$ const), *имеющая лишь вещественные а-точки при* $a = 1$ *и при* $a = -1$, *является гребенчатой.*

Подчеркнем, что априорных ограничений на рост функции здесь не налагается, в частности, принадлежность функции классу Картрайт не предполагается, а следует из условий теоремы.

Вещественные целые функции с вещественными ± 1-точками возникают, в частности, как дискриминанты Хилла линейных уравнений, описывающих пространственно-одномерные периодические структуры, и в таком качестве фигурировали еще у А. М. Ляпунова. Этот класс целых функций был выделен М. Г. Крейном [3] в связи со спектральными вопросами уравнения струны. В [3] указаны также связи с иными вопросами анализа (функциональными уравнениями Пелля, работами Абеля о периодических цепных дробях).

Теорема 1. *Всякая вещественная целая функция* $f(z)$ *класса Картрайт представима (неоднозначно) в виде* $f(z) = C_1(z) + C_2(z)$, *где* C_1, C_2 — *некоторые гребенчатые целые функции, причем* $\sigma_{C_1} = \sigma_{C_2} = \sigma_f$.

Теорема 2. *Всякая вещественная целая функция* $f(z)$ *класса Картрайт представима (неоднозначно) в виде* $f(z) = C_1(z) + C_2(z)$, *где* C_1, C_2 — *вещественные целые функции* ($\not\equiv$ const) *та-*

---

* При этом $C(z)$ полином точно тогда, когда гребенчатая область — это «полуполоса с разрезами».

** Напомним, что a-точками мероморфной функции $m(z)$ называются корни уравнения $m(z) - a = 0$.

кие, что у каждой из них все ± 1-точки вещественны, и $\sigma_{C_1} = \sigma_{C_2} = \sigma_f$.

Таким образом, теорема 1 является следствием теоремы 2 и цитированной выше теоремы В. А. Марченко — И. В. Островского.

Уместно сопоставить наши теоремы 1, 2 с теоремой 3 из [4].

Далее будем систематически пользоваться терминами, понятиями и результатами глав 7 и 9 монографии Б. Я. Левина [5], где изложены его результаты из [6]. Отметим, что изложение в [6] более подробное, чем в [5], и что эта монография не покрывает полностью работы [6].

Лемма. *Пусть $F(z)$ — целая функция класса Картрайт. Тогда существует целая функция $\omega(z)$ ($\neq$const), являющаяся P-майорантой для каждой из функций $F(z)+1$, $F(z)-1$, $-F(z)+1$, $-F(z)-1$, причем $\sigma_\omega = \sigma_F$, а функции $\omega(z) \pm F(z) \pm 1$ не тождественно постоянные, и не имеют вещественных корней.*

Доказательство. Рассмотрим $r(z) = 4F(z) \cdot \overline{F}(z) + 8(1 + z^2)$. Функция $r(z)$ принадлежит классу Картрайт, положительна на вещественной оси, и $\sigma_r \leqslant 2\sigma_F$. По факторизационной теореме Н. И. Ахиезера (см. [5, Приложение 5]) $r(z)$ представима в виде $r(z) = \Omega(z) \cdot \overline{\Omega}(z)$, где функция Ω не имеет корней в $\operatorname{Im} z \leqslant 0$, и $h_\Omega(\theta) = \frac{1}{2} h_r(\theta)$. В частности, $h_\Omega(\pi/2) = h_\Omega\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ и $\sigma_\Omega = \frac{1}{2}\sigma_r$. При любом $k \geqslant 0$ функция $\omega(z) = \Omega(z) \cdot e^{ikz}$ и подавно будет функцией класса P. Выберем k так, чтобы $\sigma_\omega = \sigma_F$. По лемме 1, § 4 гл. 7 из [5] функция ω, как функция класса P, будет и функцией класса HB; (см. также следствие 3 леммы 2 из [6]). Так как $|\omega(x)|^2 = 4|F(x)|^2 + 8(1 + x^2)$, то $|\omega(x)| > |\pm F(x) \pm 1|$, $(-\infty < x < \infty)$, Отсюда и из леммы 1, § 4 главы 9 из [5] (см. также лемму 2 из [6]) вытекает, что $\omega(z)$ является P-майорантой для каждой из четырех целых функций $\pm F(z) \pm 1$. Так как $|\omega(x)| \geqslant 1 + |x|$, $|\omega(x) \pm F(x) \pm 1| \geqslant 1 + |x|$, то функции $\omega(z)$, $\omega(z) \pm F(z) \pm 1$ не тождественно постоянны, и не имеют вещественных корней.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\omega(z) = p(z) + iq(z)$, (p, q — вещественны) — какая нибудь функция класса P с $\sigma_\omega = \sigma_f$, являющаяся P-майорантой для каждой из четырех целых функций $\frac{1}{2}f(z)+1$, $\frac{1}{2}f(z)-1$, $-\frac{1}{2}f(z)+1$, $-\frac{1}{2}f(z)-1$, причем $\omega(z)$, $\omega(z) \pm \frac{1}{2}f(z) \pm 1$ не тождественно постоянны и не имеют вещественных корней. (Существование такой майоранты утверждается в лемме). Согласно § 1, гл. 9 из [5] (см. также [6, лемма 3]), каждая из функций $\omega(z) \pm \frac{1}{2}f(z) \pm 1$ является функцией класса P. Дополняя рассуждения из [5], можно получить, что $\sigma_\omega = \sigma_{\omega \pm 1/2 f \pm 1}$. Таким образом, каждая из четырех целых функций $p(z) \pm \frac{1}{2} f(z) \pm 1$ является «вещественной частью» непостоянной* функции класса P. Согласно теореме 7, § 4, гл. 7 из [5] (см. также [6, теорему 1]), каждая из функций $P(z) \pm \pm \frac{1}{2} f(z) \pm 1$ имеет лишь вещественные простые корни, иными словами, целые функции $\frac{1}{2} f(z) + p(z)$, $\frac{1}{2} f(z) - p(z)$ имеют лишь простые вещественные ± 1-точки. Так как «вещественная часть» функции класса P имеет тот же тип, что и сама функция, то $\sigma_{p \pm f/2 \pm 1} = \sigma_{\omega \pm f/2 \pm 1} (= \sigma_\omega = \sigma_f)$. Осталось лишь положить $C_1(z) = = \frac{1}{2} f(z) + p(z)$, $C_2(z) = \frac{1}{2} f(z) - p(z)$.

Теорема 2 интересна с точки зрения теории распределения значений. Для того, чтобы целая функция f принадлежала классу Картрайт, необходимо, чтобы при каждом a ее a-точки $z_k(a)$ удовлетворяли *условию* $\sum |\operatorname{Im} 1/z_k(a)| < \infty$ *близости к вещественной оси*, и достаточно, чтобы это условие близости выполнялось хотя бы для двух различных $a\ (\neq \infty)$. (Гораздо более общие утверждения такого рода получены И. В. Островским См. [7, § 2, гл. 6] и ссылки там на более ранние работы И. В. Островского). Наша теорема 2, таким образом, допускает такую трактовку: всякая вещественная целая функция с ± 1-точками, близкими к вещественной оси, представима в виде суммы двух вещественных целых функций с ± 1-точками, расположенными точно на вещественной оси.

Примерно так же, как теорема 2, может быть доказана

Теорема 3. *Пусть $f(z)$ и $\rho(z)$ — целые функции класса Картрайт, f вещественна, ρ неотрицательна на вещественной оси, и $l \geqslant \max\left(\sigma_f, \frac{1}{2} \sigma_\rho\right)$.*

Тогда f представима в виде $f(z) = C_1(z) + C_2(z)$, где C_1 и C_2 — вещественные функции класса Картрайт, $\sigma_{C_1} = \sigma_{C_2} = l$, обладающие тем свойством, что для любой вещественной целой $e(z)$ такой, что $\sigma_e \leqslant l$ и $e^2(x) \leqslant \rho(x)$, $(-\infty < x < \infty)$, все корни уравнений $C_1(z) + e(z) = 0$, $C_2(z) + e(z) = 0$ вещественны и просты.

Мажоранту $\omega(z)$ здесь можно строить, факторизуя функцию $r(z) = f(z) \cdot \bar{f}(z) + 4\rho(z) + 8(1 + z^2)$.

Теорема 2 является частным случаем теоремы 3, соответствующим $\rho \equiv 1$, $e \equiv +1$, $e \equiv -1$.

Следствие. Пусть $f(z)$, $t_1(z)$, $\ldots$, $t_n(z)$ — вещественные целые функции класса Картрайт, причем σ_f, σ_{t_1}, $\ldots$, $\sigma_{t_n} \leqslant l$.

---

* Нам нужно еще, чтобы функции $p(z) \pm \frac{1}{2} f(z)$ были непостоянными. Так как $\omega(z) \neq \text{const}$, то этого можно достичь «малым шевелением»: $\omega(z) \to e^{i\alpha} \omega(z)$.

Тогда f представима в виде $f(z)=C_1(z)+C_2(z)$, где C_1, C_2 — вещественные целые функции класса Картрайт такие, что для любого $(\xi_1, \ldots, \xi_n)\in \mathbf{R}^n$ такого, что $\sum \xi_j^2 \leqslant 1$, все корни уравнений $C_k(z)+\sum \xi_j t_j(z)=0$, $(k=1, 2)$, вещественны и просты.

Нужно лишь применить теорему 3 к $\rho(z)=\sum t_j(z)\bar{t}_j(z)$, $e\times (z)=\sum \xi_j t_j(z)$.

Подчеркнем, что факторизационная теорема Н. И. Ахиезера является лишь одним из средств построения P-майорант $\omega(z)$. В ряде ситуаций возможны и иные способы построения майорант. Мы делаем это замечание, в частности, потому, что теория классов P, майорант и связанных с этим вопросом во многом распространяется на целые функции многих переменных (см. [5, главы 7—9]). Однако аналога факторизационной теоремы Н. И. Ахиезера для многих переменных нет (контрпримеры по мотивам 17-й проблемы Гильберта), и приходится выходить из положения иными способами.

Так же, как в одном переменном, доказывается, что если $f(z_1, \ldots, z_n)$ — вещественная целая функция, а $\omega(z_1, \ldots, z_n)$ — P-майоранта для каждой из функций $2f(z)$ и 2, то f представима в виде $f(z_1, \ldots, z_n)=C_1(z_1, \ldots, z_n)+C_2(z_1, \ldots, z_n)$, где C_1, C_2 — вещественные целые функции такие, что при $a=1$ и $a=-1$ a-множества каждой из них не пересекаются с трубчатыми областями $T_+=\{z: \operatorname{Im} z_j>0,\ 1\leqslant j\leqslant n\}$ и $T_-=-T_+$, причем каждая из C_k имеет «тот же рост», что и ω. Таким образом, для обобщения теоремы 2 на функции многих переменных нужно уметь строить майоранты для функций многих переменных.

Приведем один из примеров таких построений. Пусть $\alpha(t)\geqslant 1$ — монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая «*условию неквазианалитичности*»:

$$\int_0^\infty \frac{\ln \alpha(t)}{1+t^2}\,dt<\infty.$$

Как показано в [8], существует $\omega(z)$ нулевого рода с корнями в верхней полуплоскости такая, что $\alpha(|x|)\leqslant|\omega(x)|$, $(-\infty<x<\infty)$, причем $\sup \alpha(|x|)\cdot|\omega(\lambda x)|^{-1}<\infty$ для любого $\lambda>0$. Пусть $l_1, \ldots, l_n\geqslant 0$. Положим

$$\omega(z_1, \ldots, z_n)=\prod_{1<j<n}\{\omega(z_j)\cdot \sin(l_j z_j-i)\}.$$

Функция $\omega(z_1, \ldots, z_n)$ принадлежит классу P от n переменных. Пусть $f(z_1, \ldots, z_n)$ — целая функция, допускающая на вещественной оси оценку вида* $|f(x_1, \ldots, x_n)|\leqslant\alpha(|x_1|)\ldots\alpha(|x_n|)$,

* Эта оценка равносильна оценке вида $|f(x_1, \ldots, x_n)|\leqslant \leqslant\alpha\left(\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\right)$.

а в комплексном пространстве оценку вида $\ln|f(z)| \leqslant \sum l_j |z_j| + o(|z|)$, $(|z| \to \infty)$, следовательно, и оценку $\ln|f(z)| \leqslant \sum l_j \times |y_j| + o(|z|)$, $(|z| \to \infty)$. Тогда так построенная $\omega(z_1, \ldots, z_n)$ будет P-майорантой для $f(z_1, \ldots, z_n)$.

Напомним, что рост целой функции $F(z_1, \ldots, z_n)$ экспоненциального типа, удовлетворяющей условию $\ln^+|F(x)| = o(|x|)$, $(|x| \to \infty)$, может быть охарактеризован индикатором Планшереля — Пойя (определение см. в [9, гл. 3, § 4]):

$$h_f(y_1, \ldots, y_n) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim_{r \to \infty}} r^{-1} \cdot \ln|F(x_1 + iry_1, \ldots, x_n + iry_n)).$$

(Этот предел один и тот же для всех $x \in \boldsymbol{R}^n$, за исключением множества нулевой n-мерной лебеговой меры, где возможно «понижение»).

В связи с этим возникает следующий вопрос: *Пусть $f(z_1, \ldots, z_n)$ — вещественная целая функция экспоненциального типа, допускающая на вещественной плоскости оценку $|f(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \varphi(|x|)$, где $\varphi \geqslant 1$ монотонна и удовлетворяет условию неквазианалитичности. Существует ли у этой $f(z)$ P-майоранта $\omega(z)$ с тем же, что и у f, индикатором Планшереля — Пойя?*

Приведенная выше конструкция дает утвердительный ответ лишь если $h_f(y) = \sum l_j |y_j|$.

Теоремы 1, **2** получены автором в 1975 г. и навеяны докладом И. В. Островского на семинаре по теории функций ХГУ, где излагалась теоретико-функциональная часть работы [2].

Список литературы: 1. *Ахиезер Н. И., Левин Б. Я.* Неравенства для производных, аналогичные неравенству С. Н. Бернштейна. — Докл. АН СССР, 1957, **117**, с. 735—738. 2. *Марченко В. А., Островский И. В.* Характеристика спектра оператора Хилла. — Мат. сборник, 1975, **97**, № 4, с. 540—606. 3. *Крейн М. Г.* Об обратных задачах теории фильтров и λ-зон устойчивости. — Докл. АН СССР, 1953, № 5, с. 767—770. 4. *Островский И. В.* Об одном классе целых функций. — Докл. АН СССР, 1976, **229**, № 1, с. 39—42. 5. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: ГИТТЛ, 1956.— 632 с. 6. *Левин Б. Я.* Об одном специальном классе целых функций и о связанных с ними экстремальных свойствах целых функций конечной степени. — Изв. АН СССР, 1950, **14**, № 1, с. 45—84. 7. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. — М.: Физматгиз, 1971. — 430 с. 8. *Иноземцев О. И., Марченко В. А.* О мажорантах нулевого рода. — Усп.мат. наук, 1956, **11**, вып. 2, с. 173—178. 9. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных. — М.: Физматгиз, 1971. — 430.

Поступила в редколлегию 27.12.82.