

В. И. ГУРАРИЙ, В. Ц. ЛЕВЕНТАЛЬ

ТЕОРЕМА О МНОГОГРАННЫХ КОНУСАХ

Настоящая заметка посвящена установлению следующей связи между многогранными конусами и шарами в E_N : пусть x_0, x_1, \dots, x_n — векторы из E_N , удовлетворяющие таким условиям:

$$\|x_i\| = 1 \quad i = \overline{0, n} \quad (1),$$

$$\|x_0 - x_i\| \leq 1 \quad i = \overline{1, n} \quad (2).$$

Пусть, далее, B_0, B_1, \dots, B_n — шары радиуса 1 с центрами в точках x_0, x_1, \dots, x_n соответственно. Тогда для того, чтобы x_0 принадлежал конической оболочке S векторов x_1, \dots, x_n ,

необходимо и достаточно, чтобы $\bigcap_{i=1}^n B_i \subset B_0$ (3).

С использованием алгебраической записи условия (3) результат можно переформулировать таким образом:

Теорема 1. Пусть $x_0, x_1, \dots, x_n \in E_N$ удовлетворяют условиям (1) и (2), и пусть $S = \text{cone}(x_1, \dots, x_n)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны: (I) $x_0 \in S$. (II) Для любого $y \in E_N$, такого, что $y \neq 0$, $\|x_0 - y\| = 1$ существует такое, $i \in \{1, \dots, n\}$, что $\|x_i - y\| > 1$.

Доказательство. (I) \Rightarrow (II). Пусть $x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, $\alpha_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$.

В силу (1), так как все векторы x_i , $i = \overline{1, n}$ различны, имеем $\sum_{i=1}^n \alpha_i > 1$ (4).

Предположим далее, что для некоторого $y \in E_N$ такого, что $y \neq 0$ $\|x_0 - y\| = 1$ и для всех $i = \overline{1, n}$ выполнено $\|x_i - y\| \leq 1$, что эквивалентно неравенству

$$(y, y) \leq 2(x_i, y) \quad (5)$$

Суммируя (5) с коэффициентами α_i имеем $\sum_{i=1}^n \alpha_i (y, y) \leq \leq 2(x_0, y)$, откуда с учетом (1) $(\sum_{i=1}^n \alpha_i - 1)(y, y) + \|x_0 - y\|^2 \leq \leq 1$, что в силу (4) противоречит определению y .

(II) \Rightarrow (I). Пусть $x_0 \in C$. Тогда по лемме Фаркаша [1, с. 119] существует $v \in E_N$ такое, что $(v, x_i) \geq 0$, $i = \overline{1, n}$, $(v, x_0) = = u < 0$.

Так как вектор v можно выбрать нормированным и в силу (2)

$$(x_0, x_i) \geq 1/2, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

то можно считать, что $u > -1$.

Для любого числа t такого, что $0 \leq t \leq \frac{1}{u^2}$, введем вектор $y = y(t) = \alpha x_0 + \beta v$ и потребуем, чтобы $\|y\|^2 = 1 - tu^2$ (7), $\|x_0 - y\|^2 = 1$ (8).

Равенства (7) и (8) выполняются при

$$\beta = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{1 + tu^2}{2}\right)^2}{1 - u^2}}, \quad \alpha = \frac{1 - tu^2}{2} - \beta u.$$

Учитывая (6), получаем, что для $i = \overline{1, n}$

$$\begin{aligned} \|y - x_i\|^2 &= 1 + 1 - tu^2 - 2\alpha(x_0, x_i) - 2\beta(x_i, v) \leq \\ &\leq 2 - tu^2 - \alpha = \frac{3}{2} - \frac{tu^2}{2} + u \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{1 + tu^2}{2}\right)^2}{1 - u^2}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $f_u(t) = \frac{tu^2}{2} - u \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{tu^2 + 1}{2}\right)^2}{1 - u^2}}$.

Так как $f_u\left(\frac{1}{u^2}\right) = \frac{1}{2}$, а

$$f'_u(t) = \frac{u^2}{2} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{1+tu^2}{2\sqrt{1-\left(\frac{tu^2+1}{2}\right)^2}} \right) \xrightarrow{t \rightarrow \frac{1}{u^2} - 0} -\infty,$$

то, выбирая t достаточно близким к $\frac{1}{u^2}$, получим $\|y(t) - x_i\|^2 < 1$, $i = \overline{1, n}$, что доказывает теорему.

В качестве иллюстрации полученного результата приведем решение известной проблемы Борсука [2] для плоских многоугольников, т. е. докажем, что любое конечное множество точек X на плоскости можно разбить на 3 части меньшего диаметра, под диаметром множества A понимаем $\text{diam } A = \sup_{x, y \in A} \|x - y\|$.

Для заданного множества $x = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset E_2$ введем граф G с множеством вершин $\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n\}$, в котором ξ_i смежна с ξ_j тогда и только тогда, когда $\|x_i - x_j\| = \text{diam } X$. Очевидно, что гипотеза Борсука для плоских многоугольников может быть переформулирована таким образом: граф G , соответствующий множеству $X \subset E_2$, является 3-хроматичным.

Докажем эту гипотезу методом от противного. Пусть $X \subset E_2$ — конечное множество, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) X не разбиваемо на 3 части меньшего диаметра;
- 2) любое подмножество X разбиваемо на 3 части меньшего диаметра; (нетрудно доказать, что любое множество X' , удовлетворяющее условию 1, содержит подмножество X , удовлетворяющее обоим условиям). Тогда граф G , соответствующий X , является минимальным 4-хроматическим графом, и по теореме 12.23 [3, с. 168] степень каждой его вершины ξ_i не меньше 3. Не умаляя общности, можно считать, что $\text{diam } X = 1$, $x_0 = 0$, $\|x_i\| = 1$, $i = 1, 2, 3$.

Так как $\|x_i - x_j\| \leq 1$, $i, j = \overline{1, n}$, то все углы между векторами x_1, x_2, x_3 не превосходят 60° , а следовательно, один из этих векторов, например, x_1 принадлежит конической оболочке двух других. Но так как степень вершины ξ_1 графа G больше 2, то существует $x_l \in X$, $x_l \neq 0$, $l > 3$, такое, что $\|x_l - x_1\| = 1$. Так как при этом $\|x_l\| \leq 1$, то по доказанной теореме $\|x_l - x_2\| > 1$ или $\|x_l - x_3\| > 1$, что доказывает гипотезу.

Представляется вероятным получение указанным методом доказательства гипотезы Борсука для трехмерных многогранников. Как известно, существующее доказательство этого факта весьма сложно.

В заключение приведем очевидные обобщения теоремы 1 на случай бесконечного множества «образующих» конуса S . Пусть H — некоторое вещественное нормированное линейное пространство, $x_0 \in H$, $\{x_i\}_{i \in I} \subset H$, причем $\|x_0\| = 1$, $\|x_i\| = 1$, $i \in I$ (9), $\|x_0 - x_i\| \leq 1$, $i \in I$ (10).

