УДК 513.77

В. И. ГУРАРИЙ, В. Ц. ЛЕВЕНТАЛЬ

ТЕОРЕМА О МНОГОГРАННЫХ КОНУСАХ

Настоящая заметка посвящена установлению следующей связи между многогранными конусами и шарами в E_N: пусть $x_0, x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$ — векторы из E_N, удовлетворяющие таким условиям:

$$\|x_i\| = 1 \qquad i = \overline{0,\ n} \ \mathbf{(1)},$$

$$\|x_0 - x_i\| \leqslant 1 \quad i = \overline{1,\ n} \ \mathbf{(2)}.$$

Пусть, далее, $B_0, B_1, \ldots, B_n$ — шары радиуса 1 с центрами в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ соответственно. Тогда для того, чтобы x_0 принадлежал конической оболочке C векторов $x_1, \ldots, x_n$, необходимо и достаточно, чтобы $\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i \subset B_0$ **(3)**.

С использованием алгебраической записи условия (3) результат можно переформулировать таким образом:

Теорема 1. *Пусть* $x_0, x_1, \ldots, x_n \in E_N$ *удовлетворяют условиям (1) и (2), и пусть* $C = \operatorname{cone}(x_1, \ldots, x_n)$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:* (I) $x_0 \in C$. (II) *Для любого* $y \in E_N$, *такого, что* $y \neq 0$, $\|x_0 - y\| = 1$ *существует такое,* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *что* $\|x_i - y\| > 1$.

Доказательство. (I) $\Rightarrow$ (II). Пусть $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, $\alpha_i \geqslant 0$, $i = \overline{1, n}$.

В силу (1), так как все векторы x_i, $i = \overline{1, n}$ различны, имеем $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i > 1$ **(4).**

Предположим далее, что для некоторого $y \in E_N$ такого, что $y \neq 0$ $\|x_0 - y\| = 1$ и для всех $i = \overline{1, n}$ выполнено $\|x_i - y\| \leqslant 1$, что эквивалентно неравенству

$$(y, y) \leqslant 2(x_i, y) \tag{5}$$

Суммируя (5) с коэффициентами α_i имеем $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (y, y) \leqslant \leqslant 2(x_0, y)$, откуда с учетом (1) $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - 1\right)(y, y) + \|x_0 - y\|^2 \leqslant \leqslant 1$, что в силу (4) противоречит определению y.

(II) $\Rightarrow$ (I). Пусть $x_0 \overline{\in} C$. Тогда по лемме Фаркаша [1, с. 119] существует $b \in E_N$ такое, что $(b, x_i) \geqslant 0$, $i = \overline{1, n}$, $(b, x_0) = = u < 0$.

Так как вектор b можно выбрать нормированным и в силу (2)

$$(x_0, x_i) \geqslant 1/2, \quad i = \overline{1, n}, \tag{6}$$

то можно считать, что $u > -1$.

Для любого числа t такого, что $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{u^2}$, введем вектор $y = y(t) = \alpha x_0 + \beta b$ и потребуем, чтобы $\|y\|^2 = 1 - tu^2$ **(7),** $\|x_0 - y\|^2 = 1$ **(8).**

Равенства (7) и (8) выполняются при

$$\beta = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{1 + tu^2}{2}\right)^2}{1 - u^2}}, \quad \alpha = \frac{1 - tu^2}{2} - \beta u.$$

Учитывая (6), получаем, что для $i = \overline{1, n}$

$$\|y - x_i\|^2 = 1 + 1 - tu^2 - 2\alpha(x_0, x_i) - 2\beta(x_i, b) \leqslant$$

$$\leqslant 2 - tu^2 - \alpha = \frac{3}{2} - \frac{tu^2}{2} + u\sqrt{\frac{1 - \left(\frac{1 + tu^2}{2}\right)^2}{1 - u^2}}.$$

Рассмотрим функцию $f_u(t) = \frac{tu^2}{2} - u\sqrt{\frac{1 - \left(\frac{tu^2 + 1}{2}\right)^2}{1 - u^2}}$.

Так как $f_u\left(\frac{1}{u^2}\right) = \frac{1}{2}$, а

$$f'_u(t) = \frac{u^2}{2}\left(1 + \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{1+tu^2}{2\sqrt{1-\left(\frac{tu^2+1}{2}\right)^2}}\right) \xrightarrow[t \to \frac{1}{u^2} - 0]{} -\infty,$$

то, выбирая t достаточно близким к $\frac{1}{u^2}$, получим $\| y(t) - x_i \|^2 < 1$, $i = \overline{1, n}$, что доказывает теорему.

В качестве иллюстрации полученного результата приведем решение известной проблемы Борсука [2] для плоских многоугольников, т. е. докажем, что любое конечное множество точек X на плоскости можно разбить на 3 части меньшего диаметра, под диаметром множества A понимаем $\operatorname{diam} A = \sup\limits_{x,\, y \in A} \| x - y \|$.

Для заданного множества $x = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset E_2$ введем граф G с множеством вершин $\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$, в котором ξ_i смежна с ξ_j тогда и только тогда, когда $\| x_i - x_j \| = \operatorname{diam} X$. Очевидно, что гипотеза Борсука для плоских многоугольников может быть переформулирована таким образом: граф G, соответствующий множеству $X \subset E_2$, является 3-хроматичным.

Докажем эту гипотезу методом от противного. Пусть $X \subset E_2$ — конечное множество, удовлетворяющее следующим условиям:

1) X не разбиваемо на 3 части меньшего диаметра;

2) любое подмножество X разбиваемо на 3 части меньшего диаметра; (нетрудно доказать, что любое множество X', удовлетворяющее условию 1, содержит подмножество X, удовлетворяющее обоим условиям). Тогда граф G, соответствующий X, является минимальным 4-хроматическим графом, и по теореме 12.23 [3, с. 168] степень каждой его вершины ξ_i не меньше 3. Не умаляя общности, можно считать, что $\operatorname{diam} X = 1$, $x_0 = 0$, $\| x_i \| = 1$, $i = 1, 2, 3$.

Так как $\| x_i - x_j \| \leqslant 1$, $i, j = \overline{1, n}$, то все углы между векторами x_1, x_2, x_3 не превосходят 60°, а следовательно, один из этих векторов, например, x_1 принадлежит конической оболочке двух других. Но так как степень вершины ξ_1 графа G больше 2, то существует $x_l \in X$, $x_l \neq 0$, $l > 3$, такое, что $\| x_l - x_1 \| = 1$. Так как при этом $\| x_l \| \leqslant 1$, то по доказанной теореме $\| x_l - x_2 \| > 1$ или $\| x_l - x_3 \| > 1$, что доказывает гипотезу.

Представляется вероятным получение указанным методом доказательства гипотезы Борсука для трехмерных многогранников. Как известно, существующее доказательство этого факта весьма сложно.

В заключение приведем очевидные обобщения теоремы 1 на случай бесконечного множества «образующих» конуса C. Пусть H — некоторое вещественное нормированное линейное пространство, $x_0 \in H$, $\{x_i\}_{i \in I} \subset H$, причем $\| x_0 \| = 1$, $\| x_i \| = 1$, $i \in I$ **(9)**, $\| x_0 - x_i \| \leqslant 1$, $i \in I$ **(10)**.

Пусть далее C_0 — множество всех линейных комбинаций конечного числа x_i с неотрицательными коэффициентами, а C — замыкание C_0.

Теорема 2. *Пусть $H = E_N$. Тогда справедливо утверждение теоремы 1.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 за исключением того, что при получении неравенства (4) нужно воспользоваться теоремой Каратеодори [4, с. 171] и вместо леммы Фаркаша применить теорему о сильной отделимости.

Теорема 3. *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, вектор x_0 и множество $\{x_i\}_{i \in I}$ удовлетворяют условиям (9) и (10). Тогда для того, чтобы $x_0 \in C$, достаточно, а если множество $\{x_i\}$ слабо замкнуто, то и необходимо, чтобы для каждого $y \in H$, такого, что $\| x_0 - y \| = 1$ существовало такое $i \in I$, что $\| x_i - y \| \geqslant 1$.*

Доказательство. Достаточность доказывается так же, как и соответствующая часть теоремы 2.

Необходимость. Если $x_0 \in C_0$, то дословно повторяется соответствующая часть доказательства теоремы 1. Пусть $x_0 \in C$ является пределом последовательности $\{z_k\}_1^\infty \subset C_0$. Очевидно, что векторы z_k можно выбрать нормированными. Пусть $y \in H$ таково, что $\| x_i - y \| < 1$, $i \in I$, $\| x_0 - y \| = 1$. Рассмотрим точки $y_k = (1 - t_k) y + t_k z_k$, где t_k определяется из условия $\| y_k - z_k \| = | 1 - t_k | \cdot \| y_k - z_k \| = 1$. Поскольку $z_k \in C_0$, то для любого k существует такое $i_k \in I$, что $\| x_{i_k} - y_k \| > 1$, а поскольку по условию теоремы множество $\{x_i\}$ слабо компактно, то, рассматривая слабо сходящуюся последовательность $\{x_{i_k}\}_{k=1}^\infty$ и переходя к пределу, получим требуемое утверждение.

Список литературы: 1. *Черников С. Н.* Линейные неравенства.— М.: Наука, 1968.— 488 с. 2. *Грюнбаум В.* Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел.— М.: Наука, 1971.— 94 с. 3. *Харари Ф.* Теория графов.— М.: Мир, 1973.— 300 с. 4. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ.— М.: Мир, 1973.— 467 с.

Поступила в редколлегию 25.09.82