УДК 517.53

А. Ф. ГРИШИН

О МНОЖЕСТВАХ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ. III*

5. Одна интерполяционная теорема.

Теорема 9. *Пусть* $E=\{a_n=r_ne^{i\theta_n}\}$ — *последовательность комплексных чисел с единственной точкой сгущения на бесконечности,* $\rho(r)$ — *уточненный порядок,* $\rho>0$, $h(\theta)$ — *тригонометрически* ρ-*выпуклый индикатор,* $H(re^{i\theta})=r^\rho h(\theta)$. *Тогда следующие пять условий а, б, в, г, д эквивалентны.*

а) Для любой последовательности b_n, удовлетворяющей условию

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left[\frac{1}{r_n^{\rho(r_n)}}\ln|b_n|-h(\theta_r)\right]\leqslant 0 \tag{34}$$

существует целая функция $f(z)$ с индикатором $h_1(\theta)$, $h_1(\theta)\leqslant h(\theta)$ относительно уточненного порядка $\rho(r)$, такая, что $f(a_n)=b_n$;

б) для любой последовательности b_n, удовлетворяющей условию (34), существует целая функция $f(z)$ вполне регулярного роста с индикатором $h(\theta)$ относительно уточненного порядка $\rho(r)$ такая, что $f(a_n)=b_n$;

в) существует целая функция $\varphi(z)$ с индикатором $h(\theta)$ относительно $\rho(r)$, которая обращается в ноль на множестве E и такая, что

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left[\frac{1}{r_n^{\rho(r_n)}}\ln\frac{1}{\varphi'(a_n)}+h(\theta_n)\right]\leqslant 0; \tag{35}$$

г) существует целая функция $\varphi(z)$ вполне регулярного роста с индикатором $h(\theta)$ относительно $\rho(r)$, которая обращается в ноль на множестве E и такая, что если λ_n, $n=1, 2, \ldots$ — множество всех ее корней, то

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left[\frac{1}{|\lambda_n|^{\rho(|\lambda_n|)}}\ln\frac{1}{|\varphi'(\lambda_n)|}+h(\arg\lambda_n)\right]\leqslant 0; \tag{36}$$

д) 1) $d_E(K)\leqslant\mu_H(K)$ для любого компакта K,

2) $\displaystyle\lim_{\delta\to 0}\sup_z\int_0^\delta\frac{\Phi_{E,z}(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha=0.$

Доказательство. Импликация *г* $\Rightarrow$ *в* — тривиальная. Импликацию *в* $\Rightarrow$ *а*, используя метод Хермандера решения $\bar\partial$-проб-

---

* Сообщ. I. II см. в сб. «Теория функций, функцион. анализ и их прил.», 1983, вып. 40, 41.

лемы, доказал А. М. Руссаковский [12]. Раньше утверждение $г \Rightarrow а$ доказала О. С. Фирсакова [8]. Б. Я. Левин заметил, что методом О. С. Фирсаковой можно доказать и импликацию $в \Rightarrow а$. Здесь приводится доказательство импликации $в \Rightarrow а$ методом Фирсаковой. Из (34), (35) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n^{-\rho(r_n)} \ln^+ \left|\frac{b_n}{\varphi'(a_n)}\right| = 0$. Покажем, что существует уточненный порядок $\rho_1(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty} \rho_1(r) = \lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho$ такой, что

$$\lim_{r\to\infty} r^{\rho_1(r)-\rho(r)} = 0, \ \lim_{n\to\infty} r_n^{-\rho_1(r_n)} \ln^+ \left|\frac{b_n}{\varphi'(a_n)}\right| = 0. \tag{37}$$

Пусть s_j, $j = 1, 2, \ldots$ — круговая проекция множества E на ось $(0, \infty)$. Пусть $c_j = \max\limits_{|a_n|=s_j} \ln^+ \left|\frac{b_n}{\varphi'(a_n)}\right|$. Пусть $\psi(r)$ — кусочно-постоянная функция, равная c_j на полусегменте $[s_j, s_{j+1})$. Тогда $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{\psi(r)}{r^{\rho(r)}} = 0$, $\psi(s_j) = c_j$. Обозначим $\varepsilon_1(r) = \sup\limits_{t\geqslant r} \varepsilon(t)$, $\varepsilon(r) = \frac{\psi(r)}{r^{\rho(r)}}$. Функция $\varepsilon_1(r) \downarrow 0$ при $r \to \infty$ и строго положительная, $\varepsilon_1(r) \geqslant \varepsilon(r)$. Пусть $\varepsilon_2(r) = \frac{\sup\limits_{2\leqslant t\leqslant r} \varepsilon_1(t) \ln t}{\ln r}$. Тогда по лемме 5 $\varepsilon_2(r) \geqslant \varepsilon_1(r)$, $\varepsilon_2(r) \downarrow 0$, $\varepsilon_2(r) \ln(r) \uparrow$, $\varepsilon_2'(r) \leqslant \varepsilon_2(r) \frac{1}{r\ln r}$, где — $\varepsilon_2'(r) = \overline{\lim\limits_{n\to 0}} \frac{1}{h} (\varepsilon_2(r) - \varepsilon_2(r+h))$. Пусть $\varepsilon_3(r) = \int\limits_r^{r+1} \varepsilon_2(t)\,dt$. Тогда $\varepsilon_3(r) \downarrow 0$, $\varepsilon_3(r) \leqslant \varepsilon_2(r)$, $\varepsilon_3(r) \geqslant \varepsilon_2(r+1) \geqslant \varepsilon_2(r) \frac{\ln r}{\ln(r+1)}$, $|\varepsilon_3'(r)| = \varepsilon_2(r) - \varepsilon_2(r+1) = \int\limits_r^{r+1} |\varepsilon_2'(t)|\,dt \leqslant \int\limits_r^{r+1} \varepsilon_2(t) \frac{1}{t\ln t} dt \leqslant \int\limits_r^{r+1} \varepsilon_3(t) \times \frac{\ln(t+1)}{t\ln^2 t} dt \leqslant \varepsilon_3(r) \int\limits_r^{r+1} \frac{\ln(t+1)}{t\ln^2 t} dt \leqslant \varepsilon_3(r) \frac{1}{r\ln r}$. Из этого неравенства и соотношения $\varepsilon_3(r) > \frac{M}{\ln r}$ следует, что функция $\rho_1(r)$, определяемая из уравнения $r^{\rho_1(r)} = \sqrt{\varepsilon_3(r)}\, r^{\rho(r)}$ является искомым уточненным порядком.

Пусть $h_2(\theta)$, $h_2(\theta) \geqslant 1$, — тригонометрически ρ-выпуклый индикатор. По теореме 6 существует целая функция $\omega(z)$ вполне регулярного роста с индикатором $h_2(\theta)$ относительно уточненного порядка $\rho_1(r)$ такая, что $\ln|\omega(a_n)| \sim h_2(\theta_n) r_n^{\rho_1(r_n)}$. Обозначим $u_n = \frac{b_n}{\varphi'(a_n)\,\omega(a_n)}$. Из оценки $\omega(a_n)$, неравенства $h_2(\theta) \geqslant 1$ и равенства (37) следует, что существует такая константа M, что $|u_n| \leqslant M|a_n|^{-2\rho-2}$. Обозначим через C объединение кругов $C = \bigcup_{a_n \in E} C(a_n, |a_n|^{-\rho-1})$. Сумма радиусов кругов, образующих множество C, конечна. Вне множества C справедлива оценка

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{u_n}{z+a_n} \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\rho+1} |u_n| \leqslant M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\rho+1}} = M_1.$$

Функция $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(z)\,\omega(z)\,b_n}{(z-a_n)\,\varphi'(a_n)\,\omega(a_n)}$ решает интерполяционную задачу $f(a_n) = b_n$. Так как вне множества C справедливо неравенство $|f(z)| \leqslant M_1 |\varphi(z)|\,|\omega(z)|$, то индикатор функции $f(z)$ не превосходит $h(\theta)$. Импликация $в \Rightarrow а$ доказана.

Далее мы рассмотрим импликацию $д \Rightarrow г$. Из условия 1 пункта $д$, теоремы 5, условия 2 и теоремы 8 следует существование целой функции $\varphi(z)$ вполне регулярного роста с индикатором $h(\theta)$, которая обращается в ноль на множестве E и для которой справедливо равенство

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{z} \int_{0}^{\delta} \frac{\Phi_{\varphi,\, z}(\alpha)}{\alpha}\, d\alpha = 0. \tag{38}$$

К. Г. Малютин [13] доказал, что для целой функции $\varphi(z)$ вполне регулярного роста условия (38) и (36) эквивалентны. Для полноты изложения здесь воспроизведем доказательство К. Г. Малютина импликации (38) $\Rightarrow$ (36). Обозначим через

$$R_\delta(z) = \prod_{|\lambda_h - z| < \delta r} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right), \quad \varphi_\delta(z) = \frac{\varphi(z)}{R_\delta(z)}.$$

Так же как в [1] доказывается равенство $\lim_{r \to \infty} r^{-\rho(r)} \ln|\varphi(re^{i\theta})| = h(\theta)$, $z \bar{\in} C_0$, где C_0 — исключительное множество нулевой линейной плотности, можно доказать, что

$$\lim_{r \to \infty} r^{-\rho(r)} \ln|\varphi_\delta(re^{i\theta})| - \rho \iint_{C(e^{i\theta},\delta)} \ln\left|1 - \frac{e^{i\theta}}{te^{i\varphi}}\right| t^{\rho-1} dt\, ds(\varphi). \tag{39}$$

Отметим также, что равенство (39) можно доказать с помощью леммы 4.4.4 из [4]. Обозначим $\varphi(z) = \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) e^{\frac{z}{\lambda_k} + \cdots + \frac{z^p}{\lambda_k^p}} \times \varphi_k(z)$. Тогда

$$\varphi'(\lambda_k) = -\frac{1}{\lambda_k} e^{1 + \cdots + \frac{1}{p}} \varphi_k(\lambda_k) =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_k} e^{1 + \cdots + \frac{1}{p}} \varphi_\delta(\lambda)_k \prod_{\substack{|\lambda_n - \lambda_k| < \delta|\lambda_k| \\ \lambda_n \neq \lambda_k}} \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_n}\right).$$

Откуда, учитывая (39), получим

$$\frac{1}{\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}}\ln|\varphi'(\lambda_k)| = h(\theta_k) - \rho \iint\limits_{C(e^{i\theta_k}\delta)} \ln\left|1 - \frac{e^{i\theta_k}}{te^{i\varphi}}\right| t^{\rho-1}\,dt\,ds(\varphi) +$$

$$+\varepsilon(\lambda_k,\ \delta) + \frac{1}{|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}} \sum_{|\lambda_n-\lambda_k|<\delta|\lambda_k|} \ln\left|\frac{\lambda_k}{\lambda_n}\right| - \int_0^\delta \ln\frac{1}{\alpha}\,d\Phi_{\varphi,\,\lambda_k}(\alpha), \tag{40}$$

где $\varepsilon(\lambda_k,\ \delta)\to 0$ при $\lambda_k\to\infty$. Далее имеем

$$1/2 \ln\frac{1}{\delta^2}\,\Phi_{\varphi,\,z}(\delta^2) \leqslant \int_{\delta^2}^{\delta} \frac{\Phi_{\varphi,\,z}(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha \leqslant \int_0^\delta \frac{\Phi_{\varphi,\,z}(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha.$$

Из этого неравенства и (38) следует, что $\lim\limits_{\alpha\to 0}\sup\limits_{z} \ln\frac{1}{\alpha}\,\Phi_{\varphi,\,z}(\alpha)=0.$ Теперь из равенства

$$\int_0^\delta \ln\frac{1}{\alpha}\,d\Phi_{\varphi,\,z}(\alpha) = \ln\frac{1}{\delta}\,\Phi_{\varphi,\,z}(\delta) + \int_0^\delta \frac{\Phi_{\varphi,\,z}(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha$$

следует, что $\lim\limits_{\delta\to 0}\sup\limits_{z}\int_0^\delta \ln\frac{1}{\alpha}\,d\Phi_{\varphi,\,z}(\alpha) = 0$. Пусть теперь ε — произвольное положительное число. Так как второе, четвертое и пятое слагаемые правой части (40) равномерно относительно λ_k стремятся к нулю при $\delta\to 0$, то существует такое δ, что сумма модулей этих слагаемых при этом δ и произвольном λ_k будет меньше чем $\varepsilon/2$. Затем найдем число R так, чтобы при выбранном δ и $|\lambda_k|>R$ выполнялось неравенство $|\varepsilon(\lambda_k,\ \delta)|<\varepsilon/2$. Тогда при $|\lambda_k|>R$ будет выполняться неравенство $||\lambda_k|^{-\rho(|\lambda_k|)}\times \times \ln|\varphi'(\lambda_k)| - h(\theta_k)| < \varepsilon$. Тем самым неравенство (36), а вместе с ним и импликация $\partial\Rightarrow г$ доказаны.

Теперь остановимся на импликации $г\Rightarrow б$. Ее впервые доказал К. Г. Малютин [13]. Приводимое ниже доказательство основывается на другой идее. Пусть $f(z)$ целая функция с индикатором $h_1(\theta)$, $h_1(\theta)\leqslant h(\theta)$ решающая интерполяционную задачу $f(a_n)=b_n$. Существование такой функции мы доказали, доказав импликацию $в\Rightarrow a$. Пусть $\varphi(z)$ — целая функция вполне регулярного роста с индикатором $h(\theta)$, которая обращается в ноль на множестве E. Тогда существует множество кружков C_0 нулевой линейной плотности, вне которого справедливо соотношение $\ln|\varphi(re^{i\theta})|\approx h(\theta)\,r^{\rho(r)}$. Пусть $\psi(r)=\max\limits_{\substack{|z|=r\\ z\overline{\in} C_0}}\left|\frac{f(z)}{\varphi(z)}\right|$. Из свойств функций $f(z)$ и $\varphi(z)$ следует, что $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{\ln^+\psi(r)}{r^{\rho(r)}}=0$. Существует такой уточненный порядок $\rho_1(r)$, что $\lim\limits_{r\to\infty}\rho_1(r)=\rho$, $\lim\limits_{r\to\infty} r^{\rho_1(r)-\rho(r)}=$ $=0$, $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{\ln^+\psi(r)}{r^{\rho_1(r)}}=0$. Доказательство существования функции $\rho_1(r)$ уже проводили. Пусть $h_2(\theta)$ — тригонометрически ρ-выпуклый индикатор, $h_2(\theta)\geqslant 1$. Пусть $\omega(z)$ — целая функция вполне регулярного роста с индикатором $h_2(\theta)$ относительно уточненного порядка $\rho_1(r)$. Тогда существует множество кругов $\widetilde{C}$ нулевой линейной плотности, вне которого отношение $\frac{f(z)}{\varphi(z)\,\omega(z)}$ стремится к нулю при $z\to\infty$. Функция $\varphi(z)\,\omega(z)$ является функцией вполне регулярного роста с индикатором $h(\theta)$ относительно уточненного порядка $\rho(r)$. Следовательно, такой же является функция $f_1(z)=f(z)+\varphi(z)\,\omega(z)$. Кроме того, $f_1(a_n)=b_n$. Импликация $г\Rightarrow б$ доказана.

Доказательство импликации $a\Rightarrow\partial$. Пусть $\varepsilon(t)=t^{-\rho(t)}$, а D_j — та система областей, которая строится в лемме 6. Выберем в каждой из областей D_j по точке α_j из множества E, если такие точки там есть. Множество выбранных точек обозначим A, а множество оставшихся точек — B, так что $E=A\cup B$. Пусть $f(z)$ целая функция с индикатором $h_1(\theta)$, $h_1(\theta)\leqslant h(\theta)$ относительно уточненного порядка $\rho(r)$, для которой выполнены равенства $f(a_n)=\exp h(\theta_n)\, r_n^{\rho(r_n)}$, $a_n=r_ne^{i\theta_n}$, если $a_n\in A$, $f(a_n)=0$, если $a_n\in B$. Определим отображение T на множестве B следующим образом. Если $a_n\in B\cap D_j$, то $T(a_n)=\alpha_j$. В силу свойства 2 леммы 6 отображение T асимптотически тождественное на бесконечности. Кроме того, $\ln|f(z)|=h(\theta)\,r^{\rho(r)}$ при $z\in T(B)$. Таким образом, множество B есть множество регулярного роста функции $f(z)$ относительно индикатора $h(\theta)$. Функция $f(z)$ обращается в ноль на множестве B. Тогда по теореме 4 $d_B(K)\leqslant\mu_H(K)$ для любого компакта K. Так как по свойству 3 леммы 6 множество A имеет нулевую угловую плотность относительно уточненного порядка $\rho(r)$, то $d_E(K)\leqslant\mu_H(K)$ для любого компакта K. Пункт первый условия ∂ доказан.

Далее доказываем пункт второй. Из непрерывности индикатора следует, что для любого положительного ε существует положительное число γ такое, что при $\delta\leqslant 2\gamma$, $|z-z_0|\leqslant\delta|z_0|$ и $|z_0|\geqslant 1$ будет выполняться неравенство

$$r^{\rho(r)}h(\theta)\leqslant r_0^{\rho(r_0)}\left(h(\theta_0)+\frac{\varepsilon}{2}\right),\ z=re^{i\theta},\ z_0=r_0e^{i\theta_0}.$$

Докажем, что

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{a_k}\int\limits_0^{\delta}\frac{\Phi_{E,\,a_k}(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha=0. \tag{41}$$

Если это не так, то существуют положительное число η, последовательность $\alpha_k \in E$ и последовательность $\delta_k \to 0$ такие, что

$$\int_0^{\delta_k} \frac{\Phi_{E,\,\alpha_k}(\alpha)}{\alpha}\, d\alpha \geqslant \eta. \tag{42}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $|\alpha_{k+1}| > 2|\alpha_k|$. Пусть $f(z)$ — целая функция с индикатором $h_1(\theta)$, $h_1(\theta) \leqslant h(\theta)$, решающая интерполяционную задачу $f(\alpha_k) = \exp(h(\sigma_k)\, t_k^{\rho(t_k)})$, $\alpha_k = t_k e^{i\sigma_k}$, $f(a_n) = 0$, если a_n не совпадает ни с одной из точек α_k. Пусть $m_k + 1$ — число точек множества E, попавших в круг $C(\alpha_k, \gamma|\alpha_k|)$. Составим по этим точкам для функции $f(z)$ разделенную разность A_{m_k} порядка m_k. Для величины A_{m_k} имеют место такие формулы (см., например, [11, гл. 1, § 3])

$$A_{m_k} = \sum_{a_n \in C(\alpha_k,\, \gamma|\alpha_k|)} \frac{f(a_n)}{\omega'(a_n)} = \frac{\exp(h(\sigma_k)\, t_k^{\rho(t_k)})}{\omega'(\alpha_k)}, \tag{43}$$

где $\omega(z) = \prod\limits_{a_n \in C(\alpha_k,\, \gamma|\alpha_k|)} (z - a_n)$,

$$A_{m_k} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - \alpha_k| = 2\gamma|\alpha_k|} \frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)}\, d\zeta. \tag{44}$$

Если $a_n \in C(\alpha_k, \gamma t_k)$, а $|\zeta - \alpha_k| = 2\gamma t_k$, то $|\zeta - a_n| \geqslant \gamma t_k$, $|\omega(\zeta)| \geqslant \gamma^{m_k+1} t_k^{m_k+1}$. Существует такое число R, $R \geqslant 1$, что при $|z| \geqslant R$ будет выполняться неравенство $\ln|f(z)| < \left(h(\theta) + \frac{\varepsilon}{2}\right) r^{\rho(r)}$. Тогда в силу выбора числа γ при $t_k \geqslant R$ будет выполняться неравенство $|f(\zeta)| < \exp(h(\sigma_k) + \varepsilon)\, t_k^{\rho(t_k)}$ при $|\zeta - \alpha_k| = 2\gamma t_k$. Теперь из формулы (44) получаем

$$A_{m_k} \leqslant \frac{e^{(h(\sigma_k)+\varepsilon) t_k^{\rho(t_k)}}}{\gamma^{m_k} t_k^{m_k}}.$$

Далее из формулы (43) следует

$$\ln \frac{t_k^{m_k}}{|\omega'(\alpha_k)|} < \varepsilon t_k^{\rho(t_k)} + m_k \ln \frac{1}{\gamma}.$$

Разделим обе части неравенства на $t_k^{\rho(t_k)}$ и заметим, что левая часть полученного неравенства есть не что иное как $\int\limits_0^{\gamma} \ln \frac{1}{\alpha}\, d\Phi_{E,\,\alpha_k}(\alpha)$.

Поэтому

$$\int_0^{\gamma} \ln \frac{1}{\alpha}\, d\Phi_{E,\,\alpha_k}(\alpha) < \varepsilon + \Phi_{E,\,\alpha_k}(\gamma) \ln \frac{1}{\gamma}.$$

Заметим, что $\Phi_{E, \alpha_k}(\alpha)$ равна нулю в некоторой окрестности нуля. Поэтому, проводя интегрирование по частям в левой части неравенства, мы получим, что $\int\limits_0^{\gamma} \frac{\Phi_{E, \alpha_k}(\alpha)}{\alpha} d\alpha < \varepsilon$. Это противоречит (42) и, значит, равенство (41) доказано. Заметив еще, что при $\alpha < 0,5$ имеет место оценка $\Phi_{E, z}(\alpha) < M\Phi_{E, a_k}(\alpha)$, где a_k — ближайшая к z точка множества E, получим

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_z \int\limits_0^{\delta} \frac{\Phi_{E, z}(\alpha)}{\alpha} d\alpha = 0.$$

Список литературы: 1. *Ибрагимов И. И.* Методы интерполяции функций и некоторые их приложения.— М.: Наука, 1976.— 518 с. 2. *Руссаковский А. М.* Об интерполяции в классе целых функций, имеющих индикатор не выше данного.— Теория функций, функц. анализ и их прил., 1982, вып. 37, с. 111—114. 3. *Малютин К. Г.* Интерполяция голоморфными функциями: Дис. ... канд. физ.-мат. наук, Харьков, 1980.— 104 с.

Поступила в редколлегию 27.01.82.