УДК 517.535.4

В. Б. ГИНЕР, Л. Р. ПОДОШЕВ, М. Л. СОДИН

О СЛОЖЕНИИ НИЖНИХ ИНДИКАТОРОВ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

1. Пусть $A(\rho(r))$ — класс целых функций f, имеющих нормальный тип при уточненном порядке $\rho(r)\,(\rho(r)\to\rho)\,\rho>0$, нецелое. Напомним, что индикатор и нижний индикатор $f\in A(\rho(r))$ определяются равенствами

$$h_f(\varphi)=\varlimsup_{r\to\infty}\ln|f(re^{i\varphi})|\,r^{-\rho(r)},$$

$$\boldsymbol{h}_f(\varphi)=\boldsymbol{h}_f(\varphi)=\sup_C\{\varliminf_{\substack{re^{i\varphi}\to\infty\\ re^{i\varphi}\notin C}}\ln|f(re^{i\varphi})|\,r^{-\rho(r)}\},$$

где C — C^0 — множества [1, с. 120], т. е множества, покрываемые объединением кружков вида $K_{\delta_j}(z_j)=\{z:|z-z_j|<\delta_j\}$, таких, что выполняется условие $\varlimsup_{R\to\infty}\frac{1}{R}\sum_{|z_j|<R}\delta_j=0$. Введение C^0-множеств в определение $\boldsymbol{h}_f$ вызвано необходимостью исключить из рассмотрения окрестности корней $f(z)$, где $\ln|f|$ близок к $-\infty$.

Нижний индикатор введен и изучался в работах А. Ф. Леонтьева, А. А. Гольдберга, И. Ф. Красичкова, В. С. Азарина и других авторов (см. список литературы в работе [2]).

Напомним, что $f\in A(\rho(r))$ является функцией вполне регулярного роста на луче $l_\varphi=\{\arg z=\varphi\}$ [1, с. 182] ($f\in A_{\mathrm{reg},\varphi}$), если выполняется соотношение $h_f(\varphi)=\boldsymbol{h}_f(\varphi)$.

Пусть $f\in A_{\mathrm{reg},\varphi}$. Тогда для любой $g\in A(\rho(r))$ выполняются равенства [1, с. 207; 3, с. 152] $h_{fg}(\varphi)=h_f(\varphi)+h_g(\varphi)$ **(1.1)**, $\boldsymbol{h}_{fg}(\varphi)=\boldsymbol{h}_f(\varphi)+\boldsymbol{h}_g(\varphi)$ **(1.2)**. Обратно, если равенство (1.1) выполняется для любой $g\in A(\rho(r))$, то $f\in A_{\mathrm{reg},\varphi}$ [4, 5]. Этот факт имел приложения [6, 7].

В данной работе изучается аналогичный вопрос по отношению к равенству (1.2).

Заметим сначала, что если $\boldsymbol{h}_f(\varphi)=-\infty$, то $\boldsymbol{h}_{fg}(\varphi)=-\infty$ для любой $g\in A(\rho(r))$. Очевидно, $f\notin A_{\mathrm{reg},\varphi}$.

Обозначим для $E\subset[0,2\pi)$, $e^{iE}\overset{\mathrm{def}}{=}\{e^{i\psi}:\psi\in E\}$.

Теорема 1. *Пусть (1.2) выполняется для* $\psi\in E$, $\forall g\in A(\rho(r))$, *причем* e^{iE} *неразрежено в точке* $e^{i\varphi}$. *Тогда* $f\in A_{\mathrm{reg},\varphi}$.

Теорема 2. *Пусть* E_0 *таково, что* e^{iE_0} *разрежено во всех точках единичной окружности. Тогда существует* $f\in A(\rho(r))$, *для которой выполняется (1.2) при всех* $\varphi\in E_0$ *и* $g\in A(\rho(r))$, *но* $f\notin A_{\mathrm{reg},\varphi}$ *ни при каком* φ *и* $\boldsymbol{h}_f(\varphi)>-\infty\ \forall\varphi$.

Заметим, что E_0 может быть всюду плотным в $[0, 2\pi)$, а E из теоремы 1 может быть всюду разрывным и даже иметь нулевую меру [8, с. 98].

Доказательство теорем 1 и 2 основано на следующей теореме, дающей критерий выполнения (1.2) в терминах предельного множества $\mathrm{Fr}[f]$ субгармонической функции $u(z) = \ln|f(z)|$ [2, с. 32; 3].

Теорема 3. *Пусть* $f \in A(\rho(r))$ *и* $\boldsymbol{h}_f(\varphi) > -\infty$. *Для того, чтобы (1.2) имело место при любой* $g \in A(\rho(r))$ *такой, что* $\boldsymbol{h}_g(\varphi) > -\infty$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:*

$$\lim_{\tau\to1} v(\tau e^{i\varphi}) = \boldsymbol{h}_f(\varphi), \ \forall v \in \mathrm{Fr}[f].$$

Аналогичный критерий верен и для соотношения (1.1).

Теорема 4. *Пусть* $f \in A(\rho(r))$. *Для того, чтобы (1.1) имело место при любой* $g \in A(\rho(r))$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\lim_{\tau\to1}}\, v(\tau e^{i\varphi}) = h(\varphi), \ \forall v \in \mathrm{Fr}[f]. \tag{1.3}$$

Из (1.3) следует, что $f \in A_{\mathrm{reg},\,\varphi}$. *Действительно, для любой* $v \in \mathrm{Fr}[f]$ $h_f(\varphi) = \overline{\lim\limits_{\tau\to1}}\, v(\tau e^{i\varphi}) \leqslant v(e^{i\varphi}) \leqslant h_f(\varphi)$ *т. е.* $f \in A_{\mathrm{reg},\,\varphi}$ *и теорема 4 следует из* [4].

Отметим, что множество e^{iE}, на котором выполняется (1.1) замкнуто, а теорема 1 означает, что множество, где выполняется (1.2), тонко замкнуто.

Чтобы из сложения индикаторов (соответственно, нижних индикаторов) на множестве e^{iE} следовал вполне регулярный рост в точке φ_0 достаточно, чтобы $e^{i\varphi_0}$ была предельной точкой e^{iE} в обычной топологии для индикаторов (соответственно, в тонкой топологии для нижних индикаторов).

Теорема 1 доказывается в п. 5, теорема 2 — в 6, теорема 3 — в 3.

2. Пусть $\mathrm{SH}(\rho(r))$ — класс субгармонических функций $u(z)$, имеющих нормальный тип при уточненном порядке $\rho(r)$ ($\rho(r) \to \rho$, $\rho > 0$, нецелое).

Напомним понятие предельного множества для функции $u(z)$ [2, с. 32; 3] и его основные свойства.

Пусть D' — пространство обобщенных функций над основным пространством D финитных бесконечно дифференцируемых функций на плоскости и $u \in \mathrm{SH}(\rho(r))$, семейство $\{u_t\}$ субгармонических функций вида $u_t(z) = u(tz)\,t^{-\rho(t)}$ при $t \to \infty$ компактно в следующем смысле: для любой последовательности $t_j \to \infty$ существует подпоследовательность $t'_j \to \infty$ и субгармоническая функция $v(z)$ такие, что $u_{t'_j} \to v$ в D'. Множество таких функций v называется предельным для u и обозначается $\mathrm{Fr}[u]$.

Обозначим $\overline{h}(u, z) = \sup\{v(z) : v \in \mathrm{Fr}[u]\}$; $\boldsymbol{h}(u, z) = \inf\{v(z) : v \in \mathrm{Fr}[u]\}$ **(2.1).**

Функция $u(z)=\ln|f(z)|$, $f\in A(\rho(r))$ принадлежит $\mathrm{SH}(\rho(r))$ и для нее выполняются равенства [2,3] $h_f(\varphi)=\overline{h}(u, e^{i\varphi})$, $\boldsymbol{h}_f(\varphi)=\boldsymbol{h}(u, e^{i\varphi})$.

Обозначим через $U[\rho, \sigma]$ множество субгармонических функций $v(z)$ удовлетворяющих условиям $v(z)\leqslant\sigma|z|^\rho$; $\forall \boldsymbol{z}\in\boldsymbol{C}$, $v(0)=0$. Обозначим также $(\cdot)_\tau$ — преобразование $v\in U[\rho, \sigma]$ $v_\tau(z)=v(\tau z)\tau^{-\rho}$, $\forall\tau>0$. Очевидно, $U[\rho, \sigma]$ инвариантно относительно этого преобразования. Предельное множество $\mathrm{Fr}[u]$ содержится в $U[\rho, \sigma]$, замкнуто в D' и инвариантно относительно преобразования $(\cdot)_\tau$.

Обозначим $\mathrm{Fr}[f]\overset{\text{def}}{=}\mathrm{Fr}[\ln|f|]$.

Известно [9], что для любой $u\in\mathrm{SH}(\rho(r))$ существует $f\in A(\rho(r))$ такая, что $\mathrm{Fr}[f]=\mathrm{Fr}[u]$, т. е. все утверждения из п. 1 можно доказывать для субгармонических функций.

Отметим также неравенства

$$\boldsymbol{h}(u+w, z)\geqslant\boldsymbol{h}(u, z)+\boldsymbol{h}(w, z), \tag{2.2}$$

$$\overline{h}(u+w, z)\leqslant\overline{h}(u, z)+\overline{h}(w, z). \tag{2.3}$$

Пусть μ_u — распределение масс, ассоциированное по Риссу с функцией $u\in\mathrm{SH}(\rho(r))$. Оно удовлетворяет условию

$$\varlimsup_{R\to\infty}\mu_u(R)R^{-\rho(R)}=\overline{\Delta}<\infty;\ (\mu(R)=\mu\{|z|<R\}),$$

что мы будем обозначать так: $\mu\in M(\rho(r))$.

Семейство $\{\mu_t\}$, определенное для $\mu\in M(\rho(r))$ равенством $\mu_t(E)=\mu(tE)t^{-\rho(t)}$, где $E\subset\boldsymbol{C}$ — борелевское множество, а $tE=\{zt: z\in E\}$, является компактным в D' при $t\to\infty$, т. е. для любой последовательности $t_j\to\infty$ найдется подпоследовательность $t_j'\to\infty$ и распределение масс ν такие, что $\mu_{t_j'}\to\nu$ в D' (впрочем и в более слабом смысле — на финитных непрерывных функциях).

Множество таких ν обозначается $\mathrm{Fr}[\mu]$. Оно инвариантно относительно преобразования $(\cdot)_\tau$: $\nu_\tau(E)=\nu(\tau E)\tau^{-\rho}$ и удовлетворяет условию $\nu(R)\leqslant\Delta R^\rho$, $\forall R$ при некотором Δ ($\nu\in M[\rho, \Delta]$).

Отметим также, что

$$(\mu_u)_t=\mu_{u_t},\ \mathrm{Fr}[\mu]=\{\mu_v: v\in\mathrm{Fr}[u]\}. \tag{2.4}$$

Пусть $\nu\in M[\rho, \Delta]$. Канонический потенциал $I(z, \nu)=\int\limits_{C}H\times(z/\zeta, p)\,d\nu$, $p=[\rho]$, где

$$H(u, p)=\ln|1-u|+\mathrm{Re}\left\{\sum_{k=1}^{p}\frac{u^k}{k}\right\} \tag{2.5}$$

принадлежит $U[\rho, \sigma]$, причем, как обычно, $\mu_I=\boldsymbol{\nu}$.

3. Докажем теорему 3. Для доказательства необходимости нам понадобятся следующие утверждения, которые будут доказаны в п. 4.

Лемма 3.1. *Пусть заданы* $\varepsilon > 0$, $\tau_0 > 0$, $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$. *Тогда для некоторого* $\sigma > 0$ *существует* $v \in U[\rho, \sigma]$ *обладающая следующими свойствами:*

$$D' - \lim_{\tau \to 0} v_\tau = D' - \lim_{\tau \to \infty} v_\tau = 0, \tag{3.1}$$

$$v(e^{i\varphi_0}) < v_\tau(e^{i\varphi_0}), \ \tau \in (0, 1) \cup (1, \infty), \tag{3.2}$$

$$-\infty < v(e^{i\varphi_0}) < -\varepsilon, \tag{3.3}$$

кроме того из неравенства

$$v_\tau(e^{i\varphi_0}) - v(e^{i\varphi_0}) \leqslant \varepsilon/2 \tag{3.4}$$

следует, что

$$\tau \in \left[\frac{1}{\tau_0}, \ \tau_0\right]. \tag{3.5}$$

Последнее условие означает, что функция $\psi(\tau) = v_\tau(e^{i\varphi_0})$ *может опуститься ниже* $\psi(1) + \varepsilon/2$ *лишь в окрестности* $\tau = 1$.

Лемма 3.2. *Пусть для* $v \in U[\rho, \sigma]$ *выполняется условие (3.1),* $u \in \mathrm{SH}(\rho(r))$, $v^0 \in \mathrm{Fr}[u]$. *Существует* $w^0 \in \mathrm{SH}(\rho(r))$, *удовлетворяющая условиям:* $\mathrm{Fr}[w^0] = \{v_\tau : \tau \in (0, \infty)\} \cup \{0\}$ **(3.6)**, *если последовательность* $t_n \to \infty$ *такова, что* $D' - \lim\limits_{t_n \to \infty} w^0_{t_n} = v_\tau$ *для некоторого* $\tau \in (0, \infty)$ *и существует* $D' - \lim\limits_{t_n \to \infty} u_{t_n}$, *то*

$$D' - \lim_{t_n \to \infty} u_{t_n} = v^0_\tau. \tag{3.7}$$

Иначе говоря, w^0 устроена так, что по всем последовательностям t_n, не удовлетворяющим условию (3.7), $D' - \lim w^0{}_{tn} = 0$ и, кроме того, параметры τ у кривых $\{v_\tau : \tau \in (0, \infty)\}$ и $\{v^0_\tau : \tau \in (0, \infty)\}$ «согласованы».

Доказательство необходимости теоремы 3.

Нужно доказать, что из равенства

$$\boldsymbol{h}(u + w, \ e^{i\varphi_0}) = \boldsymbol{h}(u, \ e^{i\varphi_0}) + \boldsymbol{h}(w, \ e^{i\varphi_0}), \tag{3.8}$$

выполняющегося для фиксированных $u \in \mathrm{SH}(\rho(r))$, φ_0 и произвольной $w \in \mathrm{SH}(\rho(r))$ следует, что

$$\varliminf_{\tau \to 1} v_\tau(e^{i\varphi_0}) = \boldsymbol{h}(u, \ e^{i\varphi_0}) \tag{3.9}$$

для любой $v \in \mathrm{Fr}[u]$.

При этом предполагается, что $\boldsymbol{h}(u, \ e^{i\varphi_0}) > -\infty$, $\boldsymbol{h}(w, \mathrm{e}^{i\varphi_0}) > -\infty$.

Допустим противное, т. е. существует $v^0 \in \mathrm{Fr}[u]$ такая, что

$$\varliminf_{\tau \to 1} v^0_\tau(e^{i\varphi_0}) > \boldsymbol{h}(u, \ e^{i\varphi_0}). \tag{3.10}$$

Из неравенства (3.10) следует, что найдутся $\varepsilon > 0$, $\tau_0 > 0$ такие, что для любого $\tau \in \left[\frac{1}{\tau_0}, \tau_0\right]$ выполняется неравенство

$$v_\tau^0(e^{i\varphi_0}) > \boldsymbol{h}(u, e^{i\varphi_0}) + \varepsilon. \tag{3.11}$$

Построим по лемме 3.1 для этих ε, τ_0, φ_0 функцию v, а по лемме 3.2 для функции u, v^0, и уже найденной v — функцию $w^0(z)$.

Покажем, что для w^0 равенство (3.8) не выполняется.

Вычислим $\boldsymbol{h}(w^0, e^{i\varphi_0})$. Из (3.6) имеем

$$\boldsymbol{h}(w^0, e^{i\varphi_0}) = \min\{0, \inf\{v_\tau(e^{i\varphi_0}) : \tau \in (0, \infty)\}\}.$$

Из соотношения (3.3) следует, что $\{0\}$ можно отбросить, и из (3.2), что inf достигается при $\tau = 1$, т. е.

$$\boldsymbol{h}(w^0, e^{i\varphi_0}) = v(e^{i\varphi_0}). \tag{3.12}$$

Найдем теперь $v^\varepsilon \in \mathrm{Fr}[u + w^0]$, так, чтобы было $\boldsymbol{h}(u + w^0, e^{i\varphi_0}) > v^\varepsilon(e^{i\varphi_0}) - \varepsilon/3$. Пусть $t_n \to \infty$ и $(u + w^0)_{t_n} \to v^\varepsilon$ в D'. Переходя при необходимости к подпоследовательности, можно считать, что последовательности u_{t_n} и $w_{t_n}^0$ также сходятся. Рассмотрим два возможных случая. Первый, когда

$$D' - \lim w_{t_n}^0 = v_\tau, \ \tau \in (0, \infty). \tag{3.13}$$

В этом случае по свойству (3.7) $D' - \lim u_{t_n} = v_\tau^0$. И, значит, $v^\varepsilon = D' - \lim (u + w^0)_{t_n} = v_\tau + v_\tau^0$. Если $\tau \notin \left[\frac{1}{\tau_0}, \tau_0\right]$, то по (3.4)

$$v_\tau(e^{i\varphi_0}) > v(e^{i\varphi_0}) + \frac{\varepsilon}{2} = \boldsymbol{h}(w^0, e^{i\varphi_0}) + \varepsilon/2. \tag{3.14}$$

В этом случае имеем

$$\boldsymbol{h}(u + w, e^{i\varphi_0}) \geqslant v^\varepsilon(e^{i\varphi_0}) - \varepsilon/3 \geqslant \boldsymbol{h}(w^0, e^{i\varphi_0}) + \\ + \boldsymbol{h}(u, e^{i\varphi_0}) + \frac{\varepsilon}{6}. \tag{3.15}$$

Если $\tau \in [1/\tau_0, \tau_0]$, то из (3.11) получаем

$$\boldsymbol{h}(u + w^0, e^{i\varphi_0}) \geqslant \boldsymbol{h}(w^0, e^{i\varphi_0}) + \boldsymbol{h}(u, e^{i\varphi_0}) + \frac{2}{3}\varepsilon. \tag{3.16}$$

Таким образом, случай (3.13) разобран. Пусть $D' - \lim w_{t_n}^0 = 0$. В этом случае имеем, используя (3.3), $\boldsymbol{h}(u + w^0, e^{i\varphi_0}) \geqslant v^\varepsilon(e^{i\varphi_0}) - \varepsilon/3 \geqslant \boldsymbol{h}(u, e^{i\varphi_0}) - \varepsilon/3 > \boldsymbol{h}(u, e^{i\varphi_0}) + \boldsymbol{h}(w^0, e^{i\varphi_0}) + \frac{2}{3}\varepsilon$.

Таким образом, доказано, что $\boldsymbol{h}(u + w^0, e^{i\varphi_0}) \geqslant \boldsymbol{h}(u, e^{i\varphi_0}) + \boldsymbol{h}(w^0, e^{i\varphi_0}) + \varepsilon/6$, т. е. необходимость в теореме 3.

Доказательство достаточности в теореме 3. Пусть $u \in \mathrm{SH}(\rho(r))$ и для любой $v \in \mathrm{Fr}[u]$ выполняется (3.9). Покажем, что $\forall w \in \mathrm{SH}(\rho(r))$ выполняется (3.8). Достаточно доказать, что

$$\boldsymbol{h}(u + w, e^{i\varphi_0}) \leqslant \boldsymbol{h}(u, e^{i\varphi_0}) + \boldsymbol{h}(w, e^{i\varphi_0}), \tag{3.17}$$

так как обратное неравенство верно для любой $w \in \mathrm{SH}(\rho(r))$.

Отметим сначала, что для любой $v^2 \in \mathrm{Fr}[w]$ найдутся такие $v \in \in \mathrm{Fr}[u+w]$ и $v^1 \in \mathrm{Fr}[u]$, что

$$v = v^1 + v^2. \tag{3.18}$$

Действительно, пусть $t_n \to \infty$ такая последовательность, что $w_{t_n} \to v^2$. Можно считать, что $u_{t_n} \to v^1$, а $(u+w)_{t_n} \to v$, тогда выполняется (3.18). Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно мало. Выберем $v^2 \in \mathrm{Fr}[w]$ так, чтобы было $v^2(e^{i\varphi_0}) < \boldsymbol{h}(w, e^{i\varphi_0}) + \varepsilon$. Вследствие полунепрерывности $v^2(z)$

$$\overline{\lim_{\tau \to 1}} v_\tau^2 (e^{i\varphi_0}) \leqslant \boldsymbol{h}(w, e^{i\varphi_0}) + \varepsilon. \tag{3.19}$$

Пусть $v^1 \in \mathrm{Fr}[u]$ и $v \in \mathrm{Fr}[u+w]$ удовлетворяют (3.18). Имеем тогда $\boldsymbol{h}[u+w, e^{i\varphi_0}] \leqslant (v^1+v^2)_\tau (e^{i\varphi_0}) = v_\tau^1(e^{i\varphi_0}) + v_\tau^2(e^{i\varphi_0}), \ \forall \tau$. Отсюда получаем

$$\boldsymbol{h}[u+w, e^{i\varphi_0}] \leqslant \underline{\lim_{\tau \to 1}} v_\tau^1(e^{i\varphi_0}) + \overline{\lim_{\tau \to 1}} v_\tau^2 (e^{i\varphi_0}).$$

И значит, используя (3.9) и (3.19), получаем $\boldsymbol{h}[u+w, e^{i\varphi_0}] \leqslant \leqslant \boldsymbol{h}[u, e^{i\varphi_0}] + \boldsymbol{h}[w, e^{i\varphi_0}] + \varepsilon$, что и доказывает достаточность, так как ε произвольно.

4. Доказательство леммы 3.1. Положим

$$w(z) = \max(\ln|1 - ze^{-i\varphi_0}|, \ -N) + \mathrm{Re} \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} (ze^{-i\varphi_0})^n,$$
$$N > 0, \ p = [\rho].$$

Очевидно, w субгармоническая функция, массы ν_w которой сосредоточены в окрестности точки $e^{i\varphi_0}$. Поэтому $\nu_w \in M[\rho, \Delta]$ при некотором Δ и $D' - \lim\limits_{\tau \to 0} (\nu_w)_\tau = D' - \lim\limits_{\tau \to \infty} (\nu_w)_\tau = 0$.

Значит (см. п. 2), $w \in U[\rho, \sigma]$ при некотором σ. Заметим, что $D' - \lim\limits_{\tau \to 0} w_\tau = D' - \lim\limits_{\tau \to \infty} w_\tau = 0$. Исследуем подробнее поведение w_τ на луче $\{\arg z = \varphi_0\}$. Имеем

$$w_\tau (e^{i\varphi_0} \stackrel{\text{def}}{=} \psi(\tau) = \left[\max(\ln|1-\tau|, \ -N) + \sum_{n=1}^{p} \frac{\tau^n}{n}\right] \tau^{-\rho}. \tag{4.1}$$

Можно непосредственным исследованием установить следующие свойства $\psi(\tau)$, считая, что $N > 0$ достаточно велико:

а) вне интервала $[1 - e^{-N}, \ 1 + e^{-N}]$, $\psi(\tau) = H(\tau, p)\tau^{-\rho}$, где H — каноническое ядро (2.5), а внутри этого интервала первое слагаемое в (4.1) заменяется на $-N$;

б) $\psi(\tau) > 0$ при $\tau > \tau_1$-корня уравнения $H(\tau, p) = 0$, монотонно убывает на $(0, 1 - e^{-N})$ и монотонно возрастает на $(1 - -e^{-N}, \tau_1)$.

Полагаем теперь $\tau_2 = (1 - e^{-N})$ и $v(z) = w_{\tau_2}(z) \cdot D$. Эта функция уже удовлетворяет условиям (3.1) и (3.2) леммы и $v_\tau(e^{i\varphi_0})$ имеет единственный отрицательный минимум при $\tau = 1$. Поэтому можно подобрать достаточно большое D, чтобы удовлетворить условиям (3.4) и (3.5) при заданных ε и τ_0.

Доказательство леммы 3.2. В [9] было показано, в частности, что если выполняется условие (3.1), то существует $w^0 \in \in \mathrm{SH}(\rho(r))$, удовлетворяющая условию (3.6). Мы усовершенствуем конструкцию из [9] так, чтобы выполнялось дополнительно и условие (3.7).

Пусть $v \in U[\rho, \sigma]$ и $\nu = \nu_v$ распределение масс, ассоциированное с v. Из непрерывности в D' оператора Лапласа и условия (3.1) следует, что найдутся такие две последовательности $\tau_{j,0} \to 0$ и $\tau_{j,\infty} \to \infty$, что $D' - \lim \nu_{\tau_{j,0}} = D' - \lim \nu_{\tau_{j,\infty}} = 0$. Пусть $u \in \mathrm{SH}(\rho(r))$, $\mu = \mu_u$ распределение масс u, $v^0 \in \mathrm{Fr}[u]$, ν^0 — распределение масс v^0.

Из (2.4) следует, что существует последовательность $r_n \to \infty$ такая, что

$$D' - \lim (\mu_u)_{r_n} = \nu^0. \tag{4.2}$$

Можно считать, что $\{r_n\}$ удовлетворяет условию $r_{n+1}/r_n \to \infty$, причем стремление к бесконечности сколь угодно быстрое.

Определим теперь меру μ^0 равенствами

$$d\mu^0 = \begin{cases} L(|z|)\, d(\nu)_{\tau_n} & \text{для } |z|/r_n \in (\tau_{n,0};\ \tau_{n,\infty}), \\ 0 & \text{для } |z|/r_n \notin \bigcup\limits_n (\tau_{n,0};\ \tau_{n,\infty}), \end{cases}$$

где $L(r) = r^{\rho(r) - \rho}$, $\tau_n = \frac{1}{r_n}$. Можно показать, как и в [9] (теорема 2′), что $\mu^0 \in M(\rho(r))$ и $\mathrm{Fr}[\mu^0] = \{\nu_\tau : \tau \in (0, \infty)\} \cup \{0\}$. Полагаем теперь $w^0(z) = \int\limits_{C} H(z/\zeta, p)\, d\mu^0$ и показываем, как и в [9, § 4], что w^0 удовлетворяет условию (3.6). Условие (3.7) также выполняется. Действительно, из конструкции видно, что $\mu^0_{tn} \to \nu_\tau$ и, значит, $w^0_{t_n} \to v_\tau$ только по таким последовательностям $t_n \to \infty$, которые удовлетворяют условию $\exists\, c > 0$ и подпоследовательность $\{r_{j_n}\} \subset \{r_n\}$ такие, что $t_n/r_{j_n} \in (1/c, c)$, а для таких последовательностей $(\mu_u)_{tn} \to \nu^0_\tau$ и, значит, [9, § 4] $u_{t_n} \to v^0_\tau$.

5. Доказательство теоремы 1. Пусть $E \subset \{z : |z| = 1\}$ неразрежено в точке $e^{i\varphi_0}$ и $u \in \mathrm{SH}(\rho(r))$ такова, что $\forall w \in \mathrm{SH}(\rho(r))$ и $e^{i\varphi} \in E$ выполняется равенство

$$\boldsymbol{h}(u + w, e^{i\varphi}) = \boldsymbol{h}(u, e^{i\varphi}) + \boldsymbol{h}(w, e^{i\varphi}). \tag{5.1}$$

Требуется доказать, что

$$\boldsymbol{h}(u, e^{i\varphi_0}) = \bar{h}(u, e^{i\varphi_0}). \tag{5.2}$$

Лемма 5.1. Пусть E' — множество в $\mathbf{C}$, удовлетворяющее условию $\forall e^{i\varphi} \in E$, $\forall \delta > 0$ на луче $\{\arg z = \varphi\}$ найдется точка $z' \in E'$ такая, что $|z' - e^{i\varphi}| < \delta$. Тогда E', также как E, неразрежено в точке $e^{i\varphi_0}$.

Доказательство. Не ограничивая общности считаем, что E' не пересекается с некоторой окрестностью нуля.

Обозначим через $P(z)$ отображение, переводящее точку z в точку $e^{i \arg z}$. Легко видеть, что для любых $z_1', z_2' \in E'$ выполняется условие $|P(z_1') - P(z_2')| < A|z_1' - z_2'|$. Отсюда следует, что логарифмическая емкость $C_l(\cdot)$ удовлетворяет неравенству [10, с. 212]

$$C_l(M) < AC_l(M'), \tag{5.3}$$

где $M' \subset E'$, $M = P(M')$.

Воспользуемся теперь следующим условием неразреженности множества E в точке z_0. Во-первых, если E неразрежено в точке z_0, то существует компакт $K \subset E$ неразреженный в z_0 [10, с. 363, 376]. Во-вторых, для компакта, неразреженного в z_0, выполняется условие [10, с. 366]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln \dfrac{1}{C_l(K_n)}} = \infty, \tag{5.4}$$

где $K_n = K \cap \{z : q^{n+1} \leqslant |z - z_0| \leqslant q^{n+1}\}$, $0 < q < 1$.

Используя теперь неравенство (5.3), получаем, что из расходимости ряда (5.4) для некоторого компакта $K \subset E$ следует расходимость его и для $K' \subset E'$, где $K = P(K')$, т. е. E' неразрежено в точке $P(e^{i\varphi_0}) = e^{i\varphi_0}$. Лемма доказана.

Пусть $\varepsilon(\varphi) \to 0$ при $\varphi \to \varphi_0$ и $v \in \mathrm{Fr}[u]$ — произвольная функция. Пусть для $e^{i\varphi} \in E$ выполняется (3.8). Из (3.8) следует, что $\exists\, z' = z'(e^{i\varphi}, \Delta)$ для $\forall \Delta > 0$ такое, что

$$\arg z' = \varphi,\ v(z') < \boldsymbol{h}(e^{i\varphi}) + \varepsilon(\varphi), \tag{5.5}$$

причем $|z' - e^{i\varphi}| < \Delta$.

Обозначим $E' \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcup\limits_{\varphi \in E} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} z'(e^{i\varphi}, 1/n)$. Из (5.5) и полунепрерывности $\boldsymbol{h}(e^{i\varphi})$ следует, что

$$\varlimsup_{\substack{z' \to e^{i\varphi_0} \\ z' \in E'}} v(z') \leqslant \boldsymbol{h}(e^{i\varphi_0}). \tag{5.6}$$

Так как по лемме 5.1 E' неразрежено в $e^{i\varphi_0}$, то $\varlimsup v$ совпадает с $v(e^{i\varphi_0})$ [10, с. 376], т. е $v(e^{i\varphi_0}) \leqslant \boldsymbol{h}(e^{i\varphi_0})$. Обратное неравенство верно всегда, см. (2.1). Значит, $v(e^{i\varphi_0}) = \boldsymbol{h}(e^{i\varphi_0})$, $\forall v \in \mathrm{Fr}[u]$, т. е. $\overline{\boldsymbol{h}}(u, e^{i\varphi_0}) = \boldsymbol{h}(u, e^{i\varphi_0})$.

6. Доказательство теоремы 2. Будем обозначать множество e^{iE_0} через E. Требуется доказать, что если E разрежено в каждой точке окружности (в частности, в каждой собственной точке), то существует $u \in SH(\rho(r))$ такая, что $\forall w \in SH(\rho(r))$ выполняется равенство (5.1) $\forall e^{i\varphi} \in E$, но ни при каком φ_0 не выполняется (5.2).

Пусть $v^1 \in U[\rho, \sigma]$. Обозначим $\Lambda[v^1[\overset{\text{def}}{=} \subset \operatorname{los}_{D'} \{v^1_\tau : \tau \in (0, \infty)\}$ — замыкание в D' кривой $\{v^1_\tau : \tau \in (0, \infty)\}$. Обозначим через $\mathrm{Fr}_0[v^1]$ и $\mathrm{Fr}_\infty[v^1]$ — предельные множества для v^1 при $\tau \to 0, \infty$ [9, с. 4].

Мы воспользуемся следующим утверждением, доказанным в п. 7.

Лемма 6.1. *Существует $v^1 \in U[\rho, \sigma]$ такая, что*

$$\mathrm{Fr}_0[v^1] = \mathrm{Fr}_\infty[v^1], \tag{6.1}$$

$$\inf\{v(e^{i\varphi}) : v \in \Lambda(v^1)\} = \lim_{\tau \to 1} v(\tau e^{i\varphi}) = 0, \quad \forall v \in \Lambda[v^1], \ \forall e^{i\varphi} \in E, \tag{6.2}$$

$$\sup\{v(e^{i\varphi}) : v \in \Lambda(v^1)\} \neq \inf\{v(e^{i\varphi}) : v \in \Lambda(v^1)\}, \ \forall e^{i\varphi}, \tag{6.3}$$

в [9] *показано, что из условия (6.1) следует существование такой $u \in \mathrm{SH}(\rho(r))$, что* $\mathrm{Fr}[u] = \Lambda(v^1)$. *Из условия (6.2) следует, что*

$$\boldsymbol{h}[u, e^{i\varphi}] = 0 = \underline{\lim_{\tau \to 1}} v(\tau e^{i\varphi}), \ \forall v \in \mathrm{Fr}[u], \ \forall e^{i\varphi} \in E,$$

значит, $\forall e^{i\varphi} \in E$ выполняется условие (5.1). Из (6.3) следует, что $\boldsymbol{h}[u, e^{i\varphi}] \neq \overline{h}[u, e^{i\varphi}]$, $\forall e^{i\varphi}$.

7. Докажем лемму 6.1.

Пусть $B_j\{z : T^j < |z| < T^{j+1}\}$, где T — фиксировано, $T > 1$. Обозначим $L_E = \{z : e^{i \arg z} \in E\}$.

Пусть Q — множество рациональных чисел на интервале $(1, T)$. Полагаем: $S_Q\{z : |z| \in Q\}$, $T^j S_Q = \{zT^j : z \in S_Q\}$, $A_j = L_E \cap T^j S_Q$ $j = -\infty, \infty$.

Лемма 7.1. *Для некоторого $\sigma > 0$ $\exists v \in U[\rho, \sigma]$ такая, что*

$$v(z) = -\infty, \ z \in A_0 \ \textbf{(7.1)}, \quad \mu_v(e) = 0, \ \forall e \subset \boldsymbol{C} \setminus B_0 \ \textbf{(7.2)},$$

где μ_v — распределение масс, ассоциированное с v.

Доказательство. Множество E разрежено в каждой точке, значит, полярно [8, с. 95], поэтому [8, с. 43] и множество $\{z : |z| = r\} \cap L_E$ — полярно. Счетное объединение полярных множеств полярно [8, с. 43], поэтому A_0 полярно. Значит, учитывая [8, с. 55], получаем, что существует положительная мера μ, сосредоточенная на B_0, для которой потенциал $\int \mathrm{H}(z/\zeta, p)\, d\mu = v(z)$ обращается в $-\infty$ на A_0. Легко видеть, что $\mu \in M[\rho, \Delta]$ и, значит, $v \in U[\rho, \sigma]$ при некотором $\sigma > 0$.

Лемма 7.2. *Существует $\omega \in U[\rho, \sigma]$ для некоторого $\sigma > 0$ такая, что выполняются условия $\omega(z) = -\infty$; $z \in A \overset{\text{def}}{=} \bigcup_j A_j$,*

$$\omega(Tz) = T^\rho \omega(z) \tag{7.3}$$

Доказательство. Полагаем для любого $E \subset\subset \mathbf{C} \setminus 0$

$$\nu(E) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} T^{j\rho} \mu_v (T^{-j} E \cap B_0). \qquad (7.4)$$

Из (7.4) следует, что для любого E $\nu(TE) = T^{\rho} \nu(E)$ **(7.5)**. Покажем, что $\nu \in M[\rho, \Delta]$. Пусть $R > 0$ выберем k так, чтобы $RT^k \in [1, T]$, имеем, используя (7.5), $\nu(R) = \nu(RT^k) T^{-k\rho} = R^{\rho} \times \times \nu(RT^k)(RT^k)^{-\rho} \leqslant \nu(T) R^{\rho} \overset{\text{def}}{=} \Delta R^{\rho}$. Полагаем $\omega(z) = \int\limits_{C} H(z/\zeta, p) \times d\nu_{\zeta}$. Так как $\nu \in M[\rho, \Delta]$, то $\omega \in U[\rho, \sigma]$ при некотором σ, а из (7.5) следует (7.3).

Лемма 7.3. *Пусть ω — субгармоническая функция в $\mathbf{C}$. Обозначим $m(\varphi) = \max\{\omega(re^{i\varphi}) : r \in [1, T]\}$. Тогда существует такое $C > -\infty$, что $m(\varphi) > C$ $\forall \varphi$.* Доказательство леммы 7.3 опускаем.

Доказательство леммы 6.1. Пусть $\omega(z)$ найдено по лемме 7.2 и $v = (\omega(z) + D \ln^{+} 2|z|)$. Из условия (7.3) следует, что $\mathrm{Fr}_0[\omega] = \mathrm{Fr}_{\infty}[\omega] = \{\omega_{\tau} : \tau \in [1, T]\}$. Так как $(\ln^{+} 2|z|)_{\tau} \to 0$ при $\tau \to \to 0, \infty$, то v удовлетворяет условию $\mathrm{Fr}_0[v] = \mathrm{Fr}_{\infty}[v] = \{\omega_{\tau} : \tau \in \in [1, T]\}$. Можно показать, что если последовательность субгармонических функций $u_n \to u$ в D', то $u_n^{+} \to u^{+}$ в D'. Поэтому для функции $v^1(z) = v^{+}(z)$ имеем $\mathrm{Fr}_0[v^1] = \mathrm{Fr}_{\infty}[v^1] = \{\omega_{\tau}^{+} : \tau \in [1, T]\}$. Заметим, что $v^1(z) = 0$ для $z \in A$, так как A плотно в L_E, то выполняется (6.2). Выбирая D достаточно большим, можно, с учетом леммы 7.3, сделать так, чтобы на каждом луче была точка, где значение v^1 положительно. Поэтому $\sup\{v(e^{i\varphi}) : v \in \Lambda[v^1]\} > 0$. И, значит, (6.3) выполняется для $e^{i\varphi} \in E$. Пусть теперь $e^{i\varphi} \notin E$. Если бы $\boldsymbol{h}[u, e^{i\varphi}] = \bar{h}[u, e^{i\varphi}]$, то функция $v_{\tau}^1(e^{i\varphi})$ была бы постоянна по τ, но это неверно, так как при $\tau = T^k$ получаем, используя (7.3): $v_{\tau}^1(e^{i\varphi}) = [\omega(e^{i\varphi}) + D(\ln^{+} 2\tau)\tau^{-\rho}]^{+} \not\equiv v^1(e^{i\varphi})$. Лемма 6.1 доказана.

Список литературы: 1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.— М.: ГИТТЛ, 1956.— 630 с. 2. *Азарин В. С.* Теория роста субгармонических функций.— Харьков, ХГУ, 1982.— 74 с. 3. *Азарин В. С.* Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка.— Мат. сб., 1979, **108 (150)**, № 2. с. 147—167. 4. *Азарин В. С.* О сложении индикаторов целых функций.— Теория функций, функц. анализ и их приложения, 1966 вып. 2, с. 55—56. 5. *Фаворов С. Ю.* О сложении индикаторов целых и субгармонических функций многих переменных.— Мат. сб., **105 (147)**, с. 128—140. 6. *Напалков В. В.* Об одном классе уравнений типа свертки.— Усп. мат. наук, 1974, **29**, вып. 3 (177), с. 217—218. 7. *Епифанов О. В.* Об эпиморфизме свертки в выпуклой области.— Докл. АН СССР, 1974, **217**, № 1, с. 18—19. 8. *Брело М.* Основы классической теории потенциала.— М.: Мир, 1964.— 217 с. 9. *Азарин В. С., Гинер В. Б.* О строении предельных множеств целых и субгармонических функций.— Теория функций, функц. анализ и их приложения, 1982, вып. 38, с. 3—12. 10. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала.— М.: Изд.-во физ.-мат. лит., 1966.— 515 с.

Поступила в редколлегию 12.12.82.