УДК 517.54

*В. К. ДУБОВОЙ*

# ИНДЕФИНИТНАЯ МЕТРИКА В ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ПРОБЛЕМЕ ШУРА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. IV*

**10. Решение вырожденной задачи Шура.** В этом параграфе будет указан метод решения основных матричных неравенств

* Первые три части статьи опубликованы в выпусках 37, 38 и 41 этого сборника. Отметим, что для чтения этой статьи достаточно знакомства с I частью данной работы.

$(S)$ и $(S)$ (см. § 1) в случае вырождения основного информационного блока $A_n = I - C_n C_n^*$. Для отщепления ядра блока $A_n$ вводится понятие подпространства типа $K$ (п. 1). После отщепления ядра решение представляется в виде дробно-линейного преобразования матрицы-функции $\omega(\zeta) \in S_{p,q}$ (п. 1; леммы 10,1, 10.2) При этом матрицей коэффициентов дробно-линейного преобразования является элементарный кратный множитель неполного ранга [2]. Наличие ядра накладывает ограничения на параметр $\omega(\zeta)$, характер которых выясняется в п. 2. Окончательные результаты сформулированы в теоремах 10.1 и 10.2. Наконец, в п. 3 приведен пример подпространства типа $K$.

Заметим, что задачи с вырожденным информационным блоком рассматривались А. А. Нудельманом [3], И. П. Федчиной [4], Л. А. Галстяном [5]. Однако методы предлагаемые в этой работе отличны от рассматриваемых ранее.

1. В дальнейшем удобно отождествить функции $\omega(\zeta) \in S_{p,q}$ с операторнозначными функциями, действующими из пространства $E_-$ ($\dim E_- = q$) в пространство $E_+$ ($\dim E_+ = p$).

В силу блочной структуры оператора $C_k$ будем считать, что $A_k$ действует в пространстве

$$E_+^{(k)} = E_+ \oplus E_+ \oplus \cdots \oplus E_+, \tag{10.1}$$

где $E_+$ повторено $k+1$ раз. Это позволяет вложить $E_+^{(k-1)}$ в $E_+^{(k)}$, положив $E_+^{(k)} = E_+^{(k-1)} \oplus E_+$. Таким образом,

$$E_+ = E_+^{(0)} \subset E_+^{(1)} \subset \cdots \subset E_+^{(n)}. \tag{10.2}$$

Определение. *Будем говорить, что подпространство* $L \subset E_+^{(n)}$ *является подпространством типа* $K$, *если*

*1)* $L$ *является дополнением к* $\operatorname{Ker} A_n$, *т. е.* $L \dotplus \operatorname{Ker} A_n = E_+^{(n)}$;

2) $L$ *инвариантно относительно* $V_{p,n}^*$, где

$$V_{p,n} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ I_p & 0 & & & & \\ & I_p & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & I_p & 0 \end{bmatrix}.$$

В пункте 3 приводится пример подпространства типа $K$. Отсюда, в частности, следует, что подпространств типа $K$ бесконечно много.

Пусть $L$ — произвольное подпространство типа $K$ и $P$ — ортопроектор на $L$. Тогда очевидно,

$$V_{p,n}^* P = P V_{p,n}^* P. \tag{10.3}$$

Пусть, далее, $\tilde{C}_n = PC_n$, $A_n^{(1)} = (P - \tilde{C}_n\tilde{C}_n^*)_{|L} = PA_nP_{|L}$. Ортогональное разложение $E_+^{(n)} = L \oplus \tilde{L}$ позволяет рассмотреть блочное представление $A_n$

$$A_n = \begin{bmatrix} A_n^{(1)} & B \\ B^* & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix}, \tag{10.4}$$

где $X$ является решением уравнения $A_n^{(1)} X = B$. Из (10.4) следует, что $\operatorname{Ker} A_n$ состоит из векторов $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in L$, $f_2 \in \tilde{L}$, $f_1 = -Xf_2$, т. е. $\operatorname{Ker} A_n = \Delta \begin{bmatrix} -X \\ I \end{bmatrix}$. Значит,

$$\operatorname{Ker}[-X^*,\ I] = \Delta_{A_n}. \tag{10.5}$$

В дальнейшем существенную роль играют следующие свойства $\tilde{C}_n$;

$$\tilde{C}_n V_{q,\,n} = PV_{p,\,n}\tilde{C}_n, \tag{10.6}$$

$$P - \tilde{C}_n\tilde{C}_n^* \geqslant 0, \quad \operatorname{rang}(P - \tilde{C}_n\tilde{C}_n^*) = \operatorname{rang} P. \tag{10.7}$$

Для получения (10.6) достаточно равенство $C_nV_{q,\,n} = V_{p,\,n}C_n$ умножить слева на $P$ и воспользоваться (10.3). Соотношения (10.7) следует из того, что $L$ — подпространство типа $K$ и $P - \tilde{C}_n\tilde{C}_n^* = PA_nP$.

При разложении $E_+^{(n)} = L \oplus \tilde{L}$ оператор $P - \tilde{C}_n\tilde{C}_n^*$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} A_n^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В связи с этим символом $(P - \tilde{C}_n\tilde{C}_n^*)^{-1}$ обозначим оператор вида

$$\begin{bmatrix} A_n^{(1)-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Приступим к решению неравенств $(S)$ и $(\tilde{S})$. Записав $(S)$ в виде (см. § 1, (1.4))

$$\begin{bmatrix} I - C_nC_n^* & B^{(1)}(\zeta,\ n) \\ B^{(1)*}(\zeta,\ n) & \dfrac{I - \theta(\zeta)\,\theta^*(\zeta)}{1 - |\zeta|^2} \end{bmatrix} \geqslant 0,$$

$$B^{(1)}(\zeta,\ n) = \Lambda_{p,\,n}^*(\zeta) - C_n\Lambda_{q,\,n}^*(\zeta)\,\theta^*(\zeta),$$

умножим его справа на

$$T = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix},$$

а слева на $T^*$. Принимая во внимание (10.4), приходим к эквивалентному неравенству

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X^* & I \end{bmatrix} B^{(1)}(\zeta, n) \\ * & \dfrac{I-\theta(\zeta)\theta^*(\zeta)}{1-|\zeta|^2} \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

По лемме о неотрицательной блок-матрице (см., например, [6, с. 88) получаем, что последнее неравенство эквивалентно соотношениям

$$[-X^*, I]\, B^{(1)}(\zeta, n) = 0, \tag{10.8}$$

$$\frac{I-\theta(\zeta)\theta^*(\zeta)}{1-|\zeta|^2} - B^{(1)*}(\zeta, n)(P-\widetilde{C}_n\widetilde{C}_n^*)^{-1} B^{(1)}(\zeta, n) = 0. \tag{10.9}$$

Сейчас решим неравенство (10.9), а затем во множестве решений выберем те, которые удовлетворяют условию (10.8). Тем самым множество решений неравенства ($S$) будет полностью описано.

Неравенство (10.9) решаем так же, как и в невырожденном случае, а именно, учитывая, что

$$\frac{I-\theta(\zeta)\theta^*(\zeta)}{1-|\zeta|^2} = [\theta(\zeta), I]\frac{j}{1-|\zeta|^2}\begin{bmatrix} \theta^*(\zeta) \\ I \end{bmatrix};$$

$$B^{(1)}(\zeta, n) = [-C_n, I]\begin{bmatrix} \Lambda_{q,n}^*(\zeta) & 0 \\ 0 & \Lambda_{p,n}^*(\zeta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta^*(\zeta) \\ I \end{bmatrix}, \tag{10.10}$$

перепишем (10.9) в виде

$$[\theta(\zeta), I]\Big\{\frac{j}{1-|\zeta|^2} -$$

$$- j\begin{bmatrix} \Lambda_{q,n}(\zeta) & 0 \\ 0 & \Lambda_{p,n}(\zeta) \end{bmatrix} H_n \begin{bmatrix} \Lambda_{q,n}^*(\zeta) & 0 \\ 0 & \Lambda_{p,n}^*(\zeta) \end{bmatrix} j\Big\}\begin{bmatrix} \theta^*(\zeta) \\ 0 \end{bmatrix} \geqslant 0, \tag{10.11}$$

где

$$H_n = \begin{bmatrix} \widetilde{C}_n^* \\ P \end{bmatrix}(P-\widetilde{C}_n\widetilde{C}_n^*)^{-1}[\widetilde{C}_n, P].$$

В силу (10.3), (10.6) и (10.7), как показано в [2],

$$B_n(\zeta) = I + \frac{1-\zeta}{\zeta} j \begin{bmatrix} \Lambda_{q,n}(1) & 0 \\ 0 & \Lambda_{p,n}(1) \end{bmatrix} H_n \begin{bmatrix} \Lambda_{q,n}^*\left(\frac{1}{\bar\zeta}\right) & 0 \\ 0 & \Lambda_{p,n}^*\left(\frac{1}{\bar\zeta}\right) \end{bmatrix} \tag{10.12}$$

является $j$-растягивающим элементарным кратным множителем, при этом

$$B_n^*(\zeta)\, jB_n(\zeta) - j = \frac{1-|\zeta|^2}{|\zeta|^2} \times$$
$$\times \begin{bmatrix} \Lambda_{q,n}\left(\frac{1}{\bar\zeta}\right) & 0 \\ 0 & \Lambda_{p,n}\left(\frac{1}{\bar\zeta}\right) \end{bmatrix} H_n \begin{bmatrix} \Lambda_{q,n}^*\left(\frac{1}{\bar\zeta}\right) & 0 \\ 0 & \Lambda_{p,n}^*\left(\frac{1}{\bar\zeta}\right) \end{bmatrix}.$$

Так как $B_n^{*-1}(\zeta) = jB_n\left(\frac{1}{\bar\zeta}\right) j$, то

$$\frac{j - B_n^{-1}(\zeta)\, jB_n^{*-1}(\zeta)}{1-|\zeta|^2} =$$
$$= j\begin{bmatrix} \Lambda_{q,n}(\zeta) & 0 \\ 0 & \Lambda_{p,n}(\zeta) \end{bmatrix} H_n \begin{bmatrix} \Lambda_{q,n}^*(\zeta) & 0 \\ 0 & \Lambda_{p,n}^*(\zeta) \end{bmatrix} j.$$

Поэтому (10.11) можно переписать следующим образом

$$[\theta(\zeta),\ I]\, \frac{B_n^{-1}(\zeta)\, jB_n^{*-1}(\zeta)}{1-|\zeta|^2} \begin{bmatrix} \theta^*(\zeta) \\ I \end{bmatrix} \geqslant 0. \qquad (10.13)$$

Определим пару матриц-функций, полагая $[\theta(\zeta),\ I]\, B_n^{-1}(\zeta) = [u(\zeta),\ v(\zeta)]$ **(10.14).** Как и в невырожденном случае проверяется, что $[u(\zeta),\ v(\zeta)]$ является голоморфной, $j$-нерастягивающей и неособенной парой в единичном круге, т. е. имеет смысл частное $\omega(\zeta) = v^{-1}(\zeta)\, u(\zeta) \in S_{p,q}$ **(10.15).**

Разобьем $B_n(\zeta)$ на блоки соответственно блокам матрицы $j$

$$B_n(\zeta) = \begin{bmatrix} a(\zeta) & b(\zeta) \\ c(\zeta) & d(\zeta) \end{bmatrix}.$$

Тогда из (10.14) с учетом (10.15) получим $\theta(\zeta) = [\omega(\zeta)\, b(\zeta) + d(\zeta)]^{-1}[\omega(\zeta)\, a(\zeta) + c(\zeta)]$ **(10.16).** Обратно, если $\omega(\zeta) \in S_{p,q}$, то матрица-функция $\omega(\zeta)\, b(\zeta) + d(\zeta)$ обратима всюду в единичном круге и $\theta(\zeta)$ удовлетворяет (10.13), а значит, и (10.9). Итак, доказана

***Лемма 10.1.*** *Общее решение $\theta(\zeta)$ неравенства (10.9) представляется в виде дробно-линейного преобразования (10.16) произвольной матрицы-функции $\omega(\zeta) \in S_{p,q}$. Матрицей коэффициентов дробно-линейного преобразования является $j$-растягивающий элементарный кратный множитель (10.12), построенный по матрице $C_n$ и одному из подпространств типа $K$.*

Выясним, какие требования к параметру $\omega(\zeta)$ предъявляет условие (10.8). Из (10.16) следует

$$\begin{bmatrix} \theta^*(\zeta) \\ I \end{bmatrix} = B_n^*(\zeta) \begin{bmatrix} \omega^*(\zeta) \\ I \end{bmatrix} q^*(\zeta), \quad q(\zeta) = (\omega(\zeta)\, b(\zeta) + d(\zeta))^{-1}.$$

Поэтому, учитывая (10.10), получаем

$$B^{(1)}(\zeta, n) = [-C_n, I]\begin{bmatrix}\Lambda^*_{q,n}(\zeta) & 0\\ 0 & \Lambda^*_{p,n}(\zeta)\end{bmatrix} B^*_n(\zeta)\begin{bmatrix}\omega^*(\zeta)\\ I\end{bmatrix} q^*(\zeta). \quad (10.17)$$

Простой подсчет дает $\Lambda^*_{p,n}(\zeta)\Lambda_{p,n}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) = D_{p,n}(\bar{\zeta}) + D^*_{p,n}\left(\frac{1}{\zeta}\right) + I$, где $D_{p,n}(\zeta) = \zeta V_{p,n} + \zeta^2 V^2_{p,n} + \cdots + \zeta^n V^n_{p,n}$. Пусть для краткости

$$\Phi_n(\zeta) = \begin{bmatrix} D_{q,n}(\bar{\zeta}) + D^*_{q,n}\left(\frac{1}{\zeta}\right) + I & 0\\ 0 & D_{p,n}(\bar{\zeta}) + D^*_{p,n}\left(\frac{1}{\zeta}\right) + I.\end{bmatrix}.$$

Тогда вид (10.12) $B_n(\zeta)$ позволяет переписать (10.17) следующим образом:

$$B^{(1)}(\zeta, n) = [-C_n, I]\left\{\begin{bmatrix}\Lambda^*_{q,n}(\zeta) & 0\\ 0 & \Lambda^*_{p,n}(\zeta)\end{bmatrix} + \right.$$
$$\left. + \frac{1-\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}}\Phi_n(\zeta) H_n \begin{bmatrix}\Lambda^*_{q,n}(1) & 0\\ 0 & \Lambda^*_{p,n}(1)\end{bmatrix} j\right\}\begin{bmatrix}\omega^*(\zeta)\\ I\end{bmatrix} q^*(\zeta). \quad (10.18)$$

Заметив, что

$$\Lambda^*_{p,n}(\zeta) = \left(I - \frac{1-\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}} D_{p,n}(\bar{\zeta})\right)\Lambda^*_{p,n}(1),$$

имеем

$$[-C_n, I]\begin{bmatrix}\Lambda^*_{q,n}(\zeta) & 0\\ 0 & \Lambda^*_{p,n}(\zeta)\end{bmatrix} = [-C_n, I] \times$$
$$\times\left(I - \frac{1-\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}}\begin{bmatrix}D_{q,n}(\bar{\zeta}) & 0\\ 0 & D_{p,n}(\bar{\zeta})\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\Lambda^*_{q,n}(1) & 0\\ 0 & \Lambda^*_{p,n}(1)\end{bmatrix} =$$
$$= \left(I - \frac{1-\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}} D_{p,n}(\bar{\zeta})\right)[-C_n, I] \times \begin{bmatrix}\Lambda^*_{q,n}(1) & 0\\ 0 & \Lambda^*_{p,n}(1)\end{bmatrix}. \quad (10.19)$$

Далее, с учетом того, что $\tilde{C}_n = P_n C_n$, получаем

$$[-C_n, I]\Phi_n(\zeta) H_n = [-C_n, I]\Phi_n(\zeta)\begin{bmatrix}C^*_n\\ I\end{bmatrix}(P - \tilde{C}_n\tilde{C}^*_n)^{-1}[C_n, I] =$$
$$= \left\{A_n\left(I + D^*_{p,n}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right) + D_{p,n}(\bar{\zeta}) A_n\right\}(P - \tilde{C}_n\tilde{C}^*_n)^{-1}[C_n, I] =$$
$$= \left\{A_n\left(I + D^*_{p,n}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right)(P - \tilde{C}_n\tilde{C}^*_n)^{-1} + D_{p,n}(\bar{\zeta})\begin{bmatrix}I & 0\\ X^* & 0\end{bmatrix}\right\}[C_n, I].$$

Таким образом, из (10.18) и (10.19) следует

$$B^{(1)}(\zeta, n)=\left\{I-\frac{1-\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}} D_{p, n}(\zeta)\begin{bmatrix}0 & 0\\ -X^* & I\end{bmatrix}+\frac{1-\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}} A_n\left(I+D_{p, n}^*\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right) \times\right.$$
$$\left.\times\left(P-\widetilde{C}_n \widetilde{C}_n^*\right)^{-1}\right\}[-C_n, I]\begin{bmatrix}\Lambda_{q, n}^*(1) & 0\\ 0 & \Lambda_{p, n}^*(1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega^*(\zeta)\\ I\end{bmatrix} q^*(\zeta).$$

Отсюда и из (10.5) находим, что условие (10.8) равносильно равенству

$$[-X^*, I]\left(I-\frac{1-\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}} D_{p, n}(\bar{\zeta})\begin{bmatrix}0 & 0\\ -X^* & I\end{bmatrix}\right)[-C_n, I] \times$$
$$\times\begin{bmatrix}\Lambda_{q, n}^*(1) & 0\\ 0 & \Lambda_{p, n}^*(1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega^*(\zeta)\\ I\end{bmatrix}=0,$$

или

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ -X^* & I\end{bmatrix}\left(I-\frac{1-\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}} D_{p, n}(\bar{\zeta})\begin{bmatrix}0 & 0\\ -X^* & I\end{bmatrix}\right)[-C_n, I] \times$$
$$\times\begin{bmatrix}\Lambda_{q, n}^*(1) & 0\\ 0 & \Lambda_{p, n}^*(1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega^*(\zeta)\\ I\end{bmatrix}=0,$$

т. е.

$$\left(I-\frac{1-\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}}\begin{bmatrix}0 & 0\\ -X^* & I\end{bmatrix} D_{p, n}(\bar{\zeta})\right)\begin{bmatrix}0 & 0\\ -X^* & I\end{bmatrix}[-C_n, I] \times$$
$$\times\begin{bmatrix}\Lambda_{q, n}^*(1) & 0\\ 0 & \Lambda_{p, n}^*(1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega^*(\zeta)\\ I\end{bmatrix}=0.$$

Отсюда следует, что (10.8) эквивалентно условию

$$[-X^*, I][-C_n, I]\begin{bmatrix}\Lambda_{q, n}^*(1) & 0\\ 0 & \Lambda_{p, n}^*(1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega^*(\zeta)\\ I\end{bmatrix}=0.$$

Обозначив через $P_0$ ортопроектор на $\operatorname{Ker} A_n$, полученное условие можно переписать в виде

$$P_0[-C_n, I]\begin{bmatrix}\Lambda_{q, n}^*(1) & 0\\ 0 & \Lambda_{p, n}^*(1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega^*(\zeta)\\ I\end{bmatrix}=0. \qquad (10.20)$$

Обратимся теперь к неравенству $(\widetilde{S})$ (см. п. 1):

$$\begin{bmatrix}I-C_n C_n^* & \widetilde{B}^{(1)}(\zeta, n)\\ \widetilde{B}^{(1)*}(\zeta, n) & \dfrac{I-\theta^*(\zeta)\,\theta(\zeta)}{1-|\zeta|^2}\end{bmatrix} \geqslant 0,$$

где

$$\widetilde{B}^{(1)}(\zeta, n)=\frac{1}{\zeta} \Lambda_{p, n}^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \theta(\zeta)-\frac{1}{\zeta} C_n \Lambda_{q, n}^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right).$$

Умножив неравенство $(\bar{S})$, как и неравенство $(S)$ справа на

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix},$$

а слева на $\tilde{T}^*$, получим эквивалентное неравенство

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X^* & I \end{bmatrix} \tilde{B}^{(1)}(\zeta, n) \\ * & \dfrac{I - \theta^*(\zeta)\,\theta(\zeta)}{1 - |\zeta|^2} \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

Как и в случае неравенства $(S)$, приходим к тому, что последнее неравенство равносильно условиям

$$[-X^*, \ I]\, \tilde{B}^{(1)}(\zeta, n) = 0, \tag{10.21}$$

$$\frac{I - \theta^*(\zeta)\,\theta(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}\zeta} - \tilde{B}^{(1)*}(\zeta, n)\,(P - \tilde{C}_n \tilde{C}_n^*)^{-1}\, \tilde{B}^{(1)}(\zeta, n) \geqslant 0. \tag{10.22}$$

Решим вначале неравенство (10.22). Для этого рассмотрим $\tilde{j}$-растягивающий элементарный кратный множитель [2]

$$\tilde{B}_n(\zeta) = I + (1 - \zeta) \begin{bmatrix} \Lambda_{p,n}(\zeta) & 0 \\ 0 & \Lambda_{q,n}(\zeta) \end{bmatrix} \times$$
$$\times\, \tilde{H}_n \begin{bmatrix} \Lambda_{p,n}^*(1) & 0 \\ 0 & \Lambda_{q,n}^*(1) \end{bmatrix} \tilde{j}, \tag{10.23}$$

где

$$\tilde{H}_n = \begin{bmatrix} P \\ \tilde{C}_n^* \end{bmatrix} (P - \tilde{C}_n \tilde{C}_n^*)^{-1} [P, \ \tilde{C}_n], \quad \tilde{j} = \begin{bmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}.$$

Повторяя рассуждения, проведенные в случае неравенства $(S)$, можно показать, что (10.22) эквивалентно неравенству

$$[\theta^*(\zeta), \ I]\, \frac{\tilde{B}_n^{*-1}(\zeta)\, \tilde{j} \tilde{B}_n^{-1}(\zeta)}{1 - |\zeta|^2} \begin{bmatrix} \theta(\zeta) \\ I \end{bmatrix} \geqslant 0,$$

что в свою очередь приводит к утверждению:

***Лемма 10.2.*** *Общее решение $\theta(\zeta)$ неравенства (10.22) представляется в виде дробно-линейного преобразования $\theta(\zeta) = [\tilde{a}(\zeta)\,\tilde{\omega}(\zeta) + \tilde{b}(\zeta)]\,[\tilde{c}(\zeta)\,\tilde{\omega}(\zeta) + \tilde{d}(\zeta)]^{-1}$ произвольной матрицы-функции $\tilde{\omega}(\zeta) \in S_{p,q}$. Матрицей коэффициентов*

$$\tilde{B}_n(\zeta) = \begin{bmatrix} \tilde{a}(\zeta) & \tilde{b}(\zeta) \\ \tilde{c}(\zeta) & \tilde{d}(\zeta) \end{bmatrix}$$

*дробно-линейного преобразования является $\tilde{j}$-растягивающий элементарный кратный множитель (10.23), построенный по матрице $C_n$ и одному из подпространств типа $K$.*

Далее, как и ранее, получаем, что условие (10.21) эквивалентно равенству

$$P_0 [I, \ -C_n] \begin{bmatrix} \Lambda^*_{p,n}(1) & 0 \\ 0 & \Lambda^*_{q,n}(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\omega}(\zeta) \\ I \end{bmatrix} = 0. \qquad (10.24)$$

**2.** Выясним теперь смысл условий (10.20) и (10.24). Для этого перепишем их соответственно в виде $-P_0 C_n \Lambda^*_{q,n}(1)\,\omega^*(\zeta) + P_0 \Lambda^*_{p,n}(1) = 0$, $P_0 \Lambda^*_{p,n}(1)\,\tilde{\omega}(\zeta) - P_0 C_n \Lambda^*_{q,n}(1) = 0$. Взяв сопряжение над этими равенствами, получаем

$$\omega(\zeta)\, \Lambda_{q,n}(1)\, C^*_n P_0 = \Lambda_{p,n}(1)\, P_0, \qquad (10.25)$$

$$\tilde{\omega}^*(\zeta)\, \Lambda_{p,n}(1)\, P_0 = \Lambda_{q,n}(1)\, C^*_n P_0. \qquad (10.26)$$

Заметим, что

$$P_0 C_n \Lambda^*_{q,n}(1)\, \Lambda_{q,n}(1)\, C^*_n P_0 = P_0 C_n (D_{q,n}(1) + D^*_{q,n}(1) + I)\, C^*_n P_0 = P_0 D_{p,n}(1)\, C_n C^*_n P_0 + P_0 C_n C^*_n D_{p,n}(1) P_0 + P_0 C_n C^*_n P_0 = P_0 (D_{p,n}(1) + D^*_{p,n}(1) + I)\, P_0 = P_0 \Lambda^*_{p,n}(1)\, \Lambda_{p,n}(1)\, P_0.$$

Пусть $M_0$ — образ оператора $\Lambda^*_{q,n}(1)\, C^*_n P_0$, а $N_0$ — образ $\Lambda_{p,n}(1)\, P_0$. Тогда из последних равенств видно, что отображение $U$, определяемое равенством $U \Lambda_{q,n}(1)\, C^*_n P_0 = \Lambda_{p,n}(1)\, P_0$, является унитарным отображением $M_0$ на $N_0$.

Таким образом, условия (10.25) и (10.26) эквивалентны соответственно равенствам $\omega(\zeta)_{|M_0} = \tilde{\omega}(\zeta)_{|M_0} = U$, т. е. при разложении $E_- = M_0 \oplus M_1$, $E_+ = N_0 \oplus N_1$ параметр $\omega(\zeta)$ имеет блочное представление

$$\omega(\zeta) = \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & \omega_1(\zeta) \end{bmatrix},$$

где $\omega_1(\zeta)$ — произвольное голоморфное внутри единичного круга сжимающее отображение $M_1$ на $N_1$. Аналогичным образом описывается и параметр $\tilde{\omega}(\zeta)$.

Итак, доказаны следующие утверждения.

**Теорема 10.1.** *Общее решение $\theta(\zeta)$ неравенства (S) представляется в виде дробно-линейного преобразования матрицы-функции $\omega(\zeta) \in S_{p,q}$:*

$$\theta(\zeta) = (\omega(\zeta)\, b(\zeta) + d(\zeta))^{-1} (\omega(\zeta)\, a(\zeta) + c(\zeta)). \qquad (10.27)$$

***Пусть** $\theta(\zeta)$ действует из пространства $E_-$ в $E_+$. Тогда при разложении $E_- = M_0 \oplus M_1$, $E_+ = N_0 \oplus N_1$, где $M_0$ — образ $\Lambda_{q,n}(1) \times C^*_n P_0$, $N_0$ — образ $\Lambda_{p,n}(1)\, P_0$, $P_0$ — ортопроектор на* Ker $(I -$

$-C_nC_n^*)$, а $\Lambda_{p,n}(\zeta)=[I_p, \zeta I_p, \ldots, \zeta^n I_p]$, *параметр* $\omega(\zeta)$ *имеет блочное представление*

$$\omega(\zeta)=\begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & \omega_1(\zeta) \end{bmatrix},$$

*при этом* $U$ *является унитарным отображением* $M_0$ *на* $N_0$ *и определяется по данным задачи из равенства* $U\Lambda_{q,n}(1)C_n^*P_0 = \Lambda_{p,n}(1)P_0$, *а* $\omega_1(\zeta)$ — *произвольное голоморфное внутри единичного круга сжимающее отображение* $M_1$ *на* $N_1$.

Матрица коэффициентов дробно-линейного преобразования (10.27)

$$B_n(\zeta)=\begin{bmatrix} a(\zeta) & b(\zeta) \\ c(\zeta) & d(\zeta) \end{bmatrix}$$

является $j$-растягивающим элементарным кратным множителем (10.12), который строится по матрице $C_n$ и одному из подпространств типа $K$.

**Теорема 10.2.** *Общее решение* $\theta(\zeta)$ *неравенства* $(\tilde{S})$ *представляется в виде дробно-линейного преобразования матрицы-функции* $\tilde{\omega}(\zeta)\in S_{p,q}$: $\theta(\zeta)=(\tilde{a}(\zeta)\tilde{\omega}(\zeta)+\tilde{b}(\zeta))(\tilde{c}(\zeta)\tilde{\omega}(\zeta)+\tilde{d}(\zeta))^{-1}$, *при этом параметр* $\tilde{\omega}(\zeta)$ *описывается так же, как и в предыдущей теореме, а матрица коэффициентов дробно-линейного преобразования*

$$\tilde{B}_n(\zeta)=\begin{bmatrix} \tilde{a}(\zeta) & \tilde{b}(\zeta) \\ \tilde{c}(\zeta) & \tilde{d}(\zeta) \end{bmatrix}$$

*является* $\tilde{j}$*-растягивающим элементарным кратным множителем (10.23), который строится по матрице* $C_n$ *и одному из подпространств типа* $K$.

*Замечание.* Можно показать, что $\dim M_0=\dim N_0=\dim \operatorname{Ker} A_n \times$ $\times (\operatorname{mod} \operatorname{Ker} A_{n-1})$.

**3.** Приведем теперь пример подпространства типа $K$. Для этого обозначим через $\tilde{F}_k$ ортогональную проекцию $\operatorname{Ker} A_k$ на $E_+^{(k)}\ominus$ $\ominus E_+^{(k-1)}$, $k=0, 1, 2, \ldots, n$; $E_+^{(-1)}=0$ (см. (10.1)). Пусть $\tilde{F}=$ $=\tilde{F}_0\oplus\tilde{F}_1\oplus\cdots\oplus\tilde{F}_n$.

***Лемма 10.3.*** *Подпространство* $\tilde{F}$ *инвариантно относительно* $V_{p,n}$.

Доказательство. Так как $V_{p,n}\tilde{F}_n=0$, то, учитывая вложения (10.2), достаточно показать, что

$$V_{p,k+1}\tilde{F}_k\subset\tilde{F}_{k+1},\quad k=0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{10.28}$$

Пусть $h \in \widetilde{F}_k$. Тогда в соответствии с (10.1) существует $f \in \operatorname{Ker} A_k \subset E_+^{(k)}$, $f = \{f_0, f_1, \ldots, f_k\}$, $f_k = h$. Пусть $\widetilde{f} = \{f, 0\} \in E_+^{(k+1)}$ и $g = V_{p,k+1}\widetilde{f} = \{0, f_0, f_1, \ldots, f_k\} = \{0, f\}$. Учитывая, что

$$C_{k+1} = \begin{bmatrix} c_0 & 0 \ldots 0 \\ c_1 & \\ \vdots & C_k \\ c_{k+1} & \end{bmatrix},$$

получаем $(A_{k+1}g, g) = -\| c_1^* f_0 + c_2^* f_1 + \cdots + c_{k+1}^* f_k \|^2 \leqslant 0$. Следовательно, $g \in \operatorname{Ker} A_{k+1}$, $h = f_k \in \widetilde{F}_{k+1}$, и включение (10.28) доказано.

***Лемма 10.4.*** *Имеет место равенство* $\dim \widetilde{F} = \dim \operatorname{Ker} A_n$. *При $n = 0$ утверждение очевидно. Далее, предположив его справедливость для $n-1$, заметим, что*

$$A_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} & B_n \\ B_n^* & I - \sum\limits_{k=0}^{n} c_k c_k^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ Y^* & I \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & I - \sum\limits_{k=0}^{n} c_k c_k^* - Y^* A_{n-1} Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

*где $Y$ является решением уравнения $A_{n-1}Y = B_n$. Значит,* $\operatorname{Ker} A_n$ *состоит из векторов $\{f, g\}$, таких что $f + Yg \in \operatorname{Ker} A_{n-1}$, $g \in \operatorname{Ker} (I - \sum\limits_{k=0}^{n} c_k c_k^* - Y^* A_{n-1} Y)$, при этом $g \in \widetilde{F}_n$.*

Отсюда следует, что $\dim \operatorname{Ker} A_n = \dim \widetilde{F}_n \pmod{\operatorname{Ker} A_{n-1}}$, и лемма доказана.

Пусть $F = E_+^{(n)} \ominus \widetilde{F}$. Тогда $F = F_0 \oplus F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$, $F_k = E_+ \ominus \widetilde{F}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Докажем, что $F$ является подпространством типа $K$. Из лемм 10.3 и 10.4 следует, что для этого достаточно показать, что $F \cap \operatorname{Ker} A_n = \{0\}$. Если $A_n f = 0$, $f = \{f_0, f_1, \ldots, f_n\} \in F$, то с одной стороны, $f_n \in F_n$, а с другой, $f_n \in \widetilde{F}_n$, т. е. $f_n = 0$. Аналогично устанавливается, что $f_0 = f_1 = \cdots = f_{n-1} = 0$ и, значит, $f = 0$.

**Список литературы:** 1. *Дубовой В. К.* Индефинитная метрика в интерполяционной проблеме Шура для аналитических функций. — Теория функций, функцион. анализ и их приложения, 1982, вып. 37, с. 14—26; 1982, вып. 38, с. 32—40; 1984, вып. 41, с. 41—45. 2. *Дубовой В. К.* Параметризация элементарного кратного множителя неполного ранга. — Анализ в бесконечномерных пространствах и теория операторов.— К.: Наук. думка, 1983, с.
3. *Нудельман А. А.* Об одной новой проблеме типа проблемы моментов. — Докл. АН СССР, 1977, 233, № 5, с. 792—795. 4. *Федчина И. П.* Описание решений касательной проблемы Неванлинны — Пика. — Докл. АрмССР, 1975,

60, № 1, с. 37—42. 5. *Галстян Л. А.* Аналитические *j*-растягивающие матрицы-функции и проблема Фейера.— Докл. АрмССР, 1976, **63**, № 1, с. 22—26. 6. *Ефимов А. В.*, *Потапов В. П.* *j*-растягивающие матрицы-функции и их роль в теории электрических цепей. — Усп. мат. наук, 1973, **28**, вып. 1 с. 65—130.

*Поступила в редколлегию 20.10.82.*