УДК 517. 946

И. Ю. ЧУДИНОВИЧ

ОСРЕДНЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОБЛАСТЯХ С ПУСТОТАМИ

1. Общая теорема об осреднении

В работе предложен способ осреднения самосопряженных краевых задач для эллиптических систем уравнений произвольного порядка в областях с большим числом мелких пустот. Такие системы, в частности, описывают густоперфорированные среды и протекающие в них физические процессы в рамках линейной теории упругости, линейной теории оболочек. Методам осреднения краевых задач в областях с мелкозернистой границей посвящено большое число работ. Отошлем читателя к [1—2] и имеющейся там библиографии. Отметим, наконец, что с изучаемой задачей тесно связаны вопросы осреднения уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами [3—5].

1. Постановка задачи. Введем используемые обозначения. Пусть $n=(n_1, \ldots, n_m)$ — фиксированный m — компонентный мультииндекс с целочисленными $n_k \geqslant 1$ $(k=1, \ldots, m)$. Положим для любой области $G \subset R^d$ $(d \geqslant 2)$ $H^n(G)=H^{n_1}(G) \times \cdots \times H^{n_m}(G)$, $\overset{0}{H}{}^n(G)=\overset{0}{H}{}^{n_1}(G) \times \cdots \times \overset{0}{H}{}^{n_m}(G)$, где $H^{n_k}(G)$ и $\overset{0}{H}{}^{n_k}(G)$ $(k=1, \ldots, m)$ — пространства Соболева. Элементами этих пространств являются вектор-функции $u(x)=(u^{(1)}(x), \ldots, u^{(m)}(x))$, скалярное произведение векторов u и v определяется соотношениями

$$(u, v)_{H^n(G)}=\sum_{k=1}^{m}(u^{(k)}, v^{(k)})_{H^{n_k}(G)},$$

$$(u^{(k)}, v^{(k)})_{H^{n_k}(G)}=\sum_{l=0}^{n_k}(u^{(k)}, v^{(k)})_{l,G},$$

$$(u^{(k)}, v^{(k)})_{l,G}=\sum_{|\gamma|=l}\int_G D^\gamma u^{(k)} D^\gamma v^{(k)} dx.$$

В последней формуле γ — d — компонентный мультииндекс, dx — элемент объема в R^d.

Пусть Ω — фиксированная область в R^d, ограниченная гладкой замкнутой поверхностью $\partial\Omega$. В Ω задана билинейная форма на векторах $u, v \in H^n(\Omega)$:

$$L_\Omega(u, v) = \int_\Omega W(u, v)\, dx,$$

$$W(u(x), v(x)) = \sum_{p,q=1}^{m} \sum_{\substack{|\alpha_p|=n_p, \\ |\beta_q|=n_q}} a_{\alpha_p\beta_q}(x)\,(D^{\alpha_p}u^{(p)})(x)\cdot(D^{\beta_q}v^{(q)})(x).$$

Здесь α_p и β_q $(p, q = 1, \ldots, m)$ — d-компонентные мультииндексы, вещественные коэффициенты $a_{\alpha_p\beta_q}(x) = a_{\beta_q\alpha_p}(x) \in C(\overline{\Omega})$ $(p, q = 1, \ldots, m;\ |\alpha_p| = n_p,\ |\beta_q| = n_q)$ таковы, что для некоторой константы $\chi > 0$

$$W(u(x), u(x)) \geqslant \chi \sum_{p=1}^{m} \sum_{|\gamma_p|=n_p} |(D^{\gamma_p}u^{(p)}(x)|^2 \tag{1}$$

$\forall u(x)$ с компонентами $u^{(p)}(x) \in C^{n_p}(\Omega)$ $(p = 1, \ldots, m)$. Из (1) следует неравенство

$$L_\Omega(u, u) \geqslant \chi \sum_{k=1}^{m} \| u^{(k)} \|^2_{n_k\Omega} = \chi \| u \|^2_{n,\Omega}.$$

Вообще, положим $\forall G \subset \Omega$ $L_G(u, v) = \int_G W(u, v)\, dx$, $\| u \|^2_{l,G} = \sum_{k=1}^{m} \| u^{(k)} \|^2_{l_k,G}$, $\forall\, l = (l_1, \ldots, l_m)$.

Назовем «задачей равновесия» задачу об отыскании решения $u(x) \in \overset{0}{H}{}^n(\Omega)$ уравнения

$$L_\Omega(u, v) = (f, v)_{0,\Omega}, \quad \forall v \in \overset{0}{H}{}^n(\Omega), \tag{2}$$

где $f = (f_1, \ldots, f_m)$ — заданная «нагрузка» с компонентами $f_k(x) \in C(\overline{\Omega})$ $(k = 1, \ldots, m)$, 0 — нулевой мультииндекс. Как известно, задача (2) эквивалентна задаче о минимизации энергетического функционала $L_\Omega(u, u) - 2(u, f)_{0,\Omega}$ в пространстве $\overset{0}{H}{}^n(\Omega)$.

Рассмотрим теперь области Ω_s, полученные из Ω удалением большого числа s «мелких» непересекающихся замкнутых множеств F_{is} $(i = 1, \ldots, s)$. Таким образом, $\Omega_s = \Omega / F_s$, $F_s = \bigcup_{i=1}^{s} F_{is}$. Будем считать все F_{is} $(i = 1, \ldots, s)$ полученными гомотетическим сжатием в $s^{1/d}$ раз фиксированного множества F, так что их диаметры $d_s \to 0$ при $s \to \infty$, но суммарная мера остается постоянной. Для определенности положим F шаром единичного радиуса, это предположение не является существенным ограничением общности.

Станем решать задачу равновесия в областях Ω_s при неизменной нагрузке $f(x)$:

$$L_{\Omega_s}(u_s, v_s) = (f, v_s)_{0,\Omega_s}. \qquad (3)$$

Решение (3) u_s ищется в гильбертовом пространстве $\overset{0}{H}{}^n_s$ вектор-функций $u \in H^n(\Omega_s)$ таких, что $D^{\gamma_k}u^{(k)}|_{x\in\partial\Omega} = 0$ $(k = 1, \ldots, m;\ |\gamma_k| \leqslant \leqslant n_k - 1)$, v_s — произвольный элемент $\overset{0}{H}{}^n_s$.

Нас интересует асимптотика решений $u_s(x)$ уравнений (3) при $s \to \infty$. Как будет показано, при некоторых сформулированных ниже предположениях $u_s(x)$ сходятся при $s \to \infty$ к решению осредненного уравнения равновесия во всей области Ω.

Если речь идет о различного рода механических задачах, то F_{is} $(i = 1, \ldots, s)$ естественно интерпретировать как пустоты в упругой системе. При этом перемещения $u_s(x)$ точек системы от нагрузки $f(x)$ удовлетворяют условиям жесткого закрепления на $\partial\Omega$ и свободного на ∂F_s.

Сделаем важное предположение о характере распределения пустот. Обозначим через r_{is} расстояние от F_{is} до $\partial\Omega \bigcup\limits_{j\neq i} F_{js}$. Считаем

$$r_{is} > c_0 d_s \ (i = 1, \ldots, s), \qquad (4)$$

где c_0 — не зависящая от s константа. Условия (4) назовем условиями регулярности распределения пустот.

2. Компактность решений уравнений равновесия в областях с пустотами. Продолжим решения $u_s(x)$ уравнений (3), определенные в Ω_s, до вектор-функций $\tilde{u}_s(x) \in \overset{0}{H}{}^n(\Omega)$.

Теорема 1. *Существуют операторы продолжения* $Q_s: \overset{0}{H}{}^n_s \to \overset{0}{H}{}^n(\Omega)$ $(s = 1, 2, \ldots)$, *нормы которых равномерно ограничены.*

Доказательство. Условимся все константы, не зависящие от s, обозначать через c. Пусть x_i — центр шара F_{is} $(i = 1, \ldots, s)$. Рассмотрим шар Π_{is} радиуса $(1 + c_0)\, s^{-1/d}$ с центром в x_i, c_0 определяется (4). Очевидно, при $i \neq j$ шары Π_{is} и Π_{js} не пересекаются. Обозначим через P_{is} шаровой слой Π_{is}/F_{is}. Гомотетическим растяжением $\xi = (x - x_i)\, s^{1/d}$ преобразуем F_{is} в стандартный шар F единичного радиуса с центром в начале координат, при этом Π_{is} перейдет в шар радиуса $1 + c_0$, P_{is} — в шаровой слой $P = \Pi/F$.

Рассмотрим произвольную вектор-функцию $u(x) \in H^n(P_{is})$ и положим $u(\xi) = u(x)$ $(\xi \in P)$. Построим $v(\xi) = (v^{(1)}(\xi), \ldots, v^{(m)}(\xi))$, где

$$v^{(k)}(\xi) = u^{(k)}(\xi) - \sum_{|\alpha_k| \leqslant n_k - 1} q_{k\alpha_k}\xi^{\alpha_k} \ (k = 1, \ldots, m), \qquad (5)$$

постоянные коэффициенты $q_{k\alpha_k}$ $(k = 1, \ldots, m;\ |\alpha_k| \leqslant n_k - 1)$ выбираются из условий $\int\limits_P D^{\beta_k}v^{(k)}(\xi)\, d\xi = 0$ при $k = 1, \ldots, m;\ |\beta_k| \leqslant$

$\leqslant n_k - 1$. Заметим, что в силу неравенства Пуанкаре $\| v \|^2_{n,P} \geqslant \geqslant c \| v \|^2_{0,P}$ $(c > 0)$. Хорошо известно, что вектор-функцию $v(\xi)$ можно продолжить на Π, причем продолженная вектор-функция $\tilde{v}(\xi) \in H^n(\Pi)$ и $\| \tilde{v} \|^2_{Hn(\Pi)} \leqslant c \| x \|^2_{Hn(P)} \leqslant c \| v \|^2_{n,P}$ с независящей от v константой $c > 0$ [6]. Формула (5) позволяет автоматически продолжить $u(\xi)$ на Π:

$$\tilde{u}^{(k)}(\xi) = \tilde{v}^{(k)}(\xi) + \sum_{|\alpha_k| \leqslant n_k - 1} q_{k\alpha_k} \xi^{\alpha_k},$$

при этом $\| \tilde{u} \|^2_{n,\Pi} \leqslant c \| u \|^2_{n,P}$.

Вернемся к исходным переменным, положив $\tilde{u}(x) = \tilde{u}(\xi)$ $(x \in \in \Pi_{is})$. Заметим, что $\| \tilde{u} \|^2_{n,\Pi_{is}} \leqslant c \| u \|^2_{n,P_{is}}$.

Пусть $u(x)$ — произвольная вектор-функция из $\overset{0}{H}{}^n_s$. Продолжив ее на все F_{is} $(i = 1, \ldots, s)$ описанным выше способом, получим вектор-функцию $\tilde{u}(x) = (Q_s u)(x) \in \overset{0}{H}{}^n(\Omega)$, причем $\| Q_s u \|^2_{n,\Omega} \leqslant \leqslant c \sum_{i=1}^{s} \| u \|^2_{n,P_{is}} + \| u \|^2_{n,\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^{s} \Pi_{is} \leqslant c \| u \|^2_{n,\Omega_s}$. Учитывая, что в силу неравенства Фридрихса $\| Q_s u \|^2_{n,\Omega} \geqslant c \| Q_s u \|^2_{l,\Omega}$ $(c > 0)$, $\forall\, l = (l_1, \ldots, \ldots, l_m)$, $l_i \leqslant n_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, получаем $\| Q_s u \|^2_{Hn(\Omega)} \leqslant c \| u \|^2_{n,\Omega_s} \leqslant c \| u \|^2_{\overset{0}{H}{}^n_s}$. Теорема доказана, поскольку c не зависит от s, u.

Следствие. Пусть $u_s(x)$ — решения задач (3) (s $= 1, 2, \ldots$). Последовательность $\{\tilde{u}_s = Q_s u_s\}$ (s $= 1, 2, \ldots$) слабо компактна в $\overset{0}{H}{}^n(\Omega)$.

Доказательство немедленно следует из цепочки неравенств

$$\| \tilde{u}_s \|^2_{Hn(\Omega)} \leqslant c \| u_s \|^2_{n,\Omega_s} \leqslant c L_{\Omega_s}(u_s, u_s) = c(f, u_s)_{0,\Omega_s} \leqslant$$
$$\leqslant c \| u_s \|_{\overset{0}{H}{}^n_s} \leqslant c \| \tilde{u}_s \|_{Hn(\Omega)}.$$

Выделим из $\{\tilde{u}_s\}$ (s $= 1, 2, \ldots$) слабо сходящуюся в $\overset{0}{H}{}^n(\Omega)$ к вектор-функции $u(x)$ подпоследовательность, сохранив для нее прежнее обозначение $\{\tilde{u}_s\}$ (s$=1, 2, \ldots$). В силу теоремы Реллиха можно считать, что $\tilde{u}_s(x)$ сильно сходится к $u(x)$ при $s \to \infty$ в пространстве $\overset{0}{H}{}^{n-1}(\Omega)$, где $n - 1 = (n_1 - 1, \ldots, n_m - 1)$. Нашей основной задачей является разыскание осредненного уравнения равновесия во всей области Ω, решением которого является предельная вектор-функция $u(x) \in \overset{0}{H}{}^n(\Omega)$.

3. Характеристический функционал и основная теорема. Введем основную характеристику распределений пустот, позволяющую найти осредненное уравнение равновесия. Для этого выберем произвольную точку $x_0 \in \Omega$ и рассмотрим куб K_{0h} с центром в x_0

и ребрами длины h, ориентированными вдоль координатных осей. Введем при каждых $p = 1, \ldots, m$; $|\gamma_p| = n_p$ m — компонентные векторы $P_{0p\gamma_p}(x)$ вида $P_{0p\gamma_p}(x) = \left(0, \ldots, \frac{1}{\gamma_p!}(x - x_0)^{\gamma_p}, \ldots, 0\right)$ с единственной отличной от нуля p-й компонентой. Затем составим их линейную комбинацию

$$(R, P_0(x)) = \sum_{p=1}^{m} \sum_{|\gamma_p| = n_p} R_{p\gamma_p} P_{0p\gamma_p}(x)$$

с произвольными вещественными коэффициентами $R_{p\gamma_p}$ ($p = 1, \ldots, m$; $|\gamma_p| n_p$). Станем обозначать компоненты вектора $(R, P_0(x))$ через $(R, P_0^{(k)}(x))$ $(k = 1, \ldots, m)$. Введем, наконец, характеристический функционал

$$T_{R,sh0}(u_s) = L_{K_{sh0}}(u_s, u_s) + \sum_{t=1}^{m} \sum_{k=0}^{n_t - 1} h^{2(k - n_t) - \theta} \| u_s^{(t)} - \\ -(R, P_0^{(t)}(x)) \|^2_{kK_{sh0}},$$

определенный на вектор-функциях $u_s \in H^n(K_{sh0})$, $K_{sh0} = K_{0h} \cap \Omega_s$, $\theta > 0$. Обозначим через $T_{\alpha_q sh0}(u_s)$ характеристический функционал, отвечающий набору $R_{p\gamma_p} = \delta_{pq} \cdot \delta_{\gamma_p \alpha_q}$ ($p, q = 1, \ldots, m$; $|\gamma_p| = n_p$, $|\alpha_q| = n_q$), где δ — символ Кронеккера.

Пусть $g_{sh0\alpha_q}(x)$ — вектор-функция класса $H^n(K_{sh0})$, минимизирующая $T_{\alpha_q sh0}(u_s)$, положим $T_{\alpha_q sh0}(g_{sh0\alpha_q}) = T^*_{\alpha_q sh0}$. Введем при $p, q = 1, \ldots, m$; $|\alpha_p| = n_p$, $|\beta_q| = n_q$

$$a_{\alpha_p\beta_q}(s, h; x_0) = L_{K_{sh0}}(g_{sh0\alpha_p}, g_{sh0\beta_q}) + \\ + \sum_{t=1}^{m} \sum_{k=0}^{n_t - 1} h^{2(k - n_t) - \theta} (g^{(t)}_{sh0\alpha_p} - P^{(t)}_{0p\alpha_p}, g^{(t)}_{sh0\beta_q} - P^{(t)}_{0q\beta_q})_{k, K_{sh0}}.$$

Сделаем предположения относительно функций $a_{\alpha_p\beta_q}(s, h; x)$ ($p, q = 1, \ldots, m$; $|\alpha_p| = n_p$, $|\beta_q| = n_q$): существуют равномерные по x пределы

$$\lim_{h \to 0} \lim_{s \to \infty} h^{-d} \cdot \operatorname{mes} K_{sh0} = b(x) \in C(\overline{\Omega}),$$

$$\lim_{h \to 0} \overline{\lim_{s \to \infty}} h^{-d} \cdot a_{\alpha_p\beta_q}(s, h; x) = \\ = \lim_{h \to 0} \underline{\lim_{s \to \infty}} h^{-d} a_{\alpha_p\beta_q}(s, h; x) = \tilde{a}_{\alpha_p\beta_q}(x) \in C(\overline{\Omega}) \tag{6}$$

(условие равномерности предельных переходов по x можно, впрочем, ослабить).

Введем «осредненную форму»

$$\tilde{L}_\Omega(u, v) = \int_\Omega \tilde{W}(u(x), v(x))\,dx,$$

$$\tilde{W}(u(x), v(x)) = \sum_{p,q=1}^{m} \sum_{\substack{|\alpha_p|=n_p,\\ |\beta_q|=n_q}} \tilde{a}_{\alpha_p\beta_q}(x)\,(D^{\alpha_p}u^{(p)})(x)\cdot(D^{\beta_q}v^{(q)})(x)$$

на вектор-функциях $u(x)$, $v(x) \in H^n(\Omega)$. Можно проверить, что при сделанных предположениях (4), (6) справедливы утверждения:

1) $b(x) > 0$, $x \in \Omega$;

2) существует константа $\bar{\varkappa} > 0$ такая, что при $x \in \Omega$ $\forall u(x)$ с компонентами $u^{(k)}(x) \in C^{n_k}(\Omega)$ $(k = 1, \ldots, m)$ справедливо неравенство

$$\tilde{W}(u(x), u(x)) \geqslant \tilde{\varkappa} \sum_{k=1}^{m} \sum_{|\gamma_k|=n_k} |(D^{\gamma_k}u^{(k)})(x)|^2.$$

Основным результатом является

Теорема 2. *При сделанных выше предположениях (4), (6) решения уравнений равновесия $u_s(x)$ сходятся при $s \to \infty$ к решению осредненного уравнения*

$$\tilde{L}_\Omega(u, v) = \sum_{k=1}^{m} (f_k, v^{(k)})_{L^2_b(\Omega)} \forall v \in \mathring{H}^n(\Omega)$$

в следующем смысле $\lim\limits_{s\to\infty} \| u_s - u \| \mathring{H}_s^{n-1} = 0$, *где* $n - 1 = (n_1 - 1, \ldots, n_m - 1)$.

Доказательство теоремы, ввиду его чрезвычайной громоздкости, здесь не приводится. Заметим лишь, что в его основе лежит метод, использованный в [2] при доказательстве аналогичного утверждения для случая оператора второго порядка.

Следующая часть работы будет посвящена рассмотрению случая периодического распределения пустот. Будут найдены ячеечные задачи, через решения которых выражаются коэффициенты осредненного оператора.

Список литературы: 1. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Краевые задач в областях с мелкозернистой границей.— К.: Наукова думка, 1974. —285 с 2. *Хруслов Е. Я.* Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении области.—Мат. сб., 1978, **106**, вып. 4, с. 604—621. 3. *Бахвалов Н. С.* Осредненные характеристики тел с периодической структурой. — ДАН СССР, 1974, **218**, № 5, с. 1046—1048. 4. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., Ха Тьен Нгоан.* Усреднение и *G*-сходимость дифференциальных операторов.— Усп. мат. наук, 1979, 34, вып. 5, с. 65—133. 5. *Bensoussan A., Lions I. L., Papanicolaou G.* Asymptotic Analysiz for Periodic Structures. Amsterdam. Horth—Holland, 1978. — 403 р. 6. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными.—М.: Мир, 1977. —504 с.

Поступила в редколлегию 16.12.82