УДК 517.958

А. Г. ЧЕРНЯВСКИЙ

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ

Обратную задачу теории дифракции естественно охарактеризовать как задачу определения поверхности рассеивающего тела по данным о рассеянии на этом теле известных полей. В работах [1—3] эта задача решалась, исходя из представлений для рассеянных полей, полученных в приближении физической оптики. Первое исследование единственности решения обратной задачи дифракции, в котором не использовалось высокочастотное приближение, было проведено в работе [4].

Как и в работе [4], будем рассматривать скалярную задачу с краевым условием Дирихле. Пусть G — фиксированная ограниченная область в R^3 (во всех формулируемых ниже утверждениях размерность пространства не существенна), и $D \subset\subset G$ есть некоторая ее односвязная подобласть с кусочно-гладкой границей S. Пусть в области G задана функция $v(x)$, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta v(x) + k^2 v(x) = 0, \quad x \in G, \tag{1}$$

которая имеет смысл внешнего поля в отсутствие рассеивателя D. Рассеянное поле $u(x)$ во внешности области D удовлетворяет краевой задаче

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0, \quad x \in R^3 \setminus D; \quad u(x) = -v(x), \quad x \in S \tag{2}$$

и условиям излучения. Как известно, справедливо представление

$$u(x) = e^{ik|x|} A(\tau)/|x| + o(|x|^{-1}), \quad |x| \to \infty, \tag{3}$$

в котором $|x|$ — длина вектора x, $\tau = x/|x|$, $|\tau| = 1$.

В работе [4] было показано, что, если для фиксированных функций $v(x)$ и $A(\tau)$ существует область D, во внешности которой решение $u(x)$ задачи (2) допускает представление (3), то такая область определяется, вообще говоря, неоднозначно, и в G может существовать конечное число таких областей. Для однозначного восстановления области D в [4] была предложена методика, основанная на измерении диаграммы рассеяния $A(\tau)$ для различных частот k. В [4] было показано, что для любого частотного интервала $I = [k_1, k_2]$ существует такая зависящая только от G и I константа M, что по любому набору внешних полей $\{v_i\}_1^M$ и соответствующих диаграмм $\{A_i\}_1^M$, измеренных на любых M различных частотах k_i из интервала I, область D определяется однозначно.

В настоящей заметке рассматривается вопрос о единственности восстановления области D по результатам измерений при фиксированном k, что часто требуется в прикладных задачах. Отметим, что в заметке использована найденная в [4] связь единственности определения D с свойствами спектра внутренних краевых задач для оператора Лапласа.

Теорема. Существует зависящая только от фиксированного k и области G константа m, обладающая следующим свойством. Для любых m линейно независимых функций $v_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, удовлетворяющих уравнению (1), и функций $A_i(\tau)$, $i = 1, \dots, m$, $|\tau| = 1$, существует не более одной области D, во внешности которой решение $u = u_i$ краевой задачи (2) с $v = v_i$ допускает асимптотическое представление (3) с диаграммой $A = A_i$, $i=1,\dots,m$.

Доказательство. Для произвольной подобласти $G' \subset G$ с кусочно-гладкой границей обозначим через $\nu(k, G')$ кратность точки спектра $\lambda = -k^2$ оператора Лапласа в области G' с нулевым условием на $\partial G'$ (возможно, $\nu(k, G') = 0$). Из минимаксного принципа для собственных чисел оператора Лапласа следует (см.[5]), что

$$\mu(k, G) = \sup_{G' \subset G} \nu(k, G') < \infty. \tag{4}$$

В качестве требуемой константы возьмем

$$m = m(k, G) = \mu(k, G) + 1 \tag{5}$$

и покажем, что определенного таким образом числа наборов исходных данных $\{v_i\}_1^m$, $\{A_i\}_1^m$ достаточно для однозначного восстановления области D.

Действительно, предположим, что кроме области D имеется другая область D_1 с кусочно-гладкой границей S_1 и решения $\tilde{u}_i$ краевых задач

$$\Delta\tilde{u}_i(x) + k^2 u_i(x) = 0,\ x \in R^3 \setminus D;\ \tilde{u}_i(x) = -v_i(x),\ x \in S_1,\ i=1,\dots,m,$$

удовлетворяющие условиям излучения, допускают представления (3) с $A = A_i$, $i = 1, \dots, m$. Не ограничивая общности, предположим, что $D^* = D_1 \setminus D \neq \varnothing$. Множество D^* есть объединение непересекающихся областей D_l^*. Выберем одну такую область. Повторяя рассуждение работы [4], получим, что в области D_l^* функции $w_i(x) = u_i(x) + v_i(x)$ удовлетворяют соотношениям $\Delta w_i(x) + k^2 w_i(x) = 0$, $x \in G \setminus D$; $w_i(x) = 0$, $x \in \partial D_l^*$, $i = 1, \dots, m$. Таким образом, $w_i(x)$ являются собственными функциями оператора Лапласа в области D_l^* с нулевым условием на ее границе, отвечаю-