УДК 517.958

А. Г. ЧЕРНЯВСКИЙ

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ

Обратную задачу теории дифракции естественно охарактеризовать как задачу определения поверхности рассеивающего тела по данным о рассеянии на этом теле известных полей. В работах [1—3] эта задача решалась, исходя из представлений для рассеянных полей, полученных в приближении физической оптики. Первое исследование единственности решения обратной задачи дифракции, в котором не использовалось высокочастотное приближение, было проведено в работе [4].

Как и в работе [4], будем рассматривать скалярную задачу с краевым условием Дирихле. Пусть G — фиксированная ограниченная область в R^3 (во всех формулируемых ниже утверждениях размерность пространства не существенна), и $D \subset\subset G$ есть некоторая ее односвязная подобласть с кусочно-гладкой границей S. Пусть в области G задана функция $v(x)$, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta v(x) + k^2 v(x) = 0, \quad x \in G, \tag{1}$$

которая имеет смысл внешнего поля в отсутствие рассеивателя D. Рассеянное поле $u(x)$ во внешности области D удовлетворяет краевой задаче

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0, \quad x \in R^3 \setminus D; \quad u(x) = -v(x), \quad x \in S \tag{2}$$

и условиям излучения. Как известно, справедливо представление

$$u(x) = e^{ik|x|} A(\tau)/|x| + o(|x|^{-1}), \quad |x| \to \infty, \tag{3}$$

в котором $|x|$ — длина вектора x, $\tau = x/|x|$, $|\tau| = 1$.

В работе [4] было показано, что, если для фиксированных функций $v(x)$ и $A(\tau)$ существует область D, во внешности которой решение $u(x)$ задачи (2) допускает представление (3), то такая область определяется, вообще говоря, неоднозначно, и в G может существовать конечное число таких областей. Для однозначного восстановления области D в [4] была предложена методика, основанная на измерении диаграммы рассеяния $A(\tau)$ для различных частот k. В [4] было показано, что для любого частотного интервала $I = [k_1, k_2]$ существует такая зависящая только от G и I константа M, что по любому набору внешних полей $\{v_i\}_1^M$ и соответствующих диаграмм $\{A_i\}_1^M$, измеренных на любых M различных частотах k_i из интервала I, область D определяется однозначно.

В настоящей заметке рассматривается вопрос о единственности восстановления области D по результатам измерений при фиксированном k, что часто требуется в прикладных задачах. Отметим, что в заметке использована найденная в [4] связь единственности определения D с свойствами спектра внутренних краевых задач для оператора Лапласа.

Теорема. Существует зависящая только от фиксированного k и области G константа m, обладающая следующим свойством. Для любых m линейно независимых функций $v_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, удовлетворяющих уравнению (I), и функций $A_i(\tau)$, $i = 1, \ldots, m$, $|\tau| = 1$, существует не более одной области D, во внешности которой решение $u = u_i$ краевой задачи (2) с $v = v_i$ допускает асимптотическое представление (3) с диаграммой $A = A_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Доказательство. Для произвольной подобласти $G' \subset G$ с кусочно-гладкой границей обозначим через $\nu(k, G')$ кратность точки спектра $\lambda = -k^2$ оператора Лапласа в области G' с нулевым условием на $\partial G'$ (возможно, $\nu(k, G') = 0$). Из минимаксного принципа для собственных чисел оператора Лапласа следует (см.[5]), что

$$\mu(k, G) = \sup_{G' \subset G} \nu(k, G') < \infty. \tag{4}$$

В качестве требуемой константы возьмем

$$m = m(k, G) = \mu(k, G) + 1 \tag{5}$$

и покажем, что определенного таким образом числа наборов исходных данных $\{v_i\}_1^m$, $\{A_i\}_1^m$ достаточно для однозначного восстановления области D.

Действительно, предположим, что кроме области D имеется другая область D_1 с кусочно-гладкой границей S_1 и решения $\tilde{u}_i$ краевых задач

$\Delta\tilde{u}_i(x) + k^2 u_i(x) = 0$, $x \in R^3 \setminus D$; $\tilde{u}_i(x) = -v_i(x)$, $x \in S_1$, $i = 1, \ldots, m$, удовлетворяющие условиям излучения, допускают представления (3) с $A = A_i$, $i = 1, \ldots, m$. Не ограничивая общности, предположим, что $D^* = D_1 \setminus D \neq \varnothing$. Множество D^* есть объединение непересекающихся областей D_l^*. Выберем одну такую область. Повторяя рассуждение работы [4], получим, что в области D_l^* функции $w_i(x) = u_i(x) + v_i(x)$ удовлетворяют соотношениям $\Delta w_i(x) + k^2 w_i(x) = 0$, $x \in G \setminus D$; $w_i(x) = 0$, $x \in \partial D_l^*$, $i = 1, \ldots, m$. Таким образом, $w_i(x)$ являются собственными функциями оператора Лапласа в области D_l^* с нулевым условием на ее границе, отвечающими собственному значению $\lambda = -k^2$. Такие собственные функции образуют конечномерное пространство [5]. Пусть $\{f_i(x)\}_1^r$ — базис этого пространства. Тогда справедливы представления

$$u_i(x) = -v_i(x) + \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} f_j(x),\ x \in D_i^*,\ i = 1,\ \ldots,\ m. \tag{6}$$

Из формул (4), (5) следует, что $r < m$, поэтому ранг матрицы α_{ij} меньше m, и существуют такие числа $\{\gamma_i\}_1^m$, что

$$\sum_{i=1}^{m} \gamma_i \alpha_{ij} = 0,\ j = 1, \ldots, r. \tag{7}$$

Из соотношений (6), (7), пользуясь аналитичностью функций v_i, u_i в области $G \setminus D$ [6], получим

$$\sum_{i=1}^{m} \gamma_i u_i(x) = -\sum_{i=1}^{m} \gamma_i v_i(x),\ x \in G \setminus D. \tag{8}$$

Рассмотрим функцию

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i u_i(x).$$

Эта функция в области $R^3 \setminus D$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца и условию излучения. Из равенства (8), учитывая уравнение (1) для функций v_i, получим, что функция $F(x)$ продолжается до функции, удовлетворяющей в R^3 уравнению $\Delta F + k^2 F = 0$ и условию излучения на бесконечности. Поэтому $F \equiv 0$ [6], и из равенств (8) получим, что функции $v_i(x)$ линейно зависимы, что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

В задачах дифракции в качестве функций $v_i(x)$ обычно рассматривают плоские волны:

$$v_i(x) = \exp(ik\langle \sigma_i, x\rangle),\ |\sigma_i| = 1$$

с различными направлениями σ_i волнового вектора, или сферические волны:

$$v_i(x) = \exp(ik|x - x_i|)/|x - x_i|$$

при различных положениях x_i точечного источника, $x_i \overline{\in} G$.

Список литературы: 1. *Рамм А. Г.* Определение формы отражающего тела по характеристике рассеяния. — Изв. вузов. Радиофизика, 1970, **13**, № 5, с. 727—731. 2. *Аниконов Ю. Е.*, *Марчук А. Г.* К обратной задаче дифракции.— В кн.: Математические проблемы геофизики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1975, вып. 6, ч. 2, с. 54—62. 3. *Левис Р.* Приближение физической оптики в обратных задачах дифракции. — Зарубежная радиоэлектроника, 1970, № 2, с. 100—112. 4. *Свешников А. Г.*, *Еремин Ю. А.*, *Чивилев А. В.* Иследование единственности решения одной обратной задачи теории дифракции. — Диф. уравнения, 1979, **15**, № 12, с. 2205 — 2209. 5. *Курант Р.*, *Гильберт Д.* Методы математической физики. — М.; Л.: Гостехиздат, 1951, **1**. — 476 с. 6. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964. — 830 с.

Поступила в редколлегию 01.12.82.