УДК 517.5

А. П. АРТЕМЕНКО

ЭРМИТОВО-ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И ПОЗИТИВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ. II

III. Проблема Каратеодори *

1. Одним из простейших следствий теорем 4 и 5 является следующее известное предложение.

Для того чтобы существовала неубывающая функция $\sigma(t)$, удовлетворяющая системе уравнений

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\nu t} d\sigma(t) = c_\nu \; (\nu = 0, \; \pm 1, \; \ldots \; \pm p), \tag{31}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$D_\nu \geqslant 0, \; \nu = 1, \; 2, \; \ldots \; p, \tag{32}$$

где

$$D_\nu = \begin{vmatrix} c_0, & c_1, & \ldots & c_\nu \\ c_{-1}, & c_0, & \ldots & c_{\nu-1} \\ c_{-\nu}, & & \ldots & c_0 \end{vmatrix} = | c_{j-i} |_{i, \, j=0}^{\nu}.$$

Задачей этого раздела является изучение некоторых свойств семейства Σ всех решений $\sigma(t)$ системы уравнений (31), причем мы ограничимся лишь тем случаем, когда ни в одном из условий (32) не имеет места знак равенства.

2. Пусть $\sigma(t)$ — одно из решений системы уравнений (31), тогда функция

$$F(z \mid \sigma) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\sigma(t) \tag{33}$$

регулярна внутри единичного круга и имеет там положительную вещественную часть, причем имеет место следующее очевидное разложение в степенной ряд:

$$F(z \mid \sigma) = \frac{c_0}{2} + c_{-1} z + c_{-2} z^2 + \cdots + c_{-p-1} z^{p+1} + \cdots \quad |z| < 1,$$

где коэффициенты c_{-p-1}, c_{-p-2}, ... вычисляются при помощи формулы (31).

---

* Нумерация разделов, теорем и формул продолжает нумерацию первой части работы.

Обратно, каждой функции $F(z)$, регулярной внутри единичного круга, имеющей там положительную вещественную часть и удовлетворяющей условиям

$$F(0)=\frac{c_0}{2},\ F^{(\nu)}(0)=\nu!\ c_{-\nu},\ \nu=1,\ 2,\ \ldots\ p, \tag{34}$$

отвечает одна и только одна неубывающая функция $\sigma(t)$, являющаяся решением системы (31).

Множество значений

$$\left\{c_{p+1}=\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(p+1)t}\,d\sigma(t)\right\}_{\sigma\in\Sigma}$$

очевидно совпадает с множеством $\{c_{p+1}\}$ решений неравенства $D_{p+1}\geqslant 0$, но последнее множество, как следует из (11) и (11′), является кругом радиуса D_p/D_{p-1} с центром в точке γ_{p+1}, где γ_{p+1} является решением уравнения

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_p & \gamma_{p+1} \\ c_0 & c_1 & c_{p-1} & c_p \\ & & \vdots & \\ c_{-p-1} & \ldots & c_0 & c_1 \end{vmatrix}=0. \tag{36}$$

Положим $c_{p+1}=\gamma_{p+1}+\dfrac{D_p}{D_{p-1}}\varkappa,\ |\varkappa|=1$ и присоединим к системе (31) уравнения

$$c_{p+1}=\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(p+1)t}\,d\sigma(t),\quad c_{-p-1}=\bar{c}_{p+1}=\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-i(p+1)t}\,d\sigma(t) \tag{31′}$$

а к системе (34) — уравнение $F^{(p+1)}(0)=(p+1)!\ c_{-p-1}$ (34′).

Как известно [1], система (31), (31′) имеет одно и только одно решение, которое получается следующим образом. Все корни $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{p+1}$ полинома (ортогонального полинома степени $p+1$)

$$Q_{p+1}(z\,|\,\varkappa)=\frac{D_{p-1}}{D_p}\begin{vmatrix} c_0, & c_1, & \ldots\ c_p, & c_{p+1} \\ c_{-p}, & c_{-p+1}, & \ldots & c_1 \\ & & \ldots & \\ 1, & z, & \ldots\ z^p, & z^{p+1} \end{vmatrix}$$

различны и лежат на единичной окружности $\alpha_j=e^{ia_j},\ -\pi<a_1<<a_2<\cdots a_{p+1}<\pi$. Решением системы (31), (31′) является кусочно-постоянная функция $\sigma_\varkappa(t)$, точки разрыва которой находятся в точках $\alpha_1,\ \ldots\ \alpha_{p+1}$, а скачки ρ_j, отвечающие этим точкам, определяются равенством

$$\rho_j=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{Q_{p+1}(e^{it}\,|\,\varkappa)}{(e^{it}-\alpha_j)\,Q'_{p+1}(\alpha_j\,|\,\varkappa)}\,d\sigma(t),\ \sigma\in\sum. \tag{37}$$

Заметим, что под знаком интеграла стоит полином степени p от e^{it}; интегрирование сводится к замене в нем каждой степени $e^{i\nu t}$ на c_ν.

Преобразуем теперь выражение для полинома $Q_{p+1}(z \mid \varkappa)$, пользуясь теоремой о минорах взаимного определителя и равенством (36). Получаем $Q_{p+1}(z \mid \varkappa) =$

$$= \frac{D_{p-1}}{D_p} \begin{vmatrix} c_0 & \ldots & c_p & \gamma_{p+1} \\ & \ldots & & \\ c_{-p} & \ldots & c_0 & c_1 \\ 1 & \ldots & z^p & z^{p+1} \end{vmatrix} + (-1)^{p+1} \begin{vmatrix} c_{-1} & \ldots & c_{p-1} \\ & & \\ c_{-p} & \ldots & c_0 \\ 1 & \ldots & z^p \end{vmatrix} =$$

$$= z \begin{vmatrix} c_0 & \ldots & c_p \\ c_{-p+1} & \ldots & c_1 \\ 1 & \ldots & z^p \end{vmatrix} - \varkappa \begin{vmatrix} c_0 & \ldots & c_{-p} \\ c_{p-1} & \ldots & c_{-1} \\ z^p & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, $Q_{p+1}(z \mid \varkappa) = T_p(z) - \varkappa U_p(z)$ (38), где

$$T_p(z) = z \begin{vmatrix} c_0, & \ldots & c_p \\ c_{-p+1}, & \ldots & c_1 \\ 1 & \ldots & z^p \end{vmatrix}, \quad U_p(z) = \begin{vmatrix} c_0, & \ldots & c_{-p} \\ c_{p-1}, & \ldots & c_{-1} \\ z^p & \ldots & 1 \end{vmatrix} \qquad (38')$$

Найдем теперь отвечающую выбранному c_{p+1} функцию $F_\varkappa(z) = F(z \mid \sigma_\varkappa)$:

$$F_\varkappa(z) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\sigma_\varkappa(t) = \frac{c_0}{2} - z \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\sigma_\varkappa(t)}{z-e^{it}} =$$

$$= \frac{c_0}{2} - \frac{z}{T_p(z) - \varkappa U_p(z)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{T_p(z) - T_p(e^{it}) - \varkappa\{U_p(z) - U_p(e^{it})\}}{z - e^{it}}\, d\sigma_\varkappa(t).$$

Получаем, что

$$F_\varkappa(z) = \frac{c_0}{2} - z\,\frac{R_p(z) - \varkappa S_p(z)}{T_p(z) - \varkappa U_p(z)}, \qquad (39)$$

где

$$R_p(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{T_p(z) - T_p(e^{it})}{z - e^{it}}\, d\sigma(t); \quad S_p(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{U_p(z) - U_p(e^{it})}{z - e^{it}}\, d\sigma(t). \qquad (39')$$

Итак, для каждого $\varkappa$, $|\varkappa| = 1$, существует одно и только одно решение $F_\varkappa(z)$ системы (34), (34′), причем оно дается формулой (39).

3. Перейдем теперь к решению системы (34), пользуясь методом И. Шура [2] (см. также [3]).

Пусть $F(z)$ — произвольная функция, регулярная внутри единичного круга, имеющая там положительную вещественную часть и удовлетворяющая уравнениям (34). Тогда функция $F_1(z)$, определяемая равенством

$$zF_1(z) = \frac{F(z) - \frac{c_0}{2}}{F(z) + \frac{c_0}{2}}, \tag{40}$$

регулярна внутри единичного круга, удовлетворяет, в силу леммы Шварца, неравенству $|F_1(z)| \leqslant 1$ ($40_1'$), а также уравнениям $F_1^{(\nu)}(0) = a_{1\nu}$, $\nu = 0, 1, \ldots p-1$ ($40_1''$), которые получаем, дифференцируя $\nu + 1$ раз равенство (40), полагая затем $z = 0$ и учитываем (34).

Обратно, каждая функция $F_1(z)$, удовлетворяющая всем перечисленным выше условиям, определяет при помощи равенства (40) некоторое решение системы (34).

Дальше находим при помощи равенства

$$\frac{F_1(z) - a_{10}}{1 - \bar{a}_{10}F_1(z)} = zF_2(z) \tag{40_2}$$

функцию $F_2(z)$ и т. д.

Повторяя этот процесс, придем, наконец, к равенству

$$\frac{F_p(z) - a_{p0}}{1 - \bar{a}_{p0}F_p(z)} = zF_{p+1}(z), \tag{40_{p+1}}$$

причем для каждого решения $F(z)$ системы (34) отвечающая ему функция $F_{p+1}(z)$ регулярна внутри единичного круга и удовлетворяет неравенству $|F_{p+1}(z)| \leqslant 1$ ($40_{p+1}'$).

Обратно, каждая регулярная внутри единичного круга, удовлетворяющая там неравенству (40_{p+1}), функция $F_{p+1}(z)$ определяет при помощи равенств (40_{p+1}), (40_p) ... (40_1) некоторое решение $F(z)$ системы (34).

Исключая из (40_1), ..., (40_{p+1}) промежуточные функции $F_1(z), \ldots F_p(z)$ получаем

$$F(z) = \frac{A(z) + B(z)F_{p+1}(z)}{C(z) + D(z)F_{p+1}(z)}, \tag{41}$$

где $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$, $D(z)$ — полиномы степени не выше $p+1$.

Полученное равенство устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством всех функций $F(z)$, регулярных внутри единичного круга, имеющих там положительную вещественную часть и удовлетворяющих системе уравнений (34), и множеством функций $F_{p+1}(z)$, регулярных в единичном круге и не превосходящих там по модулю единицы.

Присоединим к системе (34) уравнение (34′). Легко видеть, что все решения системы (34), (34′) по-прежнему описываются формулой (41), где $F_{p+1}(z)$ удовлетворяет кроме прежних еще одному условию

$$F_{p+1}(0) = a\bar{c}_{p+1} + b = a\bar{\varkappa} + a(\gamma_{p+1} + b), \tag{$40_{p+1}''$}$$

где a и b — некоторые функции от $c_0, c_{\pm 1}, \ldots c_{\pm p}$.

Так как для каждого значения $\varkappa$, модуль которого равен 1, система (34), (34′) имеет единственное решение, то из равенства $|\varkappa| = 1$ должно следовать равенство $|F_{p+1}(0)| = 1$. Отсюда $F_{p+1}(0) = \varkappa^{-1} E$, где E — некоторая функция от $c_0, c_{\pm 1}, \ldots c_{\pm p}$, $|\varkappa| = 1$. Сравнивая (39) и (41), получаем, что для всех x, $|x| = 1$ имеет место тождество

$$\frac{A(z) + B(z) E\varkappa^{-1}}{C(z) + D(z) E\varkappa^{-1}} = \frac{c_0}{2} - z \frac{R_p(z) - \varkappa S_p(z)}{T_p(z) - \varkappa U_p(z)},$$

откуда следует, что общее решение системы (34) может быть записано в виде

$$F(z) = \frac{c_0}{2} - z \frac{R_p(z) \varkappa(z) - S_p(z)}{T_p(z) \varkappa(z) - U_p(z)}, \tag{42}$$

где $\varkappa(z)$ — произвольная функция, регулярная внутри единичного круга и удовлетворяющая там неравенству $|x(z)| \leqslant 1$.

4. Формула (42) показывает, что для каждого z областью значений $F(z|\sigma)$, $\sigma \in \sum$ является некоторый круг. Определим радиус $\tilde{r}_p(z)$ этого круга. Чтобы упростить выкладки, предварительно преобразуем $F(z|\sigma)$ следующим образом:

$$F(z|\sigma) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\sigma(t) = \frac{c_0}{2} - z^{p+1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z^{-p} - e^{-ipt}}{z - e^{it}} d\sigma(t) -$$

$$- z^{p-1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\sigma(t)}{e^{ipt}(z - e^{it})}. \tag{43}$$

Обозначая $-z^{p+1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\sigma(t)}{e^{ipt}(z - e^{it})}$ через $G(z|\sigma)$, получаем из (43)

что разность $F(z|\sigma) - G(z|\sigma)$ не зависит от выбора $\sigma \in \sum$, поэтому областью значений $G(z|\sigma)$ ьвляется, как и для $F(z|\sigma)$, круг радиуса $\tilde{r}_p(z)$. Легко видеть, что значения $G(z|\sigma)$ попадают на границу при $c_{p+1} = \gamma_{p+1} + \frac{D_p}{D_{p-1}} \varkappa$, $|\varkappa| = 1$, кроме того при этих значениях c_{p+1} функция $G(z|\sigma_\varkappa)$ является рациональной функ ией с знаменателем $T_p(z) - \varkappa U_p(z)$. Найдем функцию $G(z|\sigma_\varkappa)$. Имеем

$$G(z|\sigma_\varkappa) = -z^{p+1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{e^{ipt}(z - e^{it})} d\sigma_\varkappa(t) =$$

$$= \frac{-z^{p+1}}{T_p(z) - \varkappa U_p(z)} \int_{-\pi} \frac{\{T_p(z) - T_p(e^{it})\} - \varkappa \{U_p(z) - U_p(e^{it})\}}{e^{ipt}(z - e^{it})} \times$$

$$\times d\sigma(t) = -z^{p+1} \frac{\tilde{R}_p(z) - \varkappa \tilde{S}_p(z)}{T_p(z) - \varkappa U_p(z)}, \tag{43'}$$

где

$$\tilde{R}_p(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{T_p(z) - T_p(e^{it})}{e^{ipt}(z - e^{it})} d\sigma(t), \quad \tilde{S}_p(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{U_p(z) - U_p(e^{it})}{e^{ipt}(z - e^{it})} d\sigma(t). \qquad (43'')$$

В дальнейшем нам понадобятся значения $T_p(0)$, $U_p(0)$ и $\tilde{R}_p(0)$. Запишем их

$$R_p(0) = \int_{-\pi}^{\pi} \begin{vmatrix} c_0, & \dots & c_p \\ c_{-p+1} & \dots & c_1 \\ e^{-ipt} & \dots & 1 \end{vmatrix} d\sigma(t) = D_p, \quad T_p(0) = 0, \quad U_p(0) = D_{p-1}. \qquad (43''')$$

Из (43') и (43'') следует

$$\frac{\tilde{R}_p(z) - \varkappa \tilde{S}_p(z)}{T_p(z) - \varkappa U_p(z)} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\sigma_\varkappa(t)}{e^{ipt}(z - e^{it})} = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_{\nu=0}^{2p} \frac{e^{i\nu t}}{e^{ipt} z^{\nu-1}} + \frac{e^{i(p+1)t}}{z^{2p+1}(z - e^{it})} \right\} \times$$

$$\times\, d\sigma_\varkappa(t) = \frac{c_{-p}}{2} + \frac{c_{-p+1}}{z} + \dots \frac{c_p}{z^{2p+1}} + \frac{1}{z^{2p+1}} \frac{A(z \mid x)}{Q_{p+1}(z \mid \varkappa)},$$

где $A(z \mid \varkappa)$ — полином степени не выше p. Отсюда получаем для двух различных значений $\varkappa'$ и $\varkappa''$ ($|\varkappa'| = |\varkappa''| = 1$):

$$\frac{\tilde{R}_p(z) - \varkappa^{-1}\tilde{S}_p(z)}{T_p(z) - \varkappa^{-1}U_p(z)} - \frac{\tilde{R}_p(z) - \varkappa''\tilde{S}_p(z)}{T_p(z) - \varkappa''U_p(z)} =$$

$$= z^{-2p-1} \left\{ \frac{A(z \mid \varkappa')}{T_p(z) - \varkappa' U_p(z)} - \frac{A(z \mid \varkappa'')}{T_p(z) - \varkappa'' U_p(z)} \right\}$$

или

$$\begin{vmatrix} \tilde{R}_p(z) - \varkappa' \tilde{S}_p(z) & \tilde{R}_p(z) - \varkappa'' \tilde{S}_p(z) \\ T_p(z) - \varkappa' U_p(z) & T_p(z) - \varkappa'' U_p(z) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{z^{2p+1}} \begin{vmatrix} A(z \mid \varkappa') & A(z \mid \varkappa'') \\ T_p(z) - \varkappa' U_p(z) & T_p(z) - \varkappa'' U_p(z) \end{vmatrix},$$

откуда видно, что определитель, стоящий в левой части, не зависит от z, и поэтому

$$\begin{vmatrix} \tilde{R}_p(z) - \varkappa' \tilde{S}_p(z) & \tilde{R}_p(z) - \varkappa'' \tilde{S}_p(z) \\ T_p(z) - \varkappa' U_p(z) & T_p(z) - \varkappa'' U_p(z) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \tilde{R}_p(0) - \varkappa' \tilde{S}_p(0) & \tilde{R}_p(0) - \varkappa'' \tilde{S}_p(0) \\ T_p(0) - \varkappa' U_p(0) & T_p(0) - \varkappa'' U_p(0) \end{vmatrix}$$

Теперь, в силу (43'')

$$\begin{vmatrix} \tilde{R}_p(z) & \tilde{S}_p(z) \\ T_p(z) & U_p(z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{R}_p(0) & \tilde{S}_p(0) \\ T_p(0) & U_p(0) \end{vmatrix} = D_p D_{p-1}. \qquad (44)$$

Вычислим $\widetilde{r}_p(z)$. Так как $\widetilde{r}_p(z)$ является радиусом окружности

$$y(z) = -z^{p+1}\frac{\widetilde{R}_p(z) - \varkappa\widetilde{S}_p(z)}{T_p(z) - \varkappa U_p(z)},$$

то

$$\widetilde{r}_p(z) = \left| z^{p+1}\frac{\begin{vmatrix}\widetilde{R}_p(z) & \widetilde{S}_p(z)\\ T_p(z) & U_p(z)\end{vmatrix}}{|T_p(z)|^2 - |U_p(z)|^2}\right|. \tag{45}$$

Числитель этой дроби известен, для вычисления же знаменателя применим дважды к определителю

$$D_p(a, \bar{b}) = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & a & \dots & a^p\\ 1 & c_0 & c_1 & \dots & c_p\\ \bar{b} & c_{-1} & c_0 & \dots & c_{p-1}\\ \vdots & & & & \\ \bar{b}^p & c_{-p} & c_{-p+1} & \dots & c_0\end{vmatrix}$$

теорему о минорах взаимного определителя. Имеем

$$D_{p-1}D_p(a, b) = a\bar{b}D_pD_{p-1}(a, \bar{b}) + \\ + \begin{vmatrix} 1 & a & a^p\\ c_{-1} & c_0 & c_p\\ c_{-p} & c_{-p+1} & c_0\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & c_1 & \dots & c_p\\ \bar{b} & c_0 & \dots & c_{p-1}\\ \bar{b}^p & c_{-p+1} & \dots & c_0\end{vmatrix} \tag{46'}$$

и

$$D_{p-1}D_p(a, \bar{b}) = D_pD_{p-1}(a, \bar{b}) + \\ + \begin{vmatrix} 1, & a & \dots & a^p\\ c_0, & c_1 & \dots & c_{p+1}\\ c_{-p+1} & & \dots & c_1\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & c_0 & \dots & c_{p-1}\\ \bar{b} & c_{-1} & \dots & c_{p-2}\\ \bar{b}^p & c_{-p} & \dots & c_{-1}\end{vmatrix}, \tag{46''}$$

откуда

$$(1 - a\bar{b})D_{p-1}D_p(a, \bar{b}) = \\ = \begin{vmatrix} 1 & \dots & a^p\\ c_{-1} & \dots & c_{p-1}\\ c_{-p} & \dots & c_0\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & c_1 & \dots & c_p\\ & & & \\ \bar{b}^p & c_{-p+1} & \dots & c_0\end{vmatrix} - \\ - a\bar{b}\begin{vmatrix} 1 & \dots & a^p\\ c_0 & \dots & c_p\\ c_{-p+1} & \dots & c_1\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & c_0 & \dots & c_{p-1}\\ & & & \\ \bar{b}^p & c_{-p} & \dots & c_{-1}\end{vmatrix}. \tag{46}$$

Полагая в этом тождестве $a = b = z$, получаем $|T_p(z)|^2 - |U_p(z)|^2 = (|z|^2 - 1)D_{p-1}D_p(z, \bar{z})$. Последняя формула вместе с (44) и (45) дает

$$\widetilde{r}_p(z) = \frac{|z|^{p+1}}{1 - |z|^2}\frac{D_p}{D_p(z; \bar{z})}. \tag{45}$$

5. Для дальнейшего нам понадобятся некоторые свойства определителя $D_p(a, \bar{b})$.

1°. Пусть $\psi(\lambda)$ — произвольная э. п. функция, а $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ — произвольная система различных вещественных чисел. Теорема о минорах взаимного определителя дает

$$-|\psi(\lambda_\nu - \lambda_\mu)|_{\mu, \nu=0}^{n} \begin{vmatrix} 0 & a^{\lambda_\nu} \\ \bar{a}^{\lambda_\mu} & \psi(\lambda_\nu - \lambda_\mu) \end{vmatrix}_{\mu, \nu=0}^{n+1} =$$

$$= -|\psi(\lambda_\nu - \lambda_\mu)|_{\mu, \nu=0}^{n+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & a^{\lambda_\nu} \\ \bar{a}^{\lambda_\nu} & \psi(\lambda_\nu - \lambda_\mu) \end{vmatrix} + \left\| \frac{a^{\lambda_\nu}}{\psi(\lambda_\nu - \lambda_\mu)} \right|_{\mu, \nu=0}^{\mu=n,\ \nu=n+1} \Bigg|_1^2,$$

откуда, если только $|\psi(\lambda_\nu - \lambda_\mu)|_{\mu, \nu=0}^{n+1} > 0$, следует, что

$$\frac{-\begin{vmatrix} 0 & a^{\lambda_\nu} \\ \bar{a}^{\lambda_\mu} & \psi(\lambda_\nu - \lambda_\mu) \end{vmatrix}_{\mu, \nu=0}^{n+1}}{|\psi(\lambda_\nu - \lambda_\mu|_{\mu, \nu=0}^{n+1}} \geqslant \frac{-\begin{vmatrix} 0 & a^{\lambda_\nu} \\ \bar{a}^{\lambda_\mu} & \psi(\lambda_\nu - \lambda_\mu) \end{vmatrix}_{\mu, \nu=0}^{n}}{|\psi(\lambda_\nu - \lambda_\mu)|_{\mu, \nu=0}^{n}}$$

Повторным применением последнего неравенства получаем

$$\frac{D_{kp}(z, \bar{z})}{D_{kp}} \geqslant \frac{D_p(z^k, \bar{z}^k)}{D_p}, \ k = 2, 3, \ldots . \tag{47}$$

2°. Повторным применением теоремы о минорах взаимного определителя получаем, обозначая через

$$P_k(z) = \frac{1}{\sqrt{D_{k-1}D_k}} \begin{vmatrix} c_0, & \ldots & c_k \\ c_{-k+1} & \ldots & c_1 \\ 1 & \ldots & z^k \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} D_{-1} = 1. \\ k = 0, 1, 2 \ldots, \end{matrix}$$

что

$$\frac{D_p(z_1, \bar{z}_2)}{D_p} = \sum_{k=0}^{p} P_k(z_1) \overline{P_k(r_2)}. \tag{48}$$

В силу неравенства Шварца справедлива оценка

$$\left| \frac{D_p(z_1, \bar{z}_2)}{D_p} \right|^2 \leqslant \frac{D_p(z_1, \bar{z}_1)}{D_p} \frac{D_p(z_2, \bar{z}_2)}{D_p}. \tag{48¹}$$

3°. Так как все корни каждого из полиномов $P_k(z)$ лежат в единичном круге, то если $1 \leqslant |z_1| < |z_2|$, то

$$\frac{D_p(z_1, \bar{z}_1)}{D_p} < \frac{D_p(z_2, \bar{z}_2)}{D_p}. \tag{49}$$

4°. Полином

$$H_p(z|\alpha) = (z - \alpha) D_p(z, \bar{\alpha}), \ |\alpha| = 1,$$

как легко проверить, является ортогональным полиномом степени $p+1$ с одним из корней в точке α. Имеет место тождество

$$T_p(z)\,U_p(\alpha)-T_p(\alpha)\,U_p(z)=\alpha^p D_{p-1}H_p(z\,|\,\alpha). \tag{50}$$

5°. Пусть $g_{p-1}(z)=a_0z^{p-1}+a_1z^{p-2}+\cdots+a_{p-1}$ — произвольный полином степени $p-1$, а z_0 — произвольное комплексное число, тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi}|D_p(e^{it},\ \bar z_0)-(e^{it}-z_0)\,g_{p-1}(e^{it})|^2\,d\sigma(t)=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}|D_p(e^{it},\ \bar z_0)|^2\,d\sigma(t)+\int_{-\pi}^{\pi}|(e^{it}-z_0)\,g_{p-1}(e^{it})|^2\,d\sigma(t)-$$

$$-2\,\mathrm{Re}\int_{-\pi}^{\pi}D_p(e^{it},\ \bar z_0)\,\overline{(e^{it}-z_0)\,g_{p-1}(e^{it})}\,d\sigma(t)\geqslant$$

$$\geqslant\int_{-\pi}^{\pi}|D_p(e^{it},\ \bar z_0)|^2\,d\sigma(t)=D_pD_p(z_0,\ \bar z_0).$$

Мы воспользовались тем, что третий интеграл второй части равен нулю. Отсюда следует, что для любого полинома $g_p(z)$ степени p имеет место неравенство

$$|g_p(z_0)|^2\leqslant\frac{D_p(z_0,\ \bar z_0)}{D_p}\int_{-\pi}^{\pi}|g_p(e^{it})|^2\,d\sigma(t). \tag{51}$$

6°. Пусть тригонометрический полином степени p $h_p(z)=\sum_{\nu=-p}^{p}a_\nu e^{i\nu z}$ принимает на вещественной оси неотрицательные значения, тогда

$$h_p(z)=\sum_{\nu=0}^{p}b_\nu e^{i\nu z}\sum_{\mu=0}^{p}\bar b_\mu e^{-i\mu z},$$

причем на вещественной оси

$$\Big|\sum_{\nu=0}^{p}b_\nu e^{i\nu z}\Big|^2=\Big|\sum_{\mu=0}^{p}\bar b_\mu e^{-i\mu z}\Big|^2.$$

Неравенство (51) позволяет заключить, что в этом случае

$$|h_p(z)|\leqslant\frac{\sqrt{D_p(e^{iz},\ e^{-iz})\,D_p(e^{-i\bar z},\ e^{i\bar z})}}{D_p}\int_{-\pi}^{\pi}h_p(t)\,d\sigma(t). \tag{52}$$

7°. Максимальная масса $\rho_p(a)$, которая может быть сосредоточена в точке a, лежащей на вещественной оси, определяется по формуле (37), которая после замены $Q_{p+1}(e^{it}\mid\varkappa)$ на $H_p(z\mid\alpha)$, где $\alpha=e^{ia}$, дает

$$\rho_p(a)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{H_p(e^{it}\mid\bar\alpha)\,d\sigma(t)}{(e^{it}-\alpha)\,H_p'(\alpha\mid\bar\alpha)}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{D_p(e^{it},\bar\alpha)}{D_p(\alpha,\bar\alpha)}\,d\sigma(t)=\frac{D_p}{D_p(\alpha,\bar\alpha)}. \quad (53)$$

8°. Пусть γ, δ — два различных числа, модули которых равны 1; α — один из корней полинома $Q_{p+1}(z\mid\gamma)$, а β — один из корней полинома $Q_{p+1}(z\mid\delta)$. Тогда, как следует из (50) и (46),

$$|F_\gamma(z)-F_\delta(z)|=|G_\gamma(z)-G_\delta(z)|=$$
$$=\left|z^{p+1}\frac{D_p[T_p(\alpha)\,U_p(\beta)-T_p(\beta)\,U_p(\alpha)]}{D_{p-1}H_p(z\mid\alpha)\,H_p(z\mid\beta)}\right|=\left|z^{p+1}\frac{D_pH_p(\alpha\mid\bar\beta)}{H_p(z\mid\alpha)\,H_p(z\mid\beta)}\right|.$$

Мы получили важное для дальнейшего равенство

$$|F_\gamma(z)-F_\delta(z)|=\left|z^{p+1}\frac{D_pH_p(\alpha\mid\beta)}{H_p(z\mid\alpha)\,H_p(z\mid\beta)}\right|. \quad (54)$$

IV. Продолжение непрерывных э. п. функций

1. Основной задачей этого раздела является нахождение условий, необходимых и достаточных для того, чтобы уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}d\sigma(t)=\psi(x), \quad (55)$$

где $\psi(x)$ — непрерывная функция, э. п. в интервале (—1, 1), имело только одно решение (или, как говорят, чтобы имел место определенный случай).

Известно, что интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(t)}{z-t}$, где $\sigma(t)$ — любая ограниченная неубывающая функция, определяет аналитические функции, вообще говоря, не являющиеся аналитическим продолжением друг друга. Одна из них регулярна в верхней полуплоскости, а другая в нижней. Чтобы упростить обозначения, обе эти функции будем обозначать одним образом $w(z\mid\sigma)$. Известно, что из равенства $w(z\mid\sigma_1)=w(z\mid\sigma_2)$ следует $\sigma_1(t)=\sigma_2(t)$. Как всегда σ_1 и σ_2 предполагаются непрерывными справа и удовлетворяющими условию $\sigma_1(-\infty)=\sigma_2(-\infty)=0$.

Задача исследования множества Σ_ψ сводится к исследованию множества $\{w(z\mid\sigma)\}$, $\sigma\in\Sigma_\psi$.

Рассмотрим последовательность системы чисел $\left\{\psi\left(\frac{n}{p}\right)\right\}_{n=-p}^{p}$ $p=1, 2, \ldots$ Так как $\psi(x)$ — э. п. в (—1, 1) то имеют место неравенства

$$\Delta_n^{(p)}=\left|\psi\left(\frac{\nu-\mu}{p}\right)\right|_{\mu,\nu=0}^{n}\quad n=0, 1, \ldots p,\ p=1, 2, \ldots$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением того случая, когда выполнены условия $\Delta_n^{(p)} > 0$, $n = 0, 1, \ldots$ $p = 1, 2, \ldots$ **(56)**. В противном случае единственность продолжения очевидна.

Для каждого p существует множество Σ_p неубывающих на $[-p\pi, p\pi]$ функций $\sigma(t)$, являющихся решениями системы уравнений

$$\int_{-p\pi}^{p\pi} e^{it\frac{\nu}{p}} d\sigma(t) = \dot{\psi}\left(\frac{\nu}{p}\right), \quad \nu = 0, \pm 1, \ldots \pm p. \tag{57}$$

Множество э. п. функций $\psi_p(x|\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} d\sigma(t)$, $\sigma \in \Sigma_p$, $p = 1$, 2, ... равностепенно непрерывно в точке нуль. Поэтому, как следует из замечания c раздела II, к сходящимся в основном последовательностям элементов множества $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \cdots$ можно применить вторую теорему Хелли.

В дальнейшем для простоты будем считать, что $\psi(0) = 1$.

2. Перейдем теперь к исследованию множества (очевидно выпуклого и замкнутого $\boldsymbol{R}(z) = \{w(z|\sigma)\}$, $\sigma \in \Sigma_\psi$, $z = x + iy$ — некоторая фиксированная точка верхней полуплоскости.

Имеем очевидное тождество

$$w(z|\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{z-t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\zeta - \tau_p}{z-t} - \frac{i}{p}\zeta_p}{\zeta_p - \tau_p} d\sigma(t) + \frac{i}{p}\zeta_p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{\zeta_p - \tau_p},$$

где $\zeta_p = e^{\frac{iz}{n}}$, $\tau_p = e^{\frac{it}{p}}$.

Обозначая первое слагаемое правой части через $u_p(z|\sigma)$, а второе — через $v_p(z|\sigma)$, получаем $w(z|\sigma) = u_p(z|\sigma) + v_p(z|\sigma)$ **(58)**. Легко видеть, что с неограниченным увеличением p, $u_p(z|\sigma)$ стремится к нулю, равномерно относительно всех $\sigma \in \Sigma_1 + \Sigma_2 + \cdots$ следовательно, существует последовательность $\{\varepsilon_p\}$, $\lim \varepsilon_p = 0$ такая, что $|u_p(z|\sigma)| < \varepsilon_p$, $\sigma \in \Sigma_1 + \Sigma_2 + \cdots$ (59)

Так как τ_p — периодическая функция от t, то для любой ограниченной неубывающей функции $\sigma(t)$ имеет место равенство

$$v_p(z|\sigma) = \int_{-p\pi}^{p\pi} \frac{d\sigma^*(t)}{\zeta_p - \tau_p},$$

где $\sigma^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{\sigma(2np\pi + t) - \sigma(2np\pi - p\pi)\}$, $|t| \leqslant p\pi$, поэтому $\{v_p(z|\sigma)\}_{\sigma \in \Sigma_\psi} \subseteq \{v_p(z|\sigma)\}_{\sigma \in \Sigma_p}$ **(59′)**.

Из предыдущего раздела известно, что $\{w(z|\sigma)\}$ $\sigma \in \Sigma_p$ является *кругом*, радиус которого, определяющийся по формуле (45), есть

$$\bar{r}_p(z) = \frac{|\zeta_p^{p+1}|}{p(1-|\zeta_p|^2)} \cdot \frac{1}{\Delta_p(z;\ \bar{z})}, \tag{60}$$

где $\Delta_p(a,\ b) = \dfrac{-\left|\begin{array}{c:c} 0 & e^{i\frac{a}{p}\nu} \\ \hdashline e^{i\frac{b}{p}\mu} & \psi\left(\dfrac{\nu-\mu}{p}\right) \end{array}\right|_{\mu,\ \nu=0}^{p}}{\Delta_p^{cp}}$.

Из (59) и (59′) следует:

а) множество $\{w(z|\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma_\psi}$ с точностью до ε_p покрывается кругом $\{v_p(z|\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma_p}$.

Выберем теперь произвольную сходящуюся последовательность точек $\{v_{p_n}(z|\sigma_{p_n})\}$; $\sigma_{p_n} \in \Sigma_{p_n}$; $\lim v_p(z|\sigma_n) = v_0$. Из последовательности $\{\sigma_{p_n}\}_n$ выберем сходящуюся в основном подпоследовательность $\{\sigma_{p_n'}\}_n$; предельную функцию обозначим через σ_0. Последовательность $\{\psi_{p_n'}(x|\sigma_{p_n'})\}_n$ равномерно в $[-1,\ 1]$ сходится к $\psi(x)$, поэтому, пользуясь сделанным выше замечанием о применимости второй теоремы Хелли, имеем

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\, d\sigma_{p_n'}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\, d\sigma_0(t) \quad |x| \leqslant 1,$$

т. е. $\sigma_0 \in \Sigma_\psi$, откуда следует, что $v_0 \in \{w(z|\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma_0}$.

Таким образом, получено

б) Все предельные точки каждой последовательности $\{v_p(z|\sigma_p)\}_p$ $\sigma_p \in \Sigma_p$ принадлежат $\{w(z|\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma_\psi}$. Из *а* и *б* следует, что круги $\{v_p(z|\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma_p}$ стремятся к некоторому предельному кругу, совпадающему с $\{w(z|\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma_\psi}$. Радиус этого круга получается предельным переходом из (60):

$$r(z) = \frac{\rho(z)}{2\,\mathrm{Im}\, z e^{\mathrm{Im}\, z}}, \tag{61}$$

где

$$\rho(z) = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{\Delta_p(z,\ \bar{z})}. \tag{61′}$$

Существование этого предела доказано предыдущими рассуждениями.

Формула (61) выведена в предположении, что z лежит в верхней полуплоскости, однако из равенства $w(\bar{z}|\sigma) = \overline{w(z|\sigma)}$ и легко проверяемого тождества $\Delta_p(z,\ \bar{z}) = e^{-\mathrm{Im}\, z}\Delta_p(\bar{z},\ z)$, (62′)
переходящего в пределе в

$$\frac{e^{y}}{\rho(x+iy)} = \frac{e^{-y}}{\rho(x-iy)}, \tag{62}$$

следует, что формула (61) остается справедливой и для точек нижней полуплоскости.

3. Теорема 7. *В неопределенном случае функция $\rho(z)$ в каждой ограниченной области ограничена снизу некоторым положительным числом.*

Доказательство. Допустим противное: пусть существует неограниченная последовательность $z_1, z_2, \ldots$, такая что $\lim \rho(z_n) = 0$. Заменяя, если это нужно, z_n через $\bar{z}_n$, мы получим неограниченную последовательность $z_1^*, z_2^*, \ldots$ точек нижней полуплоскости, причем в силу (62) по-прежнему $\lim \rho(z_n^*) = 0$.

Пусть z_0^* — предельная точка последовательности $z_1^*, z_2^*, \ldots$ Обозначим через S_n отрезок, соединяющий точки $z_n^* - i$ и $\operatorname{Re} z_n - iL$, где $L = 2 + \sup|\operatorname{Im} z_n^*|$.

Пусть далее $w_1(z)$ и $w_2(z)$ — две различные функции семейства $\{w(z|\sigma)\}_{\sigma \in \Sigma_\psi}$. В силу (49) и (61) имеем $|w_1(z) - w_2(z)| < \rho(z_n^*)$, $z \in S_n$ откуда $w_1(z) - w_2(z) = 0$, $z \in S_0$. Следовательно, $w_1(z) \equiv w_2(z)$, что противоречит выбору $w_1(z)$ и $w_2(z)$.

4. Теорема 8. *Если имеет место определенный случай, то функция $\rho(z)$ равна нулю всюду, за исключением быть может, счетного множества точек вещественной оси.*

Доказательство. Для точек, не лежащих на вещественной оси, это очевидно. Пусть x — точка вещественной оси. Для каждого p можем найти кусочно-постоянную функцию $\sigma_p(t)$, одна из точек роста которой находится в x, причем скачок в этой точке равен $\rho_p(x)$. Из последовательности $\{\sigma_p(t)\}$ выберем сходящуюся в основном подпоследовательность; тогда предельная функция будет иметь в точке x скачок, не меньший $\rho(x)$. Так как предельная функция единственна, а функция ограниченной вариации может иметь не более счетного множества точек разрыва, то существует не более счетного множества значений x, для которых $\rho(x) \neq 0$. Более того, имеет место неравенство $\sum_x \rho(x) \leqslant \sigma(+\infty) - \sigma(-\infty) = \psi(0) = 1$.

5. Во всем дальнейшем будем предполагать, что имеет место неопределенный случай.

Пусть K_n обозначает круг радиуса n с центром в точке 0. Тогда функция $\rho^{-1}(z)$, как следует из теоремы 7, ограничена в K_n; далее из неравенства (47) следует, что $\rho(z) = \lim_{n\to\infty} \rho_n(z) = \lim_{k\to\infty} \rho_{kp}(z) \leqslant \rho_p(z)$. Поэтому множество функций $\rho_p^{-1}(z) = \Delta_p(z, \bar{z})$, $p = 1, 2, \ldots$ равномерно ограничено в K_n. Неравенство (48′) дает $|\Delta_p(z, a)| \leqslant \sqrt{\Delta_p(z, \bar{z})\, \Delta_p(\bar{a}, a)}$. Отсюда следует, что последовательность $\{\Delta_p(z, a)\}_{p=1, 2, \ldots}$ **(63)** целых функций от двух переменных z и a равномерно ограничена в K_n, и поэтому из любой подпоследовательности последовательности (63) можно выделить часть, сходящуюся (равномерно в каждом K_n) к некоторой целой функции, но последовательность (63) сходится при $a=\bar{z}$. Так как для множества всех точек $(z, \bar{z})$ четырехмерного пространства точка (0, 0) является предельной точкой бесконечного порядка, то мы можем применить теорему Витали.

Таким образом, мы получили следующий результат.

Последовательность функций от двух переменных $\{\Delta_p(z, a)\}$ *сходится равномерно относительно обеих переменных в каждой ограниченной области, к некоторой целой функции.*

Эту предельную функцию обозначим через $\Delta(z, a)$.

6. Пусть a — фиксированное вещественное число. В каждом классе Σ_p, $p=1, 2, \ldots$ имеется одна и только одна неубывающая функция $\sigma_p^{(a)}(t)$, отвечающая граничному значению $v_p(z)$, одна из точек роста которой находится в точке a; $\sigma_p^{(a)}(t)$ кусочно-постоянна и все ее точки роста лежат в интервале $(-p\pi, p\pi)$ и совпадают с корнями $a_{p,0}=a$, $a_{p,1}$, $\ldots$ a_{pp} периодического полинома $H_p(z|a)=-ip(\zeta_p-\alpha_p)\Delta_p(z, a)$, причем скачки определяются равенством $\sigma_p^{(a)}(a_{p_j})-\sigma_p^{(a)}(a_{p_j}-0)=\rho_p(a_{p_j})$ $j=0, 1, 2 \ldots p$.

Так как последовательность $\{H_p(z|a)\}$ сходится (равномерно на каждом ограниченном множестве) к целой функции $H(z|a)= =(z-a)\Delta(z, a)$, а $\lim\limits_{p\to\infty}\rho_p(z)=\rho(z)$ и, кроме того, $\rho(z)$ — непрерывная функция от z, то последовательность $\{\sigma_p^{(a)}(t)\}$ сходится в основном к кусочно-постоянной функции $\sigma^{(a)}(t)$, определенной следующим образом.

1. Точки роста $a_0=a$, a_1, $\ldots$ функции $\sigma^{(a)}(t)$ совпадают с нулями (они все вещественны) целой функции $H(z|a)$.

2. Величина скачка в каждой из точек роста определяется равенством $\sigma^{(a)}(a_j)-\sigma^{(a)}(a_j-0)=\rho(a_j)$.

Выше было доказано, что $\sigma^{(a)}(t)\in\Sigma_\psi$ и $w(z|\sigma^{(a)})=\lim v_p(z|\sigma_p)$ при каждом z, $\operatorname{Im} z\neq 0$. Из теоремы Витали теперь следует, что последовательность $\{v_p(z|\sigma_p^{(a)})\}$ $p=1, 2, \ldots$ сходится к $w(z|\sigma^{(a)})$ равномерно в каждой ограниченной замкнутой области, не заключающей точек a_0, a_1, $\ldots$. Но

$$v_p(z|\sigma_p^{(a)})=\frac{G_p(z|a)}{H_p(z|a)},$$

где

$$G_p(z|a)=\frac{i}{p}\zeta_p\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{H_p(z|a)-H_p(t|a)}{\zeta_p-\tau_p}\,d\sigma(t).$$

Поэтому последовательность $\{G_p(z|a)\}$ сходится равномерно в каждой ограниченной области; предельная функция $G(z|a)$, очевидно, является целой функцией от z.

Таким образом, каждая граничная функция $w(z|\sigma^{(a)})$ является отношением двух целых функций

$$w(z|\sigma^{(a)}) = \frac{G(z|a)}{H(z|a)}. \tag{64}$$

7. Перейдем к оценке роста $H(z|a)$. Пусть $z = x - iy$ произвольная точка нижней полуплоскости. Выберем два произвольных вещественных числа a и b, таких что $H(a, b) \neq 0$. Из (54) получаем

$$|v_p(z|a) - v_p(z|b)| = \left| \zeta_p^{p+1} \frac{H_p(a, b)}{H_p(z|a) H_p(z|b)} \right|,$$

откуда при помощи (48′) и (45) следует двойное неравенство

$$\left| \frac{2\zeta_p^{p+1} \rho_p(z)}{p(|\zeta_p|^2 - 1)} \right| \geqslant \left| \frac{\zeta_p^{p+1} H_p(a|b)}{H_p(z|a) H_p(z|b)} \right| \geqslant$$
$$\geqslant \left| \frac{\zeta_p^{p+1} H_p(a|b) \rho_p(z) \sqrt{\rho_p(a)\rho_p(b)}}{p^2 (\zeta_p - \alpha_p)(\zeta_p - \beta_p)} \right|.$$

Теперь, в силу очевидных неравенств $\rho_p(x - iy) < 1$ и $p(e^{\frac{2y}{p}} - 1) = 2ye^{\frac{2\theta y}{p}} > 2y\,(0 < \theta < 1)$, следует, что для всех $z = x - iy$ из нижней полуплоскости имеют место неравенства

$$C_1 y < C_2 \frac{p(|\zeta_p|^2 - 1)}{2\rho_p(z)} < |E_p(z)| < C_3 p^2 \frac{|(\zeta_p - \alpha_p)(\zeta_p - \beta_p)|}{\rho_p(z)} \quad (p > p_0), \tag{65}$$

где $E_p(z) = H_p(z|a) H_p(z|b)$, p_0, C_1, C_2, C_3 — некоторые положительные константы.

Пусть $y > C^{-1}$, тогда

$$\mathrm{l}a|E_p(x - iy)| > \ln\{C_2 p(|\zeta_p|^2 - 1)\Delta_p(x - iy, x + iy)\} > \ln C_1 y > 0. \tag{66}$$

Все нули функции $E_p(z)$ лежат на вещественной оси, и, кроме того, функция $e^{-2iz}E_p(z)$ ограничена в нижней полуплоскости. Поэтому формула Коши дает

$$\ln|e^{-2y-2} E_p(-i - iy)| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|e^{-2y} E_p(t - iy)}{1 + t^2} dt$$

или

$$\ln|E_p(-i - iy)| - 2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|E_p(t - iy)|}{1 + t^2} dt.$$

Левая часть этого равенства остается ограниченной для $p=1$, 2, ..., поэтому существует такое положительное число M, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|\Delta_p(t-iy, t+iy)|}{1+t^2} dt < M, \quad p=1, 2, \ldots,$$

отсюда в силу (65) существует такое $M_1>0$, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|\Delta_p(t-iy, t+iy)|}{1+t^2} dt < M_1, \quad p>p_0. \tag{67}$$

Так как подынтегральная функция в (67) положительна и не убывает с ростом p, то возможен предельный переход под знаком интеграла, в результате чего мы получаем сходимость интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|\Delta(t-iy, t+iy)|}{1+t^2} dt. \tag{68}$$

Последний результат установлен в предположении, что $y>c_1^{-1}$, однако он справедлив и при $y \geqslant 0$, так как $\Delta(t-iy, t+iy)$ — неубывающая функция от y, $y\geqslant 0$.

Из (65) имеем при фиксированном y

$$|E_p(x-iy)| < C_3\Delta_p(x-iy, x+iy)\left|p\left(e^{\frac{y+ix}{p}} - e^{i\frac{a}{p}}\right)\right| \cdot$$

$$\left|p\left(e^{\frac{y+ix}{p}} - e^{\frac{ib}{p}}\right)\right| = C_3\Delta_p(x-iy, x+iy) \times$$

$$\times\left|(y+ix-ia)\, e^{\frac{ia}{p}} e^{\theta_1\frac{y+ix-ia}{p}} (y+ix-ib)\, e^{\frac{ib}{p}} e^{\theta_2\frac{y+ix+ib}{p}}\right| <$$

$$< C_3\Delta_p(x-iy, x+iy)\,|(y+ix-a)(y+ix-b)| <$$

$$< (Ax^2+B)\,\Delta_p(x-iy, x+iy), \quad p>p_0, \quad -\infty<x<\infty,$$

где A, B — достаточно большие положительные числа.

Применяя снова формулу Коши, получаем для $y>1$

$$\ln|e^{-2y}E_p(x-iy)| = \frac{y-1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|e^{-2}E_p(t-i)|}{(t-x)^2+(y-1)^2} dt \leqslant$$

$$< \frac{y-1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\Delta(t-i, t+i)+\ln(At^2+B)-2}{(t-x)^2+(y-1)^2} dt. \tag{69}$$

Пусть тепер точка $z=x-iy$ лежит внутри угла $\{\theta\}$, образованного двумя лучами, выходящими из точки $-i$ и составляющими с положительным направлением вещественной оси углы $-\pi$ и $\pi+\theta$, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$. Для всех точек рассматриваемого угла имеет место очевидное неравенство $(t-x)^2+(y-1)^2 \geqslant t^2 \sin^2\theta$, следовательно, для $|t| \geqslant 1$ $(t-x)^2+(y-1)^2 \geqslant 1/2\,(1+t^2)\sin^2\theta = c(1+t^2)$. Из (69) для $T>1$ получаем

$$\ln|e^{-2y}E_p(x-iy)| < \frac{y-1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\ln\Delta(t-i,\ t+i)+\ln(At^2+B)-2}{(y-1)^2}\,dt +$$

$$+\frac{y-1}{\pi}\left\{\int_{-\infty}^{-T}+\int_{T}^{\infty}\frac{\ln\Delta(t-i,\ t+i)+\ln(At^2+B)-2}{C(1+t^2)}\,dt.\right. \qquad (70)$$

Из сходимости интеграла (68) следует, что T может быть выбрано настолько большим, что второе слагаемое правой части (70) будет меньше, чем $\frac{\varepsilon_1 y}{2}$, где ε_1 — произвольное положительное число; после этого выберем y настолько большим, чтобы и первое слагаемое удовлетворяло тому же неравенству. Итак, для всех точек $z\in\{\theta\}$ при достаточно большом y, или, что то же самое, при достаточно большом $|z|$ имеет место неравенство $\ln|e^{-2y}E_p(x-iy)|<\varepsilon_1 y,\ p>p_0$. Отсюда в силу (66) получаем $\ln\Delta(x-iy,\ x+iy)<(2+\varepsilon)|y|,\ |z|>E_\varepsilon,\ z\in\{\theta\}$ **(71).**

Пусть теперь $z=x-iy$ — точка нижней полуплоскости, не принадлежащая $\{\theta\}$; положим $z_1=x-i(1+x\operatorname{tg}\theta)$, тогда

$$\ln\Delta(z,\ \bar z)\leqslant\ln\Delta(z_1,\ \bar z_1)\leqslant(2+\varepsilon)(1+x\operatorname{tg}\theta)\leqslant$$
$$\leqslant(2+\varepsilon)(1+|z|\operatorname{tg}\theta), \qquad (72)$$

причем это неравенство во всяком случае имеет место для $|z|>N_\varepsilon$. Выбрав угол $\{\theta\}$ достаточно малым, мы можем сделать коэффициент при $|z|$ в (72) сколь угодно малым.

Замечая, что перенос вершины угла $\{\theta\}$ из точки $-i$ в точку 0 не вносит существенных изменений в неравенство (72), и пользуясь тождеством (62), заключаем, что справедлива

Теорема 9. *Для любого положительного числа* δ *существуют такие константы* $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$, A, B *и такая функция* $\varepsilon(r)$ $(\lim\varepsilon(r)=0)$, *что имеют место следующие неравенства:*

$$\begin{aligned}
&\Delta(z,\ \bar z)<Ae^{\operatorname{Im} z\varepsilon(|z|)} && \text{для } \theta\leqslant\arg z\leqslant\pi-\theta,\\
&\Delta(z,\ \bar z)<Be^{\delta|z|} && \text{для } -\theta\leqslant\arg z\leqslant 0 \text{ и}\\
& && -\pi-\theta\leqslant\arg z\leqslant\pi+\delta,\\
&\Delta(z,\ \bar z)<Ae^{-\operatorname{Im} z\{|z|+\varepsilon|z|\}} && \text{для } \pi+\theta\leqslant\arg z\leqslant 2\pi-\theta.
\end{aligned} \qquad (73)$$

Применяя неравенство $|\Delta(z;\ a)|\leqslant\sqrt{\Delta(z,\ \bar z)\,\Delta(a,\ \bar a)}$ (a — любое комплексное число) и предыдущую теорему, получаем:

Теорема 10. *Функции* $\Delta(z,\ \bar u)$ *и* $H(z\,|\,a)$ *являются целыми функциями экспоненциального типа, не высшего единицы.*

8. Теорема 11. *Пусть для функции* $\psi(x)$, $|x|\leqslant 1$ *имеет место неопределенный случай проблемы продолжения,* $y(t)$ — *ограничен-*

ная непрерывная функция. Если интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} y(t)\,d\sigma(t)$ *имеет одно и то же значение для всех* $\sigma \in \Sigma_\psi$, *то существует целая функция экспоненциального типа не высшего единицы, совпадающая на вещественной оси с* $y(t)$.

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что yt вещественная функция. Как следует из сказанного в п. 6, 7 раздела II, существуют последовательности $\{x'_n(t)\}$ и $\{x''_n(t)\}$ периодических полиномов с рациональными показателями Фурье такие, что

1°. $x'_n(t) \leqslant x''_n(t)$, $-\infty < t < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$

2°. $x_n(t) \leqslant y(t) \leqslant x''_n(t)$, $|t| < n$, $n = 1, 2, \ldots$

3°. $x'_n(t) \leqslant \sup y(t)$; $x''_n(t) \geqslant \inf y(t)$, $n = 1, 2, \ldots$

4°. $\lim f(x'_n) = \lim f(x''_n)$.

Неравенство (52) дает

$$|\sup y(t) - x'_n(z)| \leqslant [\sup y(t) - f(x'_n)] \sqrt{\Delta(z, \bar{z})\,\Delta(-z, -\bar{z}} < \\ < C\sqrt{\Delta(z, \bar{z})\,\Delta(-z, -\bar{z})}, \tag{74}$$

$$|x''_n(z) - \inf y(t)| \leqslant [f(x''_n) - \inf y(t)] \sqrt{\Delta(z, \bar{z})\,\Delta(-z, -\bar{z})} < \\ < C\sqrt{\Delta(z, \bar{z})\,\Delta(-z, -\bar{z})}. \tag{74'}$$

Из полученных неравенств следует, что обе последовательности $\{x'_n(z)\}$, $\{x''_n(z)\}$ равномерно ограничены в каждой ограниченной области. Поэтому из каждой из них можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся в каждой ограниченной области. Пусть $x''_{jn}(z) \Rightarrow x''(z)$, $x'_{jn}(z) \Rightarrow x'(z)$. Из неравенства (74) следует, что $x'(z)$ и $x''(z)$ — целые функции экспоненциального типа, не выше единицы.

Далее имеем

$$|x''_{jn}(z) - x'_{jn}(z)| \leqslant [f(x''_{jn} - f x'_{jn})] \sqrt{\Delta(z, \bar{z})\,\Delta(-z, -\bar{z})},$$

откуда следует $\lim x'_{jn}(z) = \lim x''_{jn}(z)$, т. е. $x''(z) = x'(z)$, но так как $x'_n(t) \leqslant y(t) \leqslant x''_n(t)$, $|t| < n$, $n = 1, 2, \ldots$, то имеем место тождество.

Теорема доказана. Из нее вытекает

Следствие. Пусть $\psi(x)\,(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ э. п. непрерывная неоднозначно продолжаемая функция, а $\{\tilde{\varphi}(x)\}$ — совокупность всех э. п. продолжений $\psi(x)$ из интервала $[-1, 1]$ на всю ось. Тогда для любой вещественной точки $x_0 \bar{\in} [-1, 1]$ множество $\{\tilde{\varphi}(x_0)\}$ состоит более, чем из одной точки.

Действительно, если бы для некоторой вещественной точки $x_0 \bar{\in} [-1, 1]$ множество $\{\tilde{\varphi}(x_0)\}$ состояло бы из одной точки, но так как $\psi(x_0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx_0}\,d\sigma(t)$ $\forall \sigma \in \Sigma_\psi$ по теореме 11 функция e^{itx_0} была бы целой функцией экспоненциального типа, не большего единицы, в то время как ее тип равен $|x_0| > 1$.

Список литературы: 1. *Ахиезер Н. И., Крейн М. Г.* О некоторых вопросах теории моментов. НТИ Украина (ДНТВУ), Харьков, 1938.—255 с. 2. *Schur J.* Über Potenzreihen die im Jnnern des Einheitskreises beschränkt sind.— Journ. für Mathematik, 1918, Bd. 147, S. 205—232, Bd. 148, S. 122—145. 3. *Nevanlinna R.* Über beschränkte analytische Funktionen.— Ann. Akad. Sci. Fennicae Ser. A, 1929, 32, № 7, S. 40—75.

Поступила в редколлегию 04.10.82.