ISSN 0321-4427

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

42|84

»ВИЩА ШКОЛА«

1 р. 40 к.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖДУВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ СБОРНИК

Основан в 1965г.

Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1984, вып. 42, 1—137.

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР
ХАРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ А. М. ГОРЬКОГО

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

ВЫПУСК 42

Республиканский
междуведомственный
научный
сборник

Основан в 1965 г.

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ «ВИЩА ШКОЛА»
1984

УДК 513.53

Теория функций, функциональный анализ и их приложения: Респ. междувед. науч. сб. Вып. 42.— Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1984.—137 с.

Сборник содержит статьи по теории интегральных представлений, эрмитово-позитивных функций и ядер, теории целых функций, итерациям рациональных функций, спектральной теории дифференциальных операторов, геометрии банаховых пространств.

Для научных работников и специалистов.

Адрес редакционной коллегии: 310077, Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, университет, механико-математический факультет, тел. 40-14-27

Редакция естественнонаучной литературы

Т $\frac{1702050000-003}{М226(04)-84}$ 472—84

УДК 517.5

А. П. АРТЕМЕНКО

ЭРМИТОВО-ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И ПОЗИТИВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ. II

III. Проблема Каратеодори *

1. Одним из простейших следствий теорем 4 и 5 является следующее известное предложение.

Для того чтобы существовала неубывающая функция $\sigma(t)$, удовлетворяющая системе уравнений

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\nu t} d\sigma(t) = c_\nu \; (\nu = 0, \; \pm 1, \; \dots \; \pm p), \tag{31}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$D_\nu \geqslant 0, \;\; \nu = 1, \; 2, \; \dots \; p, \tag{32}$$

где

$$D_\nu = \begin{vmatrix} c_0, & c_1, & \dots & c_\nu \\ c_{-1}, & c_0, & \dots & c_{\nu-1} \\ c_{-\nu}, & & \dots & c_0 \end{vmatrix} = |c_{j-i}|_{i,\, j=0}^{\nu}.$$

Задачей этого раздела является изучение некоторых свойств семейства Σ всех решений $\sigma(t)$ системы уравнений (31), причем мы ограничимся лишь тем случаем, когда ни в одном из условий (32) не имеет места знак равенства.

2. Пусть $\sigma(t)$ — одно из решений системы уравнений (31), тогда функция

$$F(z \mid \sigma) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\sigma(t) \tag{33}$$

регулярна внутри единичного круга и имеет там положительную вещественную часть, причем имеет место следующее очевидное разложение в степенной ряд:

$$F(z \mid \sigma) = \frac{c_0}{2} + c_{-1}z + c_{-2}z^2 + \dots + c_{-p-1}z^{p+1} + \dots \;\; |z| < 1,$$

где коэффициенты c_{-p-1}, c_{-p-2}, ... вычисляются при помощи формулы (31).

---

* Нумерация разделов, теорем и формул продолжает нумерацию первой части работы.

Обратно, каждой функции $F(z)$, регулярной внутри единичного круга, имеющей там положительную вещественную часть и удовлетворяющей условиям

$$F(0) = \frac{c_0}{2}, \; F^{(\nu)}(0) = \nu! \; c_{-\nu}, \; \nu = 1, 2, \ldots p, \tag{34}$$

отвечает одна и только одна неубывающая функция $\sigma(t)$, являющаяся решением системы (31).

Множество значений

$$\left\{c_{p+1} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(p+1)t} \, d\sigma(t)\right\}_{\sigma \in \Sigma}$$

очевидно совпадает с множеством $\{c_{p+1}\}$ решений неравенства $D_{p+1} \geqslant 0$, но последнее множество, как следует из (11) и (11′), является кругом радиуса D_p/D_{p-1} с центром в точке γ_{p+1}, где γ_{p+1} является решением уравнения

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & & c_p & \gamma_{p+1} \\ c_0 & c_1 & & c_{p-1} & c_p \\ & & & \vdots & \\ c_{-p-1} & \ldots & & c_0 & c_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{36}$$

Положим $c_{p+1} = \gamma_{p+1} + \frac{D_p}{D_{p-1}} \varkappa$, $|\varkappa| = 1$ и присоединим к системе (31) уравнения

$$c_{p+1} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(p+1)t} \, d\sigma(t), \quad c_{-p-1} = \bar{c}_{p+1} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(p+1)t} \, d\sigma(t) \tag{31′}$$

а к системе (34) — уравнение $F^{(p+1)}(0) = (p+1)! \; c_{-p-1}$ (34′).

Как известно [1], система (31), (31′) имеет одно и только одно решение, которое получается следующим образом. Все корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+1}$ полинома (ортогонального полинома степени $p+1$)

$$Q_{p+1}(z \mid \varkappa) = \frac{D_{p-1}}{D_p} \begin{vmatrix} c_0, & c_1, & \ldots & c_p, & c_{p+1} \\ c_{-p}, & c_{-p+1}, & \ldots & & c_1 \\ & & \ldots & & \\ 1, & z, & \ldots & z^p, & z^{p+1} \end{vmatrix}$$

различны и лежат на единичной окружности $\alpha_j = e^{ia_j}$, $-\pi < a_1 < a_2 < \cdots a_{p+1} < \pi$. Решением системы (31), (31′) является кусочно-постоянная функция $\sigma_\varkappa(t)$, точки разрыва которой находятся в точках $\alpha_1, \ldots \alpha_{p+1}$, а скачки ρ_j, отвечающие этим точкам, определяются равенством

$$\rho_j = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{Q_{p+1}(e^{it} \mid \varkappa)}{(e^{it} - \alpha_j) \, Q'_{p+1}(\alpha_j \mid \varkappa)} \, d\sigma(t), \; \sigma \in \sum. \tag{37}$$

Заметим, что под знаком интеграла стоит полином степени p от e^{it}; интегрирование сводится к замене в нем каждой степени $e^{i\nu t}$ на c_ν.

Преобразуем теперь выражение для полинома $Q_{p+1}(z\,|\,\varkappa)$, пользуясь теоремой о минорах взаимного определителя и равенством (36). Получаем $Q_{p+1}(z\,|\,\varkappa) =$

$$= \frac{D_{p-1}}{D_p}\begin{vmatrix} c_0 & \ldots & c_p & \gamma_{p+1} \\ & \ldots & & \\ c_{-p} & \ldots & c_0 & c_1 \\ 1 & \ldots & z^p & z^{p+1} \end{vmatrix} + (-1)^{p+1}\begin{vmatrix} c_{-1} & \ldots & c_{p-1} \\ & & \\ c_{-p} & \ldots & c_0 \\ 1 & \ldots & z^p \end{vmatrix} =$$

$$= z\begin{vmatrix} c_0 & \ldots & c_p \\ c_{-p+1} & \ldots & c_1 \\ 1 & \ldots & z^p \end{vmatrix} - \varkappa\begin{vmatrix} c_0 & \ldots & c_{-p} \\ c_{p-1} & \ldots & c_{-1} \\ z^p & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, $Q_{p+1}(z\,|\,\varkappa) = T_p(z) - \varkappa U_p(z)$ (38), где

$$T_p(z) = z\begin{vmatrix} c_0, & \ldots & c_p \\ c_{-p+1}, & \ldots & c_1 \\ 1 & \ldots & z^p \end{vmatrix}, \quad U_p(z) = \begin{vmatrix} c_0, & \ldots & c_{-p} \\ c_{p-1}, & \ldots & c_{-1} \\ z^p & \ldots & 1 \end{vmatrix} \qquad (38')$$

Найдем теперь отвечающую выбранному c_{p+1} функцию $F_\varkappa(z) = F(z\,|\,\sigma_\varkappa)$:

$$F_\varkappa(z) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\sigma_\varkappa(t) = \frac{c_0}{2} - z\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\sigma_\varkappa(t)}{z-e^{it}} =$$

$$= \frac{c_0}{2} - \frac{z}{T_p(z)-\varkappa U_p(z)}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{T_p(z)-T_p(e^{it})-\varkappa\{U_p(z)-U_p(e^{it})\}}{z-e^{it}}\,d\sigma_\varkappa(t).$$

Получаем, что

$$F_\varkappa(z) = \frac{c_0}{2} - z\,\frac{R_p(z)-\varkappa S_p(z)}{T_p(z)-\varkappa U_p(z)}, \qquad (39)$$

где

$$R_p(z) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{T_p(z)-T_p(e^{it})}{z-e^{it}}\,d\sigma(t);\; S_p(z) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{U_p(z)-U_p(e^{it})}{z-e^{it}}\,d\sigma(t). \qquad (39')$$

Итак, для каждого $\varkappa$, $|\varkappa| = 1$, существует одно и только одно решение $F_\varkappa(z)$ системы (34), (34′), причем оно дается формулой (39).

3. Перейдем теперь к решению системы (34), пользуясь методом И. Шура [2] (см. также [3]).

Пусть $F(z)$ — произвольная функция, регулярная внутри единичного круга, имеющая там положительную вещественную часть

и удовлетворяющая уравнениям (34). Тогда функция $F_1(z)$, определяемая равенством

$$zF_1(z) = \frac{F(z) - \frac{c_0}{2}}{F(z) + \frac{c_0}{2}}, \qquad (40)$$

регулярна внутри единичного круга, удовлетворяет, в силу леммы Шварца, неравенству $|F_1(z)| \leqslant 1$ $(40_1')$, а также уравнениям $F_1^{(\nu)}(0) = a_{1\nu}$, $\nu = 0, 1, \ldots p-1$ $(40_1'')$, которые получаем, дифференцируя $\nu + 1$ раз равенство (40), полагая затем $z = 0$ и учитываем (34).

Обратно, каждая функция $F_1(z)$, удовлетворяющая всем перечисленным выше условиям, определяет при помощи равенства (40) некоторое решение системы (34).

Дальше находим при помощи равенства

$$\frac{F_1(z) - a_{10}}{1 - \bar{a}_{10}F_1(z)} = zF_2(z) \qquad (40_2)$$

функцию $F_2(z)$ и т. д.

Повторяя этот процесс, придем, наконец, к равенству

$$\frac{F_p(z) - a_{p0}}{1 - \bar{a}_{p0}F_p(z)} = zF_{p+1}(z), \qquad (40_{p+1})$$

причем для каждого решения $F(z)$ системы (34) отвечающая ему функция $F_{p+1}(z)$ регулярна внутри единичного круга и удовлетворяет неравенству $|F_{p+1}(z)| \leqslant 1$ $(40_{p+1}')$.

Обратно, каждая регулярная внутри единичного круга, удовлетворяющая там неравенству $(40_{p+1}')$, функция $F_{p+1}(z)$ определяет при помощи равенств (40_{p+1}), (40_p) ... (40_1) некоторое решение $F(z)$ системы (34).

Исключая из (40_1), ..., (40_{p+1}) промежуточные функции $F_1(z)$, ... $F_p(z)$ получаем

$$F(z) = \frac{A(z) + B(z)F_{p+1}(z)}{C(z) + D(z)F_{p+1}(z)}, \qquad (41)$$

где $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$, $D(z)$ — полиномы степени не выше $p+1$.

Полученное равенство устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством всех функций $F(z)$, регулярных внутри единичного круга, имеющих там положительную вещественную часть и удовлетворяющих системе уравнений (34), и множеством функций $F_{p+1}(z)$, регулярных в единичном круге и не превосходящих там по модулю единицы.

Присоединим к системе (34) уравнение (34′). Легко видеть, что все решения системы (34), (34′) по-прежнему описываются формулой (41), где $F_{p+1}(z)$ удовлетворяет кроме прежних еще одному условию

$$F_{p+1}(0) = a\bar{c}_{p+1} + b = a\bar{\varkappa} + a(\gamma_{p+1} + b), \qquad (40_{p+1}'')$$

где a и b — некоторые функции от c_0, $c_{\pm 1}$, ... $c_{\pm p}$.

Так как для каждого значения $\varkappa$, модуль которого равен 1, система (34), (34') имеет единственное решение, то из равенства $|\varkappa| = 1$ должно следовать равенство $|F_{p+1}(0)| = 1$. Отсюда $F_{p+1}(0) = \varkappa^{-1} E$, где E — некоторая функция от $c_0, c_{\pm 1}, \ldots c_{\pm p}$, $|\varkappa| = 1$. Сравнивая (39) и (41), получаем, что для всех $\varkappa$, $|\varkappa| = 1$ имеет место тождество

$$\frac{A(z) + B(z) E\varkappa^{-1}}{C(z) + D(z) E\varkappa^{-1}} = \frac{c_0}{2} - z\frac{R_p(z) - \varkappa S_p(z)}{T_p(z) - \varkappa U_p(z)},$$

откуда следует, что общее решение системы (34) может быть записано в виде

$$F(z) = \frac{c_0}{2} - z\frac{R_p(z)\varkappa(z) - S_p(z)}{T_p(z)\varkappa(z) - U_p(z)}, \tag{42}$$

где $\varkappa(z)$ — произвольная функция, регулярная внутри единичного круга и удовлетворяющая там неравенству $|\varkappa(z)| \leqslant 1$.

4. Формула (42) показывает, что для каждого z областью значений $F(z|\sigma)$, $\sigma \in \sum$ является некоторый круг. Определим радиус $\tilde{r}_p(z)$ этого круга. Чтобы упростить выкладки, предварительно преобразуем $F(z|\sigma)$ следующим образом:

$$F(z|\sigma) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\,d\sigma(t) = \frac{c_0}{2} - z^{p+1}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{z^{-p} - e^{-ipt}}{z - e^{it}}\,d\sigma(t) -$$

$$- z^{p-1}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\sigma(t)}{e^{ipt}(z - e^{it})}. \tag{43}$$

Обозначая $-z^{p+1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{d\sigma(t)}{e^{ipt}(z - e^{it})}$ через $G(z|\sigma)$, получаем из (43) что разность $F(z|\sigma) - G(z|\sigma)$ не зависит от выбора $\sigma \in \sum$, поэтому областью значений $G(z|\sigma)$ ьвляется, как и для $F(z|\sigma)$, круг радиуса $\tilde{r}_p(z)$. Легко видеть, что значения $G(z|\sigma)$ попадают на границу при $c_{p+1} = \gamma_{p+1} + \frac{D_p}{D_{p-1}}\varkappa$, $|\varkappa| = 1$, кроме того при этих значениях c_{p+1} функция $G(z|\sigma_\varkappa)$ является рациональной функ ией с знаменателем $T_p(z) - \varkappa U_p(z)$. Найдем функцию $G(z|\sigma_\varkappa)$. Имеем

$$G(z|\sigma_\varkappa) = -z^{p+1}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{e^{ipt}(z - e^{it})}\,d\sigma_\varkappa(t) =$$

$$= \frac{-z^{p+1}}{T_p(z) - \varkappa U_p(z)}\int_{-\pi}\frac{\{T_p(z) - T_p(e^{it})\} - \varkappa\{U_p(z) - U_p(e^{it})\}}{e^{ipt}(z - e^{it})} \times$$

$$\times\, d\sigma(t) = -z^{p+1}\frac{\bar{R}_p(z) - \varkappa\bar{S}_p(z)}{T_p(z) - \varkappa U_p(z)}, \tag{43'}$$

где

$$\tilde{R}_p(z)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{T_p(z)-T_p(e^{it})}{e^{ipt}(z-e^{it})}\,d\sigma(t),\quad \tilde{S}_p(z)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{U_p(z)-U_p(e^{it})}{e^{ipt}(z-e^{it})}\,d\sigma(t). \quad (43'')$$

В дальнейшем нам понадобятся значения $T_p(0)$, $U_p(0)$ и $\tilde{R}_p(0)$. Запишем их

$$R_p(0)=\int_{-\pi}^{\pi}\begin{vmatrix} c_0, & \dots & c_p \\ c_{-p+1} & \dots & c_1 \\ e^{-ipt} & \dots & 1 \end{vmatrix}\,d\sigma(t)=D_p,\ T_p(0)=0,\ U_p(0)=D_{p-1}. \quad (43''')$$

Из (43') и (43'') следует

$$\frac{\tilde{R}_p(z)-\varkappa\tilde{S}_p(z)}{T_p(z)-\varkappa U_p(z)}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\sigma_\varkappa(t)}{e^{ipt}(z-e^{it})}=\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{\nu=0}^{2p}\frac{e^{i\nu t}}{e^{ipt}z^{\nu-1}}+\frac{e^{i(p+1)t}}{z^{2p+1}(z-e^{it})}\right\}\times$$

$$\times\, d\sigma_\varkappa(t)=\frac{c_{-p}}{2}+\frac{c_{-p+1}}{z}+\cdots\frac{c_p}{z^{2p+1}}+\frac{1}{z^{2p+1}}\frac{A(z\,|\,\varkappa)}{Q_{p+1}(z\,|\,\varkappa)},$$

где $A(z\,|\,\varkappa)$ — полином степени не выше p. Отсюда получаем для двух различных значений $\varkappa'$ и $\varkappa''$ ($|\varkappa'|=|\varkappa''|=1$):

$$\frac{\tilde{R}_p(z)-\varkappa^{-1}\tilde{S}_p(z)}{T_p(z)-\varkappa^{-1}U_p(z)}-\frac{\tilde{R}_p(z)-\varkappa''\tilde{S}_p(z)}{T_p(z)-\varkappa''U_p(z)}=$$

$$=z^{-2p-1}\left\{\frac{A(z\,|\,\varkappa')}{T_p(z)-\varkappa' U_p(z)}-\frac{A(z\,|\,\varkappa'')}{T_p(z)-\varkappa'' U_p(z)}\right\}$$

или

$$\begin{vmatrix}\tilde{R}_p(z)-\varkappa'\tilde{S}_p(z) & \tilde{R}_p(z)-\varkappa''\tilde{S}_p(z)\\ T_p(z)-\varkappa' U_p(z) & T_p(z)-\varkappa'' U_p(z)\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{z^{2p+1}}\begin{vmatrix}A(z\,|\,\varkappa') & A(z\,|\,\varkappa'')\\ T_p(z)-\varkappa' U_p(z) & T_p(z)-\varkappa'' U_p(z)\end{vmatrix},$$

откуда видно, что определитель, стоящий в левой части, не зависит от z, и поэтому

$$\begin{vmatrix}\tilde{R}_p(z)-\varkappa'\tilde{S}_p(z) & \tilde{R}_p(z)-\varkappa''\tilde{S}_p(z)\\ T_p(z)-\varkappa' U_p(z) & T_p(z)-\varkappa'' U_p(z)\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}\tilde{R}_p(0)-\varkappa'\tilde{S}_p(0) & \tilde{R}_p(0)-\varkappa''\tilde{S}_p(0)\\ T_p(0)-\varkappa' U_p(0) & T_p(0)-\varkappa'' U_p(0)\end{vmatrix}$$

Теперь, в силу (43'')

$$\begin{vmatrix}\tilde{R}_p(z) & \tilde{S}_p(z)\\ T_p(z) & U_p(z)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\tilde{R}_p(0) & \tilde{S}_p(0)\\ T_p(0) & U_p(0)\end{vmatrix}=D_pD_{p-1}. \quad (44)$$

Вычислим $\tilde{r}_p(z)$. Так как $\tilde{r}_p(z)$ является радиусом окружности

$$y(z) = -z^{p+1}\frac{\tilde{R}_p(z) - \varkappa\tilde{S}_p(z)}{T_p(z) - \varkappa U_p(z)},$$

то

$$\tilde{r}_p(z) = \left| z^{p+1}\frac{\begin{vmatrix} \tilde{R}_p(z) & \tilde{S}_p(z) \\ T_p(z) & U_p(z) \end{vmatrix}}{|T_p(z)|^2 - |U_p(z)|^2} \right|. \tag{45}$$

Числитель этой дроби известен, для вычисления же знаменателя применим дважды к определителю

$$D_p(a, \bar{b}) = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & a & \dots & a^p \\ 1 & c_0 & c_1 & \dots & c_p \\ \bar{b} & c_{-1} & c_0 & \dots & c_{p-1} \\ \vdots & & & & \\ \bar{b}^p & c_{-p} & c_{-p+1} & \dots & c_0 \end{vmatrix}$$

теорему о минорах взаимного определителя. Имеем

$$D_{p-1}D_p(a, b) = a\bar{b}D_pD_{p-1}(a, \bar{b}) +$$
$$+\begin{vmatrix} 1 & a & a^p \\ c_{-1} & c_0 & c_p \\ c_{-p} & c_{-p+1} & c_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & c_1 & \dots & c_p \\ \bar{b} & c_0 & \dots & c_{p-1} \\ \bar{b}^p & c_{-p+1} & \dots & c_0 \end{vmatrix} \tag{46'}$$

и

$$D_{p-1}D_p(a, \bar{b}) = D_pD_{p-1}(a, \bar{b}) +$$
$$+\begin{vmatrix} 1, & a & \dots & a^p \\ c_0, & c_1 & \dots & c_{p+1} \\ c_{-p+1} & & \dots & c_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & c_0 & \dots & c_{p-1} \\ \bar{b} & c_{-1} & \dots & c_{p-2} \\ \bar{b}^p & c_{-p} & \dots & c_{-1} \end{vmatrix}, \tag{46''}$$

откуда

$$(1 - a\bar{b})\, D_{p-1}D_p(a, \bar{b}) =$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & \dots & a^p \\ c_{-1} & \dots & c_{p-1} \\ c_{-p} & \dots & c_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & c_1 & \dots & c_p \\ & & & \\ \bar{b}^p & c_{-p+1} & \dots & c_0 \end{vmatrix} -$$
$$-a\bar{b}\begin{vmatrix} 1 & \dots & a^p \\ c_0 & \dots & c_p \\ c_{-p+1} & \dots & c_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & c_0 & \dots & c_{p-1} \\ & & & \\ \bar{b}^p & c_{-p} & \dots & c_{-1} \end{vmatrix}. \tag{46}$$

Полагая в этом тождестве $a = b = z$, получаем $|T_p(z)|^2 - |U_p(z)|^2 = (|z|^2 - 1)\, D_{p-1}D_p(z, \bar{z})$. Последняя формула вместе с (44) и (45) дает

$$\tilde{r}_p(z) = \frac{|z|^{p+1}}{1 - |z|^2}\frac{D_p}{D_p(z;\ \bar{z})}. \tag{45}$$

5. Для дальнейшего нам понадобятся некоторые свойства определителя $D_p(a, \bar{b})$.

1°. Пусть $\psi(\lambda)$ — произвольная э. п. функция, а $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ — произвольная система различных вещественных чисел. Теорема о минорах взаимного определителя дает

$$-|\psi(\lambda_\nu-\lambda_\mu)|_{\mu,\nu=0}^{n}\begin{vmatrix}0 & a^{\lambda_\nu}\\ \bar{a}^{\lambda_\mu} & \psi(\lambda_\nu-\lambda_\mu)\end{vmatrix}_{\mu,\nu=0}^{n+1}=$$

$$=-|\psi(\lambda_\nu-\lambda_\mu)|_{\mu,\nu=0}^{n+1}\cdot\begin{vmatrix}0 & a^{\lambda_\nu}\\ \bar{a}^{\lambda_\nu}\psi(\lambda_\nu-\lambda_\mu)\end{vmatrix}+\left\|\frac{a^{\lambda_\nu}}{\psi(\lambda_\nu-\lambda_\mu)}\right|_{\mu,\upsilon=0}^{\substack{\mu=n\\ \nu=n+1}}\Bigg|_1^2,$$

откуда, если только $|\psi(\lambda_\nu-\lambda_\mu)|_{\mu,\nu=0}^{n+1}>0$, следует, что

$$\frac{-\begin{vmatrix}0 & a^{\lambda_\nu}\\ \bar{a}^{\lambda_\mu} & \psi(\lambda_\nu-\lambda_\mu)\end{vmatrix}_{\mu,\nu=0}^{n+1}}{|\psi(\lambda_\nu-\lambda_\mu|_{\mu,\nu=0}^{n+1}}\geqslant\frac{-\begin{vmatrix}0 & a^{\lambda_\nu}\\ \bar{a}^{\lambda_\mu} & \psi(\lambda_\nu-\lambda_\mu)\end{vmatrix}_{\mu,\nu=0}^{n}}{|\psi(\lambda_\nu-\lambda_\mu)|_{\mu,\nu=0}^{n}}$$

Повторным применением последнего неравенства получаем

$$\frac{D_{kp}(z, \bar{z})}{D_{kp}}\geqslant\frac{D_p(z^k, \bar{z}^k)}{D_p}, k=2, 3, \ldots . \tag{47}$$

2°. Повторным применением теоремы о минорах взаимного определителя получаем, обозначая через

$$P_k(z)=\frac{1}{\sqrt{D_{k-1}D_k}}\begin{vmatrix}c_0, & \ldots & c_k\\ c_{-k+1} & \ldots & c_1\\ 1 & \ldots & z^k\end{vmatrix}\quad \begin{matrix}D_{-1}=1.\\ k=0, 1, 2 \ldots,\end{matrix}$$

что

$$\frac{D_p(z_1, \bar{z}_2)}{D_p}=\sum_{k=0}^{p}P_k(z_1)\overline{P_k(r_2)}. \tag{48}$$

В силу неравенства Шварца справедлива оценка

$$\left|\frac{D_p(z_1, \bar{z}_2)}{D_p}\right|^2\leqslant\frac{D_p(z_1, \bar{z}_1)}{D_p}\,\frac{D_p(z_2, \bar{z}_2)}{D_p}. \tag{48¹}$$

3°. Так как все корни каждого из полиномов $P_k(z)$ лежат в единичном круге, то если $1\leqslant|z_1|<|z_2|$, то

$$\frac{D_p(z_1, \bar{z}_1)}{D_p}<\frac{D_p(z_2, \bar{z}_2)}{D_p}. \tag{49}$$

4°. Полином

$$H_p(z\,|\,\alpha)=(z-\alpha)D_p(z, \bar{\alpha}),\ |\alpha|=1,$$

как легко проверить, является ортогональным полиномом степени $p+1$ с одним из корней в точке α. Имеет место тождество

$$T_p(z)\,U_p(\alpha) - T_p(\alpha)\,U_p(z) = \alpha^p D_{p-1} H_p(z\,|\,\alpha). \tag{50}$$

5°. Пусть $g_{p-1}(z) = a_0 z^{p-1} + a_1 z^{p-2} + \cdots + a_{p-1}$ — произвольный полином степени $p-1$, а z_0 — произвольное комплексное число, тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_p(e^{it}, \bar z_0) - (e^{it} - z_0)\, g_{p-1}(e^{it})|^2\, d\sigma(t) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |D_p(e^{it}, \bar z_0)|^2\, d\sigma(t) + \int_{-\pi}^{\pi} |(e^{it} - z_0)\, g_{p-1}(e^{it})|^2\, d\sigma(t) -$$

$$-2\,\mathrm{Re} \int_{-\pi}^{\pi} D_p(e^{it}, \bar z_0)\, \overline{(e^{it} - z_0)\, g_{p-1}(e^{it})}\, d\sigma(t) \geqslant$$

$$\geqslant \int_{-\pi}^{\pi} |D_p(e^{it}, \bar z_0)|^2\, d\sigma(t) = D_p D_p(z_0, \bar z_0).$$

Мы воспользовались тем, что третий интеграл второй части равен нулю. Отсюда следует, что для любого полинома $g_p(z)$ степени p имеет место неравенство

$$|g_p(z_0)|^2 \leqslant \frac{D_p(z_0, \bar z_0)}{D_p} \int_{-\pi}^{\pi} |g_p(e^{it})|^2\, d\sigma(t). \tag{51}$$

6°. Пусть тригонометрический полином степени p $h_p(z) = \sum_{\nu=-p}^{p} a_\nu e^{i\nu z}$ принимает на вещественной оси неотрицательные значения, тогда

$$h_p(z) = \sum_{\nu=0}^{p} b_\nu e^{i\nu z} \sum_{\mu=0}^{p} \bar b_\mu e^{-i\mu z},$$

причем на вещественной оси

$$\Big|\sum_{\nu=0}^{p} b_\nu e^{i\nu z}\Big|^2 = \Big|\sum_{\mu=0}^{p} \bar b_\mu e^{-i\mu z}\Big|^2.$$

Неравенство (51) позволяет заключить, что в этом случае

$$|h_p(z)| \leqslant \frac{\sqrt{D_p(e^{iz}, e^{-iz})\, D_p(e^{-i\bar z}, e^{i\bar z})}}{D_p} \int_{-\pi}^{\pi} h_p(t)\, d\sigma(t). \tag{52}$$

7°. Максимальная масса $\rho_p(a)$, которая может быть сосредоточена в точке a, лежащей на вещественной оси, определяется

по формуле (37), которая после замены $Q_{p+1}(e^{it}|\varkappa)$ на $H_p(z|\alpha)$, где $\alpha = e^{ia}$, дает

$$\rho_p(a) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{H_p(e^{it}|\bar{\alpha})\, d\sigma(t)}{(e^{it}-\alpha)\, H_p'(\alpha|\bar{\alpha})} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{D_p(e^{it}, \bar{\alpha})}{D_p(\alpha, \bar{\alpha})}\, d\sigma(t) = \frac{D_p}{D_p(\alpha, \bar{\alpha})}. \quad (53)$$

8°. Пусть γ, δ — два различных числа, модули которых равны 1; α — один из корней полинома $Q_{p+1}(z|\gamma)$, а β — один из корней полинома $Q_{p+1}(z|\delta)$. Тогда, как следует из (50) и (46),

$$|F_\gamma(z) - F_\delta(z)| = |G_\gamma(z) - G_\delta(z)| =$$

$$= \left| z^{p+1} \frac{D_p[T_p(\alpha)\, U_p(\beta) - T_p(\beta)\, U_p(\alpha)]}{D_{p-1} H_p(z|\alpha)\, H_p(z|\beta)} \right| = \left| z^{p+1} \frac{D_p H_p(\alpha|\bar{\beta})}{H_p(z|\alpha)\, H_p(z|\beta)} \right|.$$

Мы получили важное для дальнейшего равенство

$$|F_\gamma(z) - F_\delta(z)| = \left| z^{p+1} \frac{D_p H_p(\alpha|\beta)}{H_p(z|\alpha)\, H_p(z|\beta)} \right|. \quad (54)$$

IV. Продолжение непрерывных э. п. функций

1. Основной задачей этого раздела является нахождение условий, необходимых и достаточных для того, чтобы уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} d\sigma(t) = \psi(x), \quad (55)$$

где $\psi(x)$ — непрерывная функция, э. п. в интервале $(-1, 1)$, имело только одно решение (или, как говорят, чтобы имел место определенный случай).

Известно, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{z-t}$, где $\sigma(t)$ — любая ограниченная неубывающая функция, определяет аналитические функции, вообще говоря, не являющиеся аналитическим продолжением друг друга. Одна из них регулярна в верхней полуплоскости, а другая в нижней. Чтобы упростить обозначения, обе эти функции будем обозначать одним образом $w(z|\sigma)$. Известно, что из равенства $w(z|\sigma_1) = w(z|\sigma_2)$ следует $\sigma_1(t) = \sigma_2(t)$. Как всегда σ_1 и σ_2 предполагаются непрерывными справа и удовлетворяющими условию $\sigma_1(-\infty) = \sigma_2(-\infty) = 0$.

Задача исследования множества Σ_ψ сводится к исследованию множества $\{w(z|\sigma)\}$, $\sigma \in \Sigma_\psi$.

Рассмотрим последовательность системы чисел $\left\{\psi\left(\frac{n}{p}\right)\right\}_{n=-p}^{p}$ $p = 1, 2, \ldots$ Так как $\psi(x)$ — э. п. в $(-1, 1)$ то имеют место неравенства

$$\Delta_n^{(p)} = \left| \psi\left(\frac{\nu-\mu}{p}\right) \right|_{\mu, \nu=0}^{n} \quad n = 0, 1, \ldots p, \ p = 1, 2, \ldots$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением того случая, когда выполнены условия $\Delta_n^{(p)} > 0$, $n = 0, 1, \ldots$ $p = 1, 2, \ldots$ **(56)**. В противном случае единственность продолжения очевидна.

Для каждого p существует множество Σ_p неубывающих на $[-p\pi, p\pi]$ функций $\sigma(t)$, являющихся решениями системы уравнений

$$\int_{-p\pi}^{p\pi} e^{it\frac{\nu}{p}} d\sigma(t) = \dot{\psi}\left(\frac{\nu}{p}\right), \quad \nu = 0, \pm 1, \ldots \pm p. \tag{57}$$

Множество э. п. функций $\psi_p(x|\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} d\sigma(t)$, $\sigma \in \Sigma_p$, $p = 1, 2, \ldots$ равностепенно непрерывно в точке нуль. Поэтому, как следует из замечания c раздела II, к сходящимся в основном последовательностям элементов множества $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \cdots$ можно применить вторую теорему Хелли.

В дальнейшем для простоты будем считать, что $\psi(0) = 1$.

2. Перейдем теперь к исследованию множества (очевидно выпуклого и замкнутого $\boldsymbol{R}(z) = \{w(z|\sigma)\}$, $\sigma \in \Sigma_\psi$, $z = x + iy$ — некоторая фиксированная точка верхней полуплоскости.

Имеем очевидное тождество

$$w(z|\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{z - t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\zeta - \tau_p}{z - t} - \frac{i}{p}\zeta_p}{\zeta_p - \tau_p} d\sigma(t) + \frac{i}{p}\zeta_p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{\zeta_p - \tau_p},$$

где $\zeta_p = e^{\frac{iz}{n}}$, $\tau_p = e^{\frac{it}{p}}$.

Обозначая первое слагаемое правой части через $u_p(z|\sigma)$, а второе — через $v_p(z|\sigma)$, получаем $w(z|\sigma) = u_p(z|\sigma) + v_p(z|\sigma)$ **(58)**. Легко видеть, что с неограниченным увеличением p, $u_p(z|\sigma)$ стремится к нулю, равномерно относительно всех $\sigma \in \Sigma_1 + \Sigma_2 + \cdots$ следовательно, существует последовательность $\{\varepsilon_p\}$, $\lim \varepsilon_p = 0$ такая, что $|u_p(z|\sigma)| < \varepsilon_p$, $\sigma \in \Sigma_1 + \Sigma_2 + \cdots$ (59)

Так как τ_p — периодическая функция от t, то для любой ограниченной неубывающей функции $\sigma(t)$ имеет место равенство

$$v_p(z|\sigma) = \int_{-p\pi}^{p\pi} \frac{d\sigma^*(t)}{\zeta_p - \tau_p},$$

где $\sigma^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{\sigma(2np\pi + t) - \sigma(2np\pi - p\pi)\}$, $|t| \leqslant p\pi$, поэтому $\{v_p(z|\sigma)\}_{\sigma \in \Sigma_\psi} \subseteq \{v_p(z|\sigma)\}_{\sigma \in \Sigma_p}$ **(59′)**.

Из предыдущего раздела известно, что $\{w(z|\sigma)\}\ \sigma\in\Sigma_p$ является *кругом, радиус которого, определяющийся по формуле* (45), есть

$$\bar{r}_p(z)=\frac{|\zeta_p^{p+1}|}{p(1-|\zeta_p|^2)}\cdot\frac{1}{\Delta_p(z;\ \bar{z})},\tag{60}$$

где $\Delta_p(a,\ b)=\dfrac{-\left|\begin{array}{c:c} 0 & e^{i\frac{a}{p}\nu} \\ \hdashline e^{i\frac{b}{p}\mu} & \psi\left(\frac{\nu-\mu}{p}\right)\end{array}\right|^p_{\mu,\ \nu=0}}{\Delta_p^{cp}}$.

Из (59) и (59′) следует:

а) множество $\{w(z|\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma_\psi}$ с точностью до ε_p покрывается кругом $\{v_p(z|\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma_p}$.

Выберем теперь произвольную сходящуюся последовательность точек $\{v_{p_n}(z|\sigma_{p_n})\}$; $\sigma_{p_n}\in\Sigma_{p_n}$; $\lim v_p(z|\sigma_n)=v_0$. Из последовательности $\{\sigma_{p_n}\}_n$ выберем сходящуюся в основном подпоследовательность $\{\sigma_{p_n'}\}_n$; предельную функцию обозначим через σ_0. Последовательность $\{\psi_{p_n'}(x|\sigma_{p_n'})\}_n$ равномерно в $[-1,\ 1]$ сходится к $\psi(x)$, поэтому, пользуясь сделанным выше замечанием о применимости второй теоремы Хелли, имеем

$$\psi(x)=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}\,d\sigma_{p_n'}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}\,d\sigma_0(t)\quad |x|\leqslant 1,$$

т. е. $\sigma_0\in\Sigma_\psi$, откуда следует, что $v_0\in\{w(z|\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma_0}$.

Таким образом, получено

б) Все предельные точки каждой последовательности $\{v_p(z|\sigma_p)\}_p$ $\sigma_p\in\Sigma_p$ принадлежат $\{w(z|\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma_\psi}$. Из *а* и *б* следует, что круги $\{v_p(z|\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma_p}$ стремятся к некоторому предельному кругу, совпадающему с $\{w(z|\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma_\psi}$. Радиус этого круга получается предельным переходом из (60):

$$r(z)=\frac{\rho(z)}{2\,\mathrm{Im}\,z e^{\mathrm{Im}\,z}},\tag{61}$$

где

$$\rho(z)=\lim_{p\to\infty}\frac{1}{\Delta_p(z,\ \bar{z})}.\tag{61′}$$

Существование этого предела доказано предыдущими рассуждениями.

Формула (61) выведена в предположении, что z лежит в верхней полуплоскости, однако из равенства $w(\bar{z}|\sigma)=\overline{w(z|\sigma)}$ и легко проверяемого тождества $\Delta_p(z,\ \bar{z})=e^{-\mathrm{Im}\,z}\Delta_p(\bar{z},\ z)$, (62′)
переходящего в пределе в

$$\frac{e^{y}}{\rho(x+iy)}=\frac{e^{-y}}{\rho(x-iy)},\tag{62}$$

следует, что формула (61) остается справедливой и для точек нижней полуплоскости.

3. **Теорема 7.** *В неопределенном случае функция $\rho(z)$ в каждой ограниченной области ограничена снизу некоторым положительным числом.*

Доказательство. Допустим противное: пусть существует неограниченная последовательность $z_1, z_2, \ldots,$ такая что $\lim \rho(z_n) = 0$. Заменяя, если это нужно, z_n через $\bar{z}_n$, мы получим неограниченную последовательность $z_1^*, z_2^*, \ldots$ точек нижней полуплоскости, причем в силу (62) по-прежнему $\lim \rho(z_n^*) = 0$.

Пусть z_0^* — предельная точка последовательности $z_1^*, z_2^*, \ldots$ Обозначим через S_n отрезок, соединяющий точки $z_n^* - i$ и $\operatorname{Re} z_n - iL$, где $L = 2 + \sup|\operatorname{Im} z_n^*|$.

Пусть далее $w_1(z)$ и $w_2(z)$ — две различные функции семейства $\{w(z|\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma_\psi}$. В силу (49) и (61) имеем $|w_1(z) - w_2(z)| < \rho(z_n^*)$, $z \in S_n$ откуда $w_1(z) - w_2(z) = 0$, $z \in S_0$. Следовательно, $w_1(z) \equiv \equiv w_2(z)$, что противоречит выбору $w_1(z)$ и $w_2(z)$.

4. **Теорема 8.** *Если имеет место определенный случай, то функция $\rho(z)$ равна нулю всюду, за исключением быть может, счетного множества точек вещественной оси.*

Доказательство. Для точек, не лежащих на вещественной оси, это очевидно. Пусть x — точка вещественной оси. Для каждого p можем найти кусочно-постоянную функцию $\sigma_p(t)$, одна из точек роста которой находится в x, причем скачок в этой точке равен $\rho_p(x)$. Из последовательности $\{\sigma_p(t)\}$ выберем сходящуюся в основном подпоследовательность; тогда предельная функция будет иметь в точке x скачок, не меньший $\rho(x)$. Так как предельная функция единственна, а функция ограниченной вариации может иметь не более счетного множества точек разрыва, то существует не более счетного множества значений x, для которых $\rho(x) \neq 0$. Более того, имеет место неравенство $\sum_x \rho(x) \leqslant \leqslant \sigma(+\infty) - \sigma(-\infty) = \psi(0) = 1$.

5. Во всем дальнейшем будем предполагать, что имеет место неопределенный случай.

Пусть K_n обозначает круг радиуса n с центром в точке 0. Тогда функция $\rho^{-1}(z)$, как следует из теоремы 7, ограничена в K_n; далее из неравенства (47) следует, что $\rho(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n(z) = \lim\limits_{k\to\infty} \rho_{kp}(z) \leqslant \rho_p(z)$. Поэтому множество функций $\rho_p^{-1}(z) = \Delta_p(z, \bar{z})$, $p = 1, 2, \ldots$ равномерно ограничено в K_n. Неравенство (48′) дает $|\Delta_p(z, a)| \leqslant \sqrt{\Delta_p(z, \bar{z})\,\Delta_p(\bar{a}, a)}$. Отсюда следует, что последовательность $\{\Delta_p(z, a)\}_{p=1, 2, \ldots}$ (63) целых функций от двух переменных z и a равномерно ограничена в K_n, и поэтому из любой подпоследовательности последовательности (63) можно выделить часть, сходящуюся (равномерно в каждом K_n) к некоторой целой

функции, но последовательность (63) сходится при $a = \bar{z}$. Так как для множества всех точек $(z, \bar{z})$ четырехмерного пространства точка (0, 0) является предельной точкой бесконечного порядка, то мы можем применить теорему Витали.

Таким образом, мы получили следующий результат.

Последовательность функций от двух переменных $\{\Delta_p(z, a)\}$ *сходится равномерно относительно обеих переменных в каждой ограниченной области, к некоторой целой функции.*

Эту предельную функцию обозначим через $\Delta(z, a)$.

6. Пусть a — фиксированное вещественное число. В каждом классе Σ_p, $p = 1, 2, \ldots$ имеется одна и только одна неубывающая функция $\sigma_p^{(a)}(t)$, отвечающая граничному значению $v_p(z)$, одна из точек роста которой находится в точке a; $\sigma_p^{(a)}(t)$ кусочно-постоянна и все ее точки роста лежат в интервале $(-p\pi, p\pi)$ и совпадают с корнями $a_{p,0} = a$, $a_{p,1}$, $\ldots$ a_{pp} периодического полинома $H_p(z|a) = -ip(\zeta_p - \alpha_p)\Delta_p(z, a)$, причем скачки определяются равенством $\sigma_p^{(a)}(a_{p_j}) - \sigma_p^{(a)}(a_{p_j} - 0) = \rho_p(a_{p_j})$ $j = 0, 1, 2 \ldots p$.

Так как последовательность $\{H_p(z|a)\}$ сходится (равномерно на каждом ограниченном множестве) к целой функции $H(z|a) = (z - a)\Delta(z, a)$, а $\lim\limits_{p\to\infty}\rho_p(z) = \rho(z)$ и, кроме того, $\rho(z)$ — непрерывная функция от z, то последовательность $\{\sigma_p^{(a)}(t)\}$ сходится в основном к кусочно-постоянной функции $\sigma^{(a)}(t)$, определенной следующим образом.

1. Точки роста $a_0 = a$, a_1, $\ldots$ функции $\sigma^{(a)}(t)$ совпадают с нулями (они все вещественны) целой функции $H(z|a)$.

2. Величина скачка в каждой из точек роста определяется равенством $\sigma^{(a)}(a_j) - \sigma^{(a)}(a_j - 0) = \rho(a_j)$.

Выше было доказано, что $\sigma^{(a)}(t) \in \Sigma_\psi$ и $w(z|\sigma^{(a)}) = \lim v_p(z|\sigma_p)$ при каждом z, $\operatorname{Im} z \neq 0$. Из теоремы Витали теперь следует, что последовательность $\{v_p(z|\sigma_p^{(a)})\}$ $p = 1, 2, \ldots$ сходится к $w(z|\sigma^{(a)})$ равномерно в каждой ограниченной замкнутой области, не заключающей точек a_0, a_1, $\ldots$. Но

$$v_p(z|\sigma_p^{(a)}) = \frac{G_p(z|a)}{H_p(z|a)},$$

где

$$G_p(z|a) = \frac{i}{p}\zeta_p \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{H_p(z|a) - H_p(t|a)}{\zeta_p - \tau_p}\, d\sigma(t).$$

Поэтому последовательность $\{G_p(z|a)\}$ сходится равномерно в каждой ограниченной области; предельная функция $G(z|a)$, очевидно, является целой функцией от z.

Таким образом, каждая граничная функция $w(z\,|\,\sigma^{(a)})$ является отношением двух целых функций

$$w(z\,|\,\sigma^{(a)}) = \frac{G(z\,|\,a)}{H(z\,|\,a)}. \tag{64}$$

7. Перейдем к оценке роста $H(z\,|\,a)$. Пусть $z = x - iy$ произвольная точка нижней полуплоскости. Выберем два произвольных вещественных числа a и b, таких что $H(a,\,b) \neq 0$. Из (54) получаем

$$|v_p(z\,|\,a) - v_p(z\,|\,b)| = \left| \zeta_p^{p+1} \frac{H_p(a,\,b)}{H_p(z\,|\,a)\,H_p(z\,|\,b)} \right|,$$

откуда при помощи (48′) и (45) следует двойное неравенство

$$\left| \frac{2\zeta_p^{p+1}\rho_p(z)}{p\,(|\zeta_p|^2 - 1)} \right| \geqslant \left| \frac{\zeta_p^{p+1} H_p(a\,|\,b)}{H_p(z\,|\,a)\,H_p(z\,|\,b)} \right| \geqslant$$
$$\geqslant \left| \frac{\zeta_p^{p+1} H_p(a\,|\,b)\,\rho_p(z)\sqrt{\rho_p(a)\,\rho_p(b)}}{p^2(\zeta_p - \alpha_p)(\zeta_p - \beta_p)} \right|.$$

Теперь, в силу очевидных неравенств $\rho_p(x - iy) < 1$ и $p(e^{\frac{2y}{p}} - 1) = 2ye^{\frac{2\theta y}{p}} > 2y\,(0 < \theta < 1)$, следует, что для всех $z = x - iy$ из нижней полуплоскости имеют место неравенства

$$C_1 y < C_2 \frac{p\,(|\zeta_p|^2 - 1)}{2\rho_p(z)} < |E_p(z)| < C_3 p^2 \frac{|(\zeta_p - \alpha_p)(\zeta_p - \beta_p)|}{\rho_p(z)} \quad (p > p_0), \tag{65}$$

где $E_p(z) = H_p(z\,|\,a)\,H_p(z\,|\,b)$, p_0, C_1, C_2, C_3 — некоторые положительные константы.

Пусть $y > C^{-1}$, тогда

$$\ln|E_p(x - iy)| > \ln\{C_2 p\,(|\zeta_p|^2 - 1)\,\Delta_p(x - iy,$$
$$x + iy)\} > \ln C_1 y > 0. \tag{66}$$

Все нули функции $E_p(z)$ лежат на вещественной оси, и, кроме того, функция $e^{-2iz}E_p(z)$ ограничена в нижней полуплоскости. Поэтому формула Коши дает

$$\ln|e^{-2y-2}\,E_p(-i - iy)| = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|e^{-2y}E_p(t - iy)|}{1 + t^2}\,dt$$

или

$$\ln|E_p(-i - iy)| - 2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|E_p(t - iy)|}{1 + t^2}\,dt.$$

Левая часть этого равенства остается ограниченной для $p=1, 2, \ldots$, поэтому существует такое положительное число M, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|\Delta_p(t-iy, t+iy)|}{1+t^2} dt < M, \quad p=1, 2, \ldots,$$

отсюда в силу (65) существует такое $M_1>0$, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|\Delta_p(t-iy, t+iy)|}{1+t^2} dt < M_1, \quad p>p_0. \tag{67}$$

Так как подынтегральная функция в (67) положительна и не убывает с ростом p, то возможен предельный переход под знаком интеграла, в результате чего мы получаем сходимость интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|\Delta(t-iy, t+iy)|}{1+t^2} dt. \tag{68}$$

Последний результат установлен в предположении, что $y>c_1^{-1}$, однако он справедлив и при $y \geqslant 0$, так как $\Delta(t-iy, t+iy)$ — неубывающая функция от y, $y \geqslant 0$.

Из (65) имеем при фиксированном y

$$|E_p(x-iy)| < C_3\Delta_p(x-iy, x+iy)\left|p\left(e^{\frac{y+ix}{p}}-e^{i\frac{a}{p}}\right)\right| \cdot$$

$$\cdot \left|p\left(e^{\frac{y+ix}{p}}-e^{\frac{ib}{p}}\right)\right| = C_3\Delta_p(x-iy, x+iy) \times$$

$$\times \left|(y+ix-ia)\, e^{\frac{ia}{p}} e^{\theta_1 \frac{y+ix-ia}{p}} (y+ix-ib)\, e^{\frac{ib}{p}} e^{\theta_2 \frac{y+ix+ib}{p}}\right| <$$

$$< C_3\Delta_p(x-iy, x+iy)\,|(y+ix-a)(y+ix-b)| <$$

$$< (Ax^2+B)\,\Delta_p(x-iy, x+iy), \quad p>p_0, \quad -\infty<x<\infty,$$

где A, B — достаточно большие положительные числа.

Применяя снова формулу Коши, получаем для $y>1$

$$\ln|e^{-2y}E_p(x-iy)| = \frac{y-1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|e^{-2}E_p(t-i)|}{(t-x)^2+(y-1)^2} dt <$$

$$< \frac{y-1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\Delta(t-i, t+i)+\ln(At^2+B)-2}{(t-x)^2+(y-1)^2} dt. \tag{69}$$

Пусть тепер точка $z=x-iy$ лежит внутри угла $\{\theta\}$, образованного двумя лучами, выходящими из точки $-i$ и составляющими с положительным направлением вещественной оси углы $-\pi$ и $\pi+\theta$, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$. Для всех точек рассматриваемого угла

имеет место очевидное неравенство $(t-x)^2+(y-1)^2 \geqslant t^2 \sin^2\theta$, следовательно, для $|t| \geqslant 1$ $(t-x)^2+(y-1)^2 \geqslant 1/2\,(1+t^2)\sin^2\theta = c(1+t^2)$. Из (69) для $T>1$ получаем

$$\ln|e^{-2y}E_p(x-iy)| < \frac{y-1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\ln\Delta(t-i,\ t+i)+\ln(At^2+B)-2}{(y-1)^2}\,dt+$$

$$+\frac{y-1}{\pi}\left\{\int_{-\infty}^{-T}+\int_{T}^{\infty}\frac{\ln\Delta(t-i,\ t+i)+\ln(At^2+B)-2}{C(1+t^2)}\,dt.\right. \tag{70}$$

Из сходимости интеграла (68) следует, что T может быть выбрано настолько большим, что второе слагаемое правой части (70) будет меньше, чем $\frac{\varepsilon_1 y}{2}$, где ε_1 — произвольное положительное число; после этого выберем y настолько большим, чтобы и первое слагаемое удовлетворяло тому же неравенству. Итак, для всех точек $z \in \{\theta\}$ при достаточно большом y, или, что то же самое, при достаточно большом $|z|$ имеет место неравенство $\ln|e^{-2y}E_p(x-iy)| < \varepsilon_1 y$, $p > p_0$. Отсюда в силу (66) получаем $\ln\Delta(x-iy,\ x+iy) < (2+\varepsilon)|y|$, $|z| > E_\varepsilon$, $z \in \{\theta\}$ **(71).**

Пусть теперь $z = x-iy$ — точка нижней полуплоскости, не принадлежащая $\{\theta\}$; положим $z_1 = x - i(1+x\operatorname{tg}\theta)$, тогда

$$\begin{aligned}\ln\Delta(z,\ \bar z) \leqslant \ln\Delta(z_1,\ \bar z_1) \leqslant (2+\varepsilon)(1+x\operatorname{tg}\theta) \leqslant\\ \leqslant (2+\varepsilon)(1+|z|\operatorname{tg}\theta),\end{aligned} \tag{72}$$

причем это неравенство во всяком случае имеет место для $|z| > N_\varepsilon$. Выбрав угол $\{\theta\}$ достаточно малым, мы можем сделать коэффициент при $|z|$ в (72) сколь угодно малым.

Замечая, что перенос вершины угла $\{\theta\}$ из точки $-i$ в точку 0 не вносит существенных изменений в неравенство (72), и пользуясь тождеством (62), заключаем, что справедлива

Теорема 9. *Для любого положительного числа* δ *существуют такие константы* $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$, A, B *и такая функция* $\varepsilon(r)$ $(\lim\varepsilon(r)=0)$, *что имеют место следующие неравенства:*

$$\begin{aligned}
&\Delta(z,\ \bar z) < Ae^{\operatorname{Im} z\,\varepsilon(|z|)} && \text{для } \theta \leqslant \arg z \leqslant \pi-\theta,\\
&\Delta(z,\ \bar z) < Be^{\delta|z|} && \text{для } -\theta \leqslant \arg z \leqslant 0 \text{ и}\\
& && -\pi-\theta \leqslant \arg z \leqslant \pi+\delta,\\
&\Delta(z,\ \bar z) < Ae^{-\operatorname{Im} z\{|z|+\varepsilon|z|\}} && \text{для } \pi+\theta \leqslant \arg z \leqslant 2\pi-\theta.
\end{aligned} \tag{73}$$

Применяя неравенство $|\Delta(z;\ a)| \leqslant \sqrt{\Delta(z,\ \bar z)\,\Delta(a,\ \bar a)}$ (a — любое комплексное число) и предыдущую теорему, получаем:

Теорема 10. *Функции* $\Delta(z,\ \bar u)$ *и* $H(z\,|\,a)$ *являются целыми функциями экспоненциального типа, не высшего единицы.*

8. Теорема 11. *Пусть для функции* $\psi(x)$, $|x| \leqslant 1$ *имеет место неопределенный случай проблемы продолжения,* $y(t)$ — *ограничен-*

ная непрерывная функция. Если интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} y(t)\, d\sigma(t)$ *имеет одно и то же значение для всех* $\sigma \in \Sigma_\psi$, *то существует целая функция экспоненциального типа не высшего единицы, совпадающая на вещественной оси с* $y(t)$.

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что yt вещественная функция. Как следует из сказанного в п. 6, 7 раздела II, существуют последовательности $\{\boldsymbol{x}_n'(t)\}$ и $\{\boldsymbol{x}_n''(t)\}$ периодических полиномов с рациональными показателями Фурье такие, что

1°. $\boldsymbol{x}_n'(t) \leqslant \boldsymbol{x}_n''(t)$, $-\infty < t < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$

2°. $\boldsymbol{x}_n(t) \leqslant y(t) \leqslant \boldsymbol{x}_n''(t)$, $|t| < n$, $n = 1, 2, \ldots$

3°. $\boldsymbol{x}_n'(t) \leqslant \sup y(t)$; $\boldsymbol{x}_n''(t) \geqslant \inf y(t)$, $n = 1, 2, \ldots$

4°. $\lim f(\boldsymbol{x}_n') = \lim f(\boldsymbol{x}_n'')$.

Неравенство (52) дает

$$|\sup y(t) - \boldsymbol{x}_n'(z)| \leqslant [\sup y(t) - f(\boldsymbol{x}_n')] \sqrt{\Delta(z, \bar{z})\, \Delta(-z, -\bar{z}} < \\ < C\sqrt{\Delta(z, \bar{z})\, \Delta(-z, -\bar{z})}, \tag{74}$$

$$|\boldsymbol{x}_n''(z) - \inf y(t)| \leqslant [f(\boldsymbol{x}_n'') - \inf y(t)] \sqrt{\Delta(z, \bar{z})\, \Delta(-z, -\bar{z})} < \\ < C\sqrt{\Delta(z, \bar{z})\, \Delta(-z, -\bar{z})}. \tag{74'}$$

Из полученных неравенств следует, что обе последовательности $\{\boldsymbol{x}_n'(z)\}$, $\{\boldsymbol{x}_n''(z)\}$ равномерно ограничены в каждой ограниченной области. Поэтому из каждой из них можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся в каждой ограниченной области. Пусть $\boldsymbol{x}_{jn}''(z) \Rightarrow \boldsymbol{x}''(z)$, $\boldsymbol{x}_{jn}'(z) \Rightarrow \boldsymbol{x}'(z)$. Из неравенства (74) следует, что $\boldsymbol{x}'(z)$ и $\boldsymbol{x}''(z)$ — целые функции экспоненциального типа, не выше единицы.

Далее имеем

$$|\boldsymbol{x}_{jn}''(z) - x_{jn}'(z)| \leqslant [f(\boldsymbol{x}_{jn}'' - f\,\boldsymbol{x}_{jn}')] \sqrt{\Delta(z, \bar{z})\, \Delta(-z, -\bar{z})},$$

откуда следует $\lim \boldsymbol{x}_{jn}'(z) = \lim \boldsymbol{x}_{jn}''(z)$, т. е. $\boldsymbol{x}''(z) = \boldsymbol{x}'(z)$, но так как $\boldsymbol{x}_n'(t) \leqslant y(t) \leqslant \boldsymbol{x}_n''(t)$, $|t| < n$, $n = 1, 2, \ldots$, то имеем место тождество.

Теорема доказана. Из нее вытекает

Следствие. Пусть $\psi(x)\,(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ э. п. непрерывная неоднозначно продолжаемая функция, а $\{\tilde{\varphi}(x)\}$ — совокупность всех э. п. продолжений $\psi(x)$ из интервала $[-1, 1]$ на всю ось. Тогда для любой вещественной точки $x_0 \bar{\in} [-1, 1]$ множество $\{\tilde{\varphi}(x_0)\}$ состоит более, чем из одной точки.

Действительно, если бы для некоторой вещественной точки $x_0 \bar{\in} [-1, 1]$ множество $\{\tilde{\varphi}(x_0)\}$ состояло бы из одной точки, но так как $\psi(x_0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx_0}\, d\sigma(t)$ $\forall \sigma \in \Sigma_\psi$ по теореме 11 функция e^{itx_0} была бы целой функцией экспоненциального типа, не большего единицы, в то время как ее тип равен $|x_0| > 1$.

Список литературы: 1. *Ахиезер Н. И., Крейн М. Г.* О некоторых вопросах теории моментов. НТИ Украина (ДНТВУ), Харьков, 1938.—255 с. 2. *Schur J.* Über Potenzreihen die im Jnnern des Einheitskreises beschränkt sind.— Journ. für Mathematik, 1918, Bd. 147, S. 205—232, Bd. 148, S. 122—145. 3. *Nevanlinna R.* Über beschränkte analytische Funktionen.— Ann. Akad. Sci. Fennicae Ser. A, 1929, 32, № 7, S. 40—75.

Поступила в редколлегию 04.10.82.

УДК 517. 946

И. Ю. ЧУДИНОВИЧ

ОСРЕДНЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОБЛАСТЯХ С ПУСТОТАМИ

1. Общая теорема об осреднении

В работе предложен способ осреднения самосопряженных краевых задач для эллиптических систем уравнений произвольного порядка в областях с большим числом мелких пустот. Такие системы, в частности, описывают густоперфорированные среды и протекающие в них физические процессы в рамках линейной теории упругости, линейной теории оболочек. Методам осреднения краевых задач в областях с мелкозернистой границей посвящено большое число работ. Отошлем читателя к [1—2] и имеющейся там библиографии. Отметим, наконец, что с изучаемой задачей тесно связаны вопросы осреднения уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами [3—5].

1. Постановка задачи. Введем используемые обозначения. Пусть $n=(n_1, \ldots, n_m)$ — фиксированный m — компонентный мультииндекс с целочисленными $n_k \geqslant 1$ $(k=1, \ldots, m)$. Положим для любой области $G \subset R^d$ $(d \geqslant 2)$ $H^n(G) = H^{n_1}(G) \times \cdots \times H^{n_m}(G)$, $\overset{0}{H}{}^n(G) = \overset{0}{H}{}^{n_1}(G) \times \cdots \times \overset{0}{H}{}^{n_m}(G)$, где $H^{n_k}(G)$ и $\overset{0}{H}{}^{n_k}(G)$ $(k=1, \ldots, m)$ — пространства Соболева. Элементами этих пространств являются вектор-функции $u(x) = (u^{(1)}(x), \ldots, u^{(m)}(x))$, скалярное произведение векторов u и v определяется соотношениями

$$(u, v)_{H^n(G)} = \sum_{k=1}^{m} (u^{(k)}, v^{(k)})_{H^{n_k}(G)},$$

$$(u^{(k)}, v^{(k)})_{H^{n_k}(G)} = \sum_{l=0}^{n_k} (u^{(k)}, v^{(k)})_{l,G},$$

$$(u^{(k)}, v^{(k)})_{l,G} = \sum_{|\gamma|=l} \int_G D^\gamma u^{(k)} D^\gamma v^{(k)} dx.$$

В последней формуле γ — d — компонентный мультииндекс, dx — элемент объема в R^d.

Пусть Ω — фиксированная область в R^d, ограниченная гладкой замкнутой поверхностью $\partial\Omega$. В Ω задана билинейная форма на векторах $u, v \in H^n(\Omega)$:

$$L_\Omega(u, v) = \int_\Omega W(u, v)\,dx,$$

$$W(u(x), v(x)) = \sum_{p,q=1}^{m} \sum_{\substack{|\alpha_p|=n_p,\\ |\beta_q|=n_q}} a_{\alpha_p\beta_q}(x)\,(D^{\alpha_p}u^{(p)})(x) \cdot (D^{\beta_q}v^{(q)})(x).$$

Здесь α_p и β_q $(p, q = 1, \ldots, m)$ — d-компонентные мультииндексы, вещественные коэффициенты $a_{\alpha_p\beta_q}(x) = a_{\beta_q\alpha_p}(x) \in C(\overline{\Omega})$ $(p, q = 1, \ldots, m;\ |\alpha_p| = n_p,\ |\beta_q| = n_q)$ таковы, что для некоторой константы $\chi > 0$

$$W(u(x), u(x)) \geqslant \chi \sum_{p=1}^{m} \sum_{|\gamma_p|=n_p} |(D^{\gamma_p}u^{(p)}(x)|^2 \tag{1}$$

$\forall u(x)$ с компонентами $u^{(p)}(x) \in C^{n_p}(\Omega)$ $(p = 1, \ldots, m)$. Из (1) следует неравенство

$$L_\Omega(u, u) \geqslant \chi \sum_{k=1}^{m} \| u^{(k)} \|^2_{n_k\Omega} = \chi \| u \|^2_{n,\Omega}.$$

Вообще, положим $\forall G \subset \Omega$ $L_G(u, v) = \int_G W(u, v)\,dx$, $\| u \|^2_{l,G} = \sum_{k=1}^{m} \| u^{(k)} \|^2_{l_k,G}$, $\forall l = (l_1, \ldots, l_m)$.

Назовем «задачей равновесия» задачу об отыскании решения $u(x) \in \overset{0}{H}{}^n(\Omega)$ уравнения

$$L_\Omega(u, v) = (f, v)_{0,\Omega}, \quad \forall v \in \overset{0}{H}{}^n(\Omega), \tag{2}$$

где $f = (f_1, \ldots, f_m)$ — заданная «нагрузка» с компонентами $f_k(x) \in C(\overline{\Omega})$ $(k = 1, \ldots, m)$, 0 — нулевой мультииндекс. Как известно, задача (2) эквивалентна задаче о минимизации энергетического функционала $L_\Omega(u, u) - 2(u, f)_{0,\Omega}$ в пространстве $\overset{0}{H}{}^n(\Omega)$.

Рассмотрим теперь области Ω_s, полученные из Ω удалением большого числа s «мелких» непересекающихся замкнутых множеств F_{is} $(i = 1, \ldots, s)$. Таким образом, $\Omega_s = \Omega / F_s$, $F_s = \bigcup_{i=1}^{s} F_{is}$. Будем считать все F_{is} $(i = 1, \ldots, s)$ полученными гомотетическим сжатием в $s^{1/d}$ раз фиксированного множества F, так что их диаметры $d_s \to 0$ при $s \to \infty$, но суммарная мера остается постоянной. Для определенности положим F шаром единичного радиуса, это предположение не является существенным ограничением общности.

Станем решать задачу равновесия в областях Ω_s при неизменной нагрузке $f(x)$:

$$L_{\Omega_s}(u_s, v_s) = (f, v_s)_{0,\Omega_s}. \qquad (3)$$

Решение (3) u_s ищется в гильбертовом пространстве $\overset{0}{H}{}^n_s$ вектор-функций $u \in H^n(\Omega_s)$ таких, что $D^{\gamma_k} u^{(k)}|_{x \in \partial\Omega} = 0$ $(k = 1, \ldots, m;\ |\gamma_k| \leqslant \leqslant n_k - 1)$, v_s — произвольный элемент $\overset{0}{H}{}^n_s$.

Нас интересует асимптотика решений $u_s(x)$ уравнений (3) при $s \to \infty$. Как будет показано, при некоторых сформулированных ниже предположениях $u_s(x)$ сходятся при $s \to \infty$ к решению осредненного уравнения равновесия во всей области Ω.

Если речь идет о различного рода механических задачах, то F_{is} $(i = 1, \ldots, s)$ естественно интерпретировать как пустоты в упругой системе. При этом перемещения $u_s(x)$ точек системы от нагрузки $f(x)$ удовлетворяют условиям жесткого закрепления на $\partial\Omega$ и свободного на ∂F_s.

Сделаем важное предположение о характере распределения пустот. Обозначим через r_{is} расстояние от F_{is} до $\partial\Omega \bigcup\limits_{j \neq i} F_{js}$. Считаем

$$r_{is} > c_0 d_s \ (i = 1, \ldots, s), \qquad (4)$$

где c_0 — не зависящая от s константа. Условия (4) назовем условиями регулярности распределения пустот.

2. Компактность решений уравнений равновесия в областях с пустотами. Продолжим решения $u_s(x)$ уравнений (3), определенные в Ω_s, до вектор-функций $\tilde{u}_s(x) \in \overset{0}{H}{}^n(\Omega)$.

Теорема 1. *Существуют операторы продолжения* $Q_s : \overset{0}{H}{}^n_s \to \overset{0}{H}{}^n(\Omega)$ $(s = 1, 2, \ldots)$, *нормы которых равномерно ограничены.*

Доказательство. Условимся все константы, не зависящие от s, обозначать через c. Пусть x_i — центр шара F_{is} $(i = 1, \ldots, s)$. Рассмотрим шар Π_{is} радиуса $(1 + c_0)\,s^{-1/d}$ с центром в x_i, c_0 определяется (4). Очевидно, при $i \neq j$ шары Π_{is} и Π_{js} не пересекаются. Обозначим через P_{is} шаровой слой Π_{is}/F_{is}. Гомотетическим растяжением $\xi = (x - x_i)\,s^{1/d}$ преобразуем F_{is} в стандартный шар F единичного радиуса с центром в начале координат, при этом Π_{is} перейдет в шар радиуса $1 + c_0$, P_{is} — в шаровой слой $P = \Pi/F$.

Рассмотрим произвольную вектор-функцию $u(x) \in H^n(P_{is})$ и положим $u(\xi) = u(x)$ $(\xi \in P)$. Построим $v(\xi) = (v^{(1)}(\xi), \ldots, v^{(m)}(\xi))$, где

$$v^{(k)}(\xi) = u^{(k)}(\xi) - \sum_{|\alpha_k| \leqslant n_k - 1} q_{k\alpha_k} \xi^{\alpha_k} \ (k = 1, \ldots, m), \qquad (5)$$

постоянные коэффициенты $q_{k\alpha_k}$ $(k = 1, \ldots, m;\ |\alpha_k| \leqslant n_k - 1)$ выбираются из условий $\int\limits_P D^{\beta_k} v^{(k)}(\xi)\,d\xi = 0$ при $k = 1, \ldots, m; |\beta_k| \leqslant$

$\leqslant n_k - 1$. Заметим, что в силу неравенства Пуанкаре $\| v \|^2_{n,P} \geqslant c \| v \|^2_{0,P}$ $(c > 0)$. Хорошо известно, что вектор-функцию $v(\xi)$ можно продолжить на П, причем продолженная вектор-функция $\tilde{v}(\xi) \in H^n(\Pi)$ и $\| \tilde{v} \|^2_{H^n(\Pi)} \leqslant c \| x \|^2_{H^n(P)} \leqslant c \| v \|^2_{n,P}$ с независящей от v константой $c > 0$ [6]. Формула (5) позволяет автоматически продолжить $u(\xi)$ на П:

$$\tilde{u}^{(k)}(\xi) = \tilde{v}^{(k)}(\xi) + \sum_{|\alpha_k| \leqslant n_k - 1} q_{k\alpha_k} \xi^{\alpha_k},$$

при этом $\| \tilde{u} \|^2_{n,\Pi} \leqslant c \| u \|^2_{n,P}$.

Вернемся к исходным переменным, положив $\tilde{u}(x) = \tilde{u}(\xi)$ $(x \in \Pi_{is})$. Заметим, что $\| \tilde{u} \|^2_{n,\Pi_{is}} \leqslant c \| u \|^2_{n,P_{is}}$.

Пусть $u(x)$ — произвольная вектор-функция из $\overset{0}{H}{}^n_s$. Продолжив ее на все F_{is} $(i = 1, \ldots, s)$ описанным выше способом, получим вектор-функцию $\tilde{u}(x) = (Q_s u)(x) \in \overset{0}{H}{}^n(\Omega)$, причем $\| Q_s u \|^2_{n,\Omega} \leqslant c \sum_{i=1}^{s} \| u \|^2_{n,P_{is}} + \| u \|^2_{n,\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{s} \Pi_{is}} \leqslant c \| u \|^2_{n,\Omega_s}$. Учитывая, что в силу неравенства Фридрихса $\| Q_s u \|^2_{n,\Omega} \geqslant c \| Q_s u \|^2_{l,\Omega}$ $(c > 0)$, $\forall\, l = (l_1, \ldots, l_m)$, $l_i \leqslant n_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, получаем $\| Q_s u \|^2_{H^n(\Omega)} \leqslant c \| u \|^2_{n,\Omega_s} \leqslant c \| u \|^2_{\overset{0}{H}{}^n_s}$. Теорема доказана, поскольку c не зависит от s, u.

Следствие. Пусть $u_s(x)$ — решения задач (3) (s = 1, 2, ...). Последовательность $\{\tilde{u}_s = Q_s u_s\}$ (s = 1, 2, ...) слабо компактна в $\overset{0}{H}{}^n(\Omega)$.

Доказательство немедленно следует из цепочки неравенств

$$\| \tilde{u}_s \|^2_{H^n(\Omega)} \leqslant c \| u_s \|^2_{n,\Omega_s} \leqslant c L_{\Omega_s}(u_s, u_s) = c (f, u_s)_{0,\Omega_s} \leqslant \leqslant c \| u_s \|_{\overset{0}{H}{}^n_s} \leqslant c \| \tilde{u}_s \|_{H^n(\Omega)}.$$

Выделим из $\{\tilde{u}_s\}$ (s = 1, 2, ...) слабо сходящуюся в $\overset{0}{H}{}^n(\Omega)$ к вектор-функции $u(x)$ подпоследовательность, сохранив для нее прежнее обозначение $\{\tilde{u}_s\}$ (s=1, 2, ...). В силу теоремы Реллиха можно считать, что $\tilde{u}_s(x)$ сильно сходится к $u(x)$ при $s \to \infty$ в пространстве $\overset{0}{H}{}^{n-1}(\Omega)$, где $n - 1 = (n_1 - 1, \ldots, n_m - 1)$. Нашей основной задачей является разыскание осредненного уравнения равновесия во всей области Ω, решением которого является предельная вектор-функция $u(x) \in \overset{0}{H}{}^n(\Omega)$.

3. Характеристический функционал и основная теорема. Введем основную характеристику распределений пустот, позволяющую найти осредненное уравнение равновесия. Для этого выберем произвольную точку $x_0 \in \Omega$ и рассмотрим куб K_{0h} с центром в x_0

и ребрами длины h, ориентированными вдоль координатных осей. Введем при каждых $p=1, \ldots, m$; $|\gamma_p| = n_p$ m — компонентные векторы $P_{0p\gamma_p}(x)$ вида $P_{0p\gamma_p}(x) = \left(0, \ldots, \frac{1}{\gamma_p!}(x-x_0)^{\gamma_p}, \ldots, 0\right)$ с единственной отличной от нуля p-й компонентой. Затем составим их линейную комбинацию

$$(R, P_0(x)) = \sum_{p=1}^{m} \sum_{|\gamma_p|=n_p} R_{p\gamma_p} P_{0p\gamma_p}(x)$$

с произвольными вещественными коэффициентами $R_{p\gamma_p}$ ($p=1, \ldots, m$; $|\gamma_p| n_p$). Станем обозначать компоненты вектора $(R, P_0(x))$ через $(R, P_0^{(k)}(x))$ $(k=1, \ldots, m)$. Введем, наконец, характеристический функционал

$$T_{R,sh0}(u_s) = L_{K_{sh0}}(u_s, u_s) + \sum_{t=1}^{m} \sum_{k=0}^{n_t-1} h^{2(k-n_t)-\theta} \| u_s^{(t)} - \\ -(R, P_0^{(t)}(x)) \|^2_{kK_{sh0}},$$

определенный на вектор-функциях $u_s \in H^n(K_{sh0})$, $K_{sh0} = K_{0h} \cap \Omega_s$, $\theta > 0$. Обозначим через $T_{\alpha_q sh0}(u_s)$ характеристический функционал, отвечающий набору $R_{p\gamma_p} = \delta_{pq} \cdot \delta_{\gamma_p \alpha_q}$ ($p, q = 1, \ldots, m$; $|\gamma_p| = n_p$, $|\alpha_q| = n_q$), где δ — символ Кронеккера.

Пусть $g_{sh0\alpha_q}(x)$ — вектор-функция класса $H^n(K_{sh0})$, минимизирующая $T_{\alpha_q sh0}(u_s)$, положим $T_{\alpha_q sh0}(g_{sh0\alpha_q}) = T^*_{\alpha_q sh0}$. Введем при $p, q = 1, \ldots, m$; $|\alpha_p| = n_p$, $|\beta_q| = n_q$

$$a_{\alpha_p\beta_q}(s, h; x_0) = L_{K_{sh0}}(g_{sh0\alpha_p}, g_{sh0\beta_q}) + \\ + \sum_{t=1}^{m} \sum_{k=0}^{n_t-1} h^{2(k-n_t)-\theta} (g^{(t)}_{sh0\alpha_p} - P^{(t)}_{0p\alpha_p}, g^{(t)}_{sh0\beta_q} - P^{(t)}_{0q\beta_q})_{k, K_{sh0}}.$$

Сделаем предположения относительно функций $a_{\alpha_p\beta_q}(s, h; x)$ ($p, q = 1, \ldots, m$; $|\alpha_p| = n_p$, $|\beta_q| = n_q$): существуют равномерные по x пределы

$$\lim_{h\to 0} \lim_{s\to\infty} h^{-d} \cdot \operatorname{mes} K_{sh0} = b(x) \in C(\overline{\Omega}),$$

$$\lim_{h\to 0} \overline{\lim_{s\to\infty}} h^{-d} \cdot a_{\alpha_p\beta_q}(s, h; x) = \\ = \lim_{h\to 0} \underline{\lim_{s\to\infty}} h^{-d} a_{\alpha_p\beta_q}(s, h; x) = \tilde{a}_{\alpha_p\beta_q}(x) \in C(\overline{\Omega}) \quad (6)$$

(условие равномерности предельных переходов по x можно, впрочем, ослабить).

Введем «осредненную форму»

$$\tilde{L}_\Omega (u, v) = \int_\Omega \tilde{W} (u(x), v(x))\, dx,$$

$$\tilde{W} (u(x), v(x)) = \sum_{p, q=1}^{m} \sum_{\substack{|\alpha_p|=n_p, \\ |\beta_q|=n_q}} \tilde{a}_{\alpha_p\beta_q}(x) (D^{\alpha_p} u^{(p)})(x) \cdot (D^{\beta_q} v^{(q)})(x)$$

на вектор-функциях $u(x)$, $v(x) \in H^n(\Omega)$. Можно проверить, что при сделанных предположениях (4), (6) справедливы утверждения:

1) $b(x) > 0$, $x \in \Omega$;

2) существует константа $\tilde{\varkappa} > 0$ такая, что при $x \in \Omega$ $\forall u(x)$ с компонентами $u^{(k)}(x) \in C^{n_k}(\Omega)$ $(k = 1, \ldots, m)$ справедливо неравенство

$$\tilde{W} (u(x), u(x)) \geqslant \tilde{\varkappa} \sum_{k=1}^{m} \sum_{|\gamma_k|=n_k} |(D^{\gamma_k} u^{(k)})(x)|^2.$$

Основным результатом является

Теорема 2. *При сделанных выше предположениях (4), (6) решения уравнений равновесия $u_s(x)$ сходятся при $s \to \infty$ к решению осредненного уравнения*

$$\tilde{L}_\Omega (u, v) = \sum_{k=1}^{m} (f_k, v^{(k)})_{L_b^2(\Omega)} \forall v \in \mathring{H}^n(\Omega)$$

в следующем смысле $\lim\limits_{s\to\infty} \| u_s - u \| \mathring{H}_s^{n-1} = 0$, *где* $n - 1 = (n_1 - 1, \ldots, n_m - 1)$.

Доказательство теоремы, ввиду его чрезвычайной громоздкости, здесь не приводится. Заметим лишь, что в его основе лежит метод, использованный в [2] при доказательстве аналогичного утверждения для случая оператора второго порядка.

Следующая часть работы будет посвящена рассмотрению случая периодического распределения пустот. Будут найдены ячеечные задачи, через решения которых выражаются коэффициенты осредненного оператора.

Список литературы: 1. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Краевые задач в областях с мелкозернистой границей.— К.: Наукова думка, 1974. —285 с 2. *Хруслов Е. Я.* Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении области.—Мат. сб., 1978, **106**, вып. 4, с. 604—621. 3. *Бахвалов Н. С.* Осредненные характеристики тел с периодической структурой. — ДАН СССР, 1974, **218**, № 5, с. 1046—1048. 4. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., Ха Тьен Нгоан.* Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов.— Усп. мат. наук, 1979, 34, вып. 5, с. 65—133. 5. *Bensoussan A., Lions I. L., Papanicolaou G.* Asymptotic Analysiz for Periodic Structures. Amsterdam. Horth—Holland, 1978. — 403 p. 6. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными.—М.: Мир, 1977. —504 с.

Поступила в редколлегию 16.12.82

УДК 517.535.4

В. Б. ГИНЕР, Л. Р. ПОДОШЕВ, М. Л. СОДИН

О СЛОЖЕНИИ НИЖНИХ ИНДИКАТОРОВ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

1. Пусть $A(\rho(r))$ — класс целых функций f, имеющих нормальный тип при уточненном порядке $\rho(r)\,(\rho(r)\to\rho)\,\rho>0$, нецелое. Напомним, что индикатор и нижний индикатор $f\in A(\rho(r))$ определяются равенствами

$$h_f(\varphi)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\ln|f(re^{i\varphi})|\,r^{-\rho(r)},$$

$$\boldsymbol{h}_f(\varphi)=\boldsymbol{h}_f(\varphi)=\sup_C\{\underline{\lim_{\substack{re^{i\varphi}\to\infty\\ re^{i\varphi}\notin C}}}\ln|f(re^{i\varphi})|\,r^{-\rho(r)}\},$$

где C — C^0 — множества [1, с. 120], т. е множества, покрываемые объединением кружков вида $K_{\delta_j}(z_j)=\{z:|z-z_j|<\delta_j\}$, таких, что выполняется условие $\overline{\lim\limits_{R\to\infty}}\frac{1}{R}\sum\limits_{|z_j|<R}\delta_j=0$. Введение C^0-множеств в определение $\boldsymbol{h}_f$ вызвано необходимостью исключить из рассмотрения окрестности корней $f(z)$, где $\ln|f|$ близок к $-\infty$.

Нижний индикатор введен и изучался в работах А. Ф. Леонтьева, А. А. Гольдберга, И. Ф. Красичкова, В. С. Азарина и других авторов (см. список литературы в работе [2]).

Напомним, что $f\in A(\rho(r))$ является функцией вполне регулярного роста на луче $l_\varphi=\{\arg z=\varphi\}$ [1, с. 182] $(f\in A_{\mathrm{reg},\,\varphi})$, если выполняется соотношение $h_f(\varphi)=\boldsymbol{h}_f(\varphi)$.

Пусть $f\in A_{\mathrm{reg},\,\varphi}$. Тогда для любой $g\in A(\rho(r))$ выполняются равенства [1, с. 207; 3, с. 152] $h_{fg}(\varphi)=h_f(\varphi)+h_g(\varphi)$ **(1.1)**, $\boldsymbol{h}_{fg}(\varphi)=\boldsymbol{h}_f(\varphi)+\boldsymbol{h}_g(\varphi)$ **(1.2)**. Обратно, если равенство (1.1) выполняется для любой $g\in A(\rho(r))$, то $f\in A_{\mathrm{reg},\,\varphi}$ [4, 5]. Этот факт имел приложения [6, 7].

В данной работе изучается аналогичный вопрос по отношению к равенству (1.2).

Заметим сначала, что если $\boldsymbol{h}_f(\varphi)=-\infty$, то $\boldsymbol{h}_{fg}(\varphi)=-\infty$ для любой $g\in A(\rho(r))$. Очевидно, $f\notin A_{\mathrm{reg},\,\varphi}$.

Обозначим для $E\subset[0,2\pi)$, $e^{iE}\overset{\mathrm{def}}{=}\{e^{i\psi}:\psi\in E\}$.

Теорема 1. *Пусть (1.2) выполняется для* $\psi\in E$, $\forall g\in A(\rho(r))$, *причем* e^{iE} *неразрежено в точке* $e^{i\varphi}$. *Тогда* $f\in A_{\mathrm{reg},\,\varphi}$.

Теорема 2. *Пусть* E_0 *таково, что* e^{iE_0} *разрежено во всех точках единичной окружности. Тогда существует* $f\in A(\rho(r))$, *для которой выполняется (1.2) при всех* $\varphi\in E_0$ *и* $g\in A(\rho(r))$, *но* $f\notin A_{\mathrm{reg},\,\varphi}$ *ни при каком* φ *и* $\boldsymbol{h}_f(\varphi)>-\infty\ \forall\varphi$.

Заметим, что E_0 может быть всюду плотным в $[0, 2\pi)$, а E из теоремы 1 может быть всюду разрывным и даже иметь нулевую меру [8, с. 98].

Доказательство теорем 1 и 2 основано на следующей теореме, дающей критерий выполнения (1.2) в терминах предельного множества $\mathrm{Fr}[f]$ субгармонической функции $u(z) = \ln|f(z)|$ [2, с. 32; 3].

Теорема 3. *Пусть $f \in A(\rho(r))$ и $\boldsymbol{h}_f(\varphi) > -\infty$. Для того, чтобы (1.2) имело место при любой $g \in A(\rho(r))$ такой, что $\boldsymbol{h}_g(\varphi) > -\infty$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:*

$$\lim_{\tau \to 1} v(\tau e^{i\varphi}) = \boldsymbol{h}_f(\varphi), \ \ \forall v \in \mathrm{Fr}[f].$$

Аналогичный критерий верен и для соотношения (1.1).

Теорема 4. *Пусть $f \in A(\rho(r))$. Для того, чтобы (1.1) имело место при любой $g \in A(\rho(r))$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\lim_{\tau \to 1}}\, v(\tau e^{i\varphi}) = h(\varphi), \ \ \forall v \in \mathrm{Fr}[f]. \tag{1.3}$$

Из (1.3) следует, что $f \in A_{\mathrm{reg},\,\varphi}$. Действительно, для любой $v \in \mathrm{Fr}[f]$ $h_f(\varphi) = \overline{\lim\limits_{\tau \to 1}}\, v(\tau e^{i\varphi}) \leqslant v(e^{i\varphi}) \leqslant h_f(\varphi)$ т. е. $f \in A_{\mathrm{reg},\,\varphi}$ и теорема 4 следует из [4].

Отметим, что множество e^{iE}, на котором выполняется (1.1) замкнуто, а теорема 1 означает, что множество, где выполняется (1.2), тонко замкнуто.

Чтобы из сложения индикаторов (соответственно, нижних индикаторов) на множестве e^{iE} следовал вполне регулярный рост в точке φ_0 достаточно, чтобы $e^{i\varphi_0}$ была предельной точкой e^{iE} в обычной топологии для индикаторов (соответственно, в тонкой топологии для нижних индикаторов).

Теорема 1 доказывается в п. 5, теорема 2 — в 6, теорема 3 — в 3.

2. Пусть $\mathrm{SH}(\rho(r))$ — класс субгармонических функций $u(z)$, имеющих нормальный тип при уточненном порядке $\rho(r)$ ($\rho(r) \to \rho$, $\rho > 0$, нецелое).

Напомним понятие предельного множества для функции $u(z)$ [2, с. 32; 3] и его основные свойства.

Пусть D' — пространство обобщенных функций над основным пространством D финитных бесконечно дифференцируемых функций на плоскости и $u \in \mathrm{SH}(\rho(r))$, семейство $\{u_t\}$ субгармонических функций вида $u_t(z) = u(tz)\, t^{-\rho(t)}$ при $t \to \infty$ компактно в следующем смысле: для любой последовательности $t_j \to \infty$ существует подпоследовательность $t_j' \to \infty$ и субгармоническая функция $v(z)$ такие, что $u_{t_j'} \to v$ в D'. Множество таких функций v называется предельным для u и обозначается $\mathrm{Fr}[u]$.

Обозначим $\overline{h}(u, z) = \sup\{v(z) : v \in \mathrm{Fr}[u]\}$; $\boldsymbol{h}(u, z) = \inf\{v(z) : v \in \mathrm{Fr}[u]\}$ **(2.1).**

Функция $u(z)=\ln|f(z)|$, $f\in A(\rho(r))$ принадлежит $\mathrm{SH}(\rho(r))$ и для нее выполняются равенства [2,3] $h_f(\varphi)=\bar h(u, e^{i\varphi})$, $\boldsymbol{h}_f(\varphi)=$ $=\boldsymbol{h}(u, e^{i\varphi})$.

Обозначим через $U[\rho, \sigma]$ множество субгармонических функций $v(z)$ удовлетворяющих условиям $v(z)\leqslant\sigma|z|^\rho$; $\forall z\in \boldsymbol{C}$, $v(0)=$ $=0$. Обозначим также $(\cdot)_\tau$ — преобразование $v\in U[\rho, \sigma]$ $v_\tau(z)=$ $=v(\tau z)\tau^{-\rho}$, $\forall\tau>0$. Очевидно, $U[\rho, \sigma]$ инвариантно относительно этого преобразования. Предельное множество $\mathrm{Fr}[u]$ содержится в $U[\rho, \sigma]$, замкнуто в D' и инвариантно относительно преобразования $(\cdot)_\tau$.

Обозначим $\mathrm{Fr}[f]\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{Fr}[\ln|f|]$.

Известно [9], что для любой $u\in\mathrm{SH}(\rho(r))$ существует $f\in A(\rho(r))$ такая, что $\mathrm{Fr}[f]=\mathrm{Fr}[u]$, т. е. все утверждения из п. 1 можно доказывать для субгармонических функций.

Отметим также неравенства

$$\boldsymbol{h}(u+w, z)\geqslant\boldsymbol{h}(u, z)+\boldsymbol{h}(w, z), \tag{2.2}$$

$$\bar h(u+w, z)\leqslant\bar h(u, z)+\bar h(w, z). \tag{2.3}$$

Пусть μ_u — распределение масс, ассоциированное по Риссу с функцией $u\in\mathrm{SH}(\rho(r))$. Оно удовлетворяет условию

$$\varlimsup_{R\to\infty}\mu_u(R)R^{-\rho(R)}=\bar\Delta<\infty;\ (\mu(R)=\mu\{|z|<R\}),$$

что мы будем обозначать так: $\mu\in M(\rho(r))$.

Семейство $\{\mu_t\}$, определенное для $\mu\in M(\rho(r))$ равенством $\mu_t(E)=\mu(tE)t^{-\rho(t)}$, где $E\subset\boldsymbol{C}$ — борелевское множество, а $tE=$ $=\{zt: z\in E\}$, является компактным в D' при $t\to\infty$, т. е. для любой последовательности $t_j\to\infty$ найдется подпоследовательность $t_j'\to\infty$ и распределение масс ν такие, что $\mu_{t_j'}\to\nu$ в D' (впрочем и в более слабом смысле — на финитных непрерывных функциях).

Множество таких ν обозначается $\mathrm{Fr}[\mu]$. Оно инвариантно относительно преобразования $(\cdot)_\tau$: $\nu_\tau(E)=\nu(\tau E)\tau^{-\rho}$ и удовлетворяет условию $\nu(R)\leqslant\Delta R^\rho$, $\forall R$ при некотором Δ ($\nu\in M[\rho, \Delta]$).

Отметим также, что

$$(\mu_u)_t=\mu_{u_t},\ \mathrm{Fr}[\mu]=\{\mu_v: v\in\mathrm{Fr}[u]\}. \tag{2.4}$$

Пусть $\nu\in M[\rho, \Delta]$. Канонический потенциал $I(z, \nu)=$ $=\int\limits_{\boldsymbol{C}} H\times(z/\zeta, p)\,d\nu$, $p=[\rho]$, где

$$H(u, p)=\ln|1-u|+\mathrm{Re}\left\{\sum_{k=1}^{p}\frac{u^k}{k}\right\} \tag{2.5}$$

принадлежит $U[\rho, \sigma]$, причем, как обычно, $\mu_I=\nu$.

3. Докажем теорему 3. Для доказательства необходимости нам понадобятся следующие утверждения, которые будут доказаны в п. 4.

Лемма 3.1. *Пусть заданы* $\varepsilon > 0$, $\tau_0 > 0$, $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$. *Тогда для некоторого* $\sigma > 0$ *существует* $v \in U[\rho, \sigma]$ *обладающая следующими свойствами:*

$$D' - \lim_{\tau\to 0} v_\tau = D' - \lim_{\tau\to\infty} v_\tau = 0, \tag{3.1}$$

$$v(e^{i\varphi_0}) < v_\tau(e^{i\varphi_0}),\ \tau \in (0,\ 1) \cup (1,\ \infty), \tag{3.2}$$

$$-\infty < v(e^{i\varphi_0}) < -\varepsilon, \tag{3.3}$$

кроме того из неравенства

$$v_\tau(e^{i\varphi_0}) - v(e^{i\varphi_0}) \leqslant \varepsilon/2 \tag{3.4}$$

следует, что

$$\tau \in \left[\frac{1}{\tau_0},\ \tau_0\right]. \tag{3.5}$$

Последнее условие означает, что функция $\psi(\tau) = v_\tau(e^{i\varphi_0})$ *может опуститься ниже* $\psi(1) + \varepsilon/2$ *лишь в окрестности* $\tau = 1$.

Лемма 3.2. *Пусть для* $v \in U[\rho, \sigma]$ *выполняется условие (3.1),* $u \in \mathrm{SH}(\rho(r))$, $v^0 \in \mathrm{Fr}[u]$. *Существует* $w^0 \in \mathrm{SH}(\rho(r))$, *удовлетворяющая условиям:* $\mathrm{Fr}[w^0] = \{v_\tau : \tau \in (0,\ \infty)\} \cup \{0\}$ **(3.6)**, *если последовательность* $t_n \to \infty$ *такова, что* $D' - \lim\limits_{t_n\to\infty} w^0_{t_n} = v_\tau$ *для некоторого* $\tau \in (0,\ \infty)$ *и существует* $D' - \lim\limits_{t_n\to\infty} u_{t_n}$, *то*

$$D' - \lim_{t_n\to\infty} u_{t_n} = v^0_\tau. \tag{3.7}$$

Иначе говоря, w^0 устроена так, что по всем последовательностям t_n, не удовлетворяющим условию (3.7), $D' - \lim w^0{}_{tn} = 0$ и, кроме того, параметры τ у кривых $\{v_\tau : \tau \in (0,\ \infty)\}$ и $\{v^0_\tau : \tau \in (0,\ \infty)\}$ «согласованы».

Доказательство необходимости теоремы 3.

Нужно доказать, что из равенства

$$\boldsymbol{h}(u + w,\ e^{i\varphi_0}) = \boldsymbol{h}(u,\ e^{i\varphi_0}) + \boldsymbol{h}(w,\ e^{i\varphi_0}), \tag{3.8}$$

выполняющегося для фиксированных $u \in \mathrm{SH}(\rho(r))$, φ_0 и произвольной $w \in \mathrm{SH}(\rho(r))$ следует, что

$$\varliminf_{\tau\to 1} v_\tau(e^{i\varphi_0}) = \boldsymbol{h}(u,\ e^{i\varphi_0}) \tag{3.9}$$

для любой $v \in \mathrm{Fr}[u]$.

При этом предполагается, что $\boldsymbol{h}(u,\ e^{i\varphi_0}) > -\infty$, $\boldsymbol{h}(w,\ e^{i\varphi_0}) > -\infty$.

Допустим противное, т. е. существует $v^0 \in \mathrm{Fr}[u]$ такая, что

$$\varliminf_{\tau\to 1} v^0_\tau(e^{i\varphi_0}) > \boldsymbol{h}(u,\ e^{i\varphi_0}). \tag{3.10}$$

Из неравенства (3.10) следует, что найдутся $\varepsilon > 0$, $\tau_0 > 0$ такие, что для любого $\tau \in \left[\frac{1}{\tau_0}, \tau_0\right]$ выполняется неравенство

$$v_\tau^0(e^{i\varphi_0}) > h(u, e^{i\varphi_0}) + \varepsilon. \qquad (3.11)$$

Построим по лемме 3.1 для этих ε, τ_0, φ_0 функцию v, а по лемме 3.2 для функции u, v^0, и уже найденной v — функцию $w^0(z)$.

Покажем, что для w^0 равенство (3.8) не выполняется.

Вычислим $h(w^0, e^{i\varphi_0})$. Из (3.6) имеем

$$h(w^0, e^{i\varphi_0}) = \min\{0, \inf\{v_\tau(e^{i\varphi_0}) : \tau \in (0, \infty)\}\}.$$

Из соотношения (3.3) следует, что $\{0\}$ можно отбросить, и из (3.2), что inf достигается при $\tau = 1$, т. е.

$$h(w^0, e^{i\varphi_0}) = v(e^{i\varphi_0}). \qquad (3.12)$$

Найдем теперь $v^\varepsilon \in \mathrm{Fr}[u + w^0]$, так, чтобы было $h(u + w^0, e^{i\varphi_0}) > v^\varepsilon(e^{i\varphi_0}) - \varepsilon/3$. Пусть $t_n \to \infty$ и $(u + w^0)_{t_n} \to v^\varepsilon$ в D'. Переходя при необходимости к подпоследовательности, можно считать, что последовательности u_{t_n} и $w_{t_n}^0$ также сходятся. Рассмотрим два возможных случая. Первый, когда

$$D' - \lim w_{t_n}^0 = v_\tau, \ \tau \in (0, \infty). \qquad (3.13)$$

В этом случае по свойству (3.7) $D' - \lim u_{t_n} = v_\tau^0$. И, значит, $v^\varepsilon = D' - \lim(u + w^0)_{t_n} = v_\tau + v_\tau^0$. Если $\tau \notin \left[\frac{1}{\tau_0}, \tau_0\right]$, то по (3.4)

$$v_\tau(e^{i\varphi_0}) > v(e^{i\varphi_0}) + \frac{\varepsilon}{2} = h(w^0, e^{i\varphi_0}) + \varepsilon/2. \qquad (3.14)$$

В этом случае имеем

$$h(u + w, e^{i\varphi_0}) \geqslant v^\varepsilon(e^{i\varphi_0}) - \varepsilon/3 \geqslant h(w^0, e^{i\varphi_0}) + h(u, e^{i\varphi_0}) + \frac{\varepsilon}{6}. \qquad (3.15)$$

Если $\tau \in [1/\tau_0, \tau_0]$, то из (3.11) получаем

$$h(u + w^0, e^{i\varphi_0}) \geqslant h(w^0, e^{i\varphi_0}) + h(u, e^{i\varphi_0}) + \frac{2}{3}\varepsilon. \qquad (3.16)$$

Таким образом, случай (3.13) разобран. Пусть $D' - \lim w_{t_n}^0 = 0$. В этом случае имеем, используя (3.3), $h(u + w^0, e^{i\varphi_0}) \geqslant v^\varepsilon(e^{i\varphi_0}) - \varepsilon/3 \geqslant h(u, e^{i\varphi_0}) - \varepsilon/3 > h(u, e^{i\varphi_0}) + h(w^0, e^{i\varphi_0}) + \frac{2}{3}\varepsilon$.

Таким образом, доказано, что $h(u + w^0, e^{i\varphi_0}) \geqslant h(u, e^{i\varphi_0}) + h(w^0, e^{i\varphi_0}) + \varepsilon/6$, т. е. необходимость в теореме 3.

Доказательство достаточности в теореме 3. Пусть $u \in SH(\rho(r))$ и для любой $v \in \mathrm{Fr}[u]$ выполняется (3.9). Покажем, что $\forall w \in SH(\rho(r))$ выполняется (3.8). Достаточно доказать, что

$$h(u + w, e^{i\varphi_0}) \leqslant h(u, e^{i\varphi_0}) + h(w, e^{i\varphi_0}), \qquad (3.17)$$

так как обратное неравенство верно для любой $w \in SH(\rho(r))$.

Отметим сначала, что для любой $v^2 \in \mathrm{Fr}[w]$ найдутся такие $v \in \mathrm{Fr}[u+w]$ и $v^1 \in \mathrm{Fr}[u]$, что

$$v = v^1 + v^2. \tag{3.18}$$

Действительно, пусть $t_n \to \infty$ такая последовательность, что $w_{t_n} \to v^2$. Можно считать, что $u_{t_n} \to v^1$, а $(u+w)_{t_n} \to v$, тогда выполняется (3.18). Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно мало. Выберем $v^2 \in \mathrm{Fr}[w]$ так, чтобы было $v^2(e^{i\varphi_0}) < \boldsymbol{h}(w, e^{i\varphi_0}) + \varepsilon$. Вследствие полунепрерывности $v^2(z)$

$$\overline{\lim_{\tau \to 1}} v_\tau^2 (e^{i\varphi_0}) \leqslant \boldsymbol{h}(w, e^{i\varphi_0}) + \varepsilon. \tag{3.19}$$

Пусть $v^1 \in \mathrm{Fr}[u]$ и $v \in \mathrm{Fr}[u+w]$ удовлетворяют (3.18). Имеем тогда $\boldsymbol{h}[u+w, e^{i\varphi_0}] \leqslant (v^1 + v^2)_\tau (e^{i\varphi_0}) = v_\tau^1 (e^{i\varphi_0}) + v_\tau^2 (e^{i\varphi_0})$, $\forall \tau$. Отсюда получаем

$$\boldsymbol{h}[u+w, e^{i\varphi_0}] \leqslant \underline{\lim_{\tau \to 1}} v_\tau^1 (e^{i\varphi_0}) + \overline{\lim_{\tau \to 1}} v_\tau^2 (e^{i\varphi_0}).$$

И значит, используя (3.9) и (3.19), получаем $\boldsymbol{h}[u+w, e^{i\varphi_0}] \leqslant \leqslant \boldsymbol{h}[u, e^{i\varphi_0}] + \boldsymbol{h}[w, e^{i\varphi_0}] + \varepsilon$, что и доказывает достаточность, так как ε произвольно.

4. Доказательство леммы 3.1. Положим

$$w(z) = \max(\ln|1 - ze^{-i\varphi_0}|, -N) + \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} (ze^{-i\varphi_0})^n,$$
$$N > 0, \ p = [\rho].$$

Очевидно, w субгармоническая функция, массы ν_w которой сосредоточены в окрестности точки $e^{i\varphi_0}$. Поэтому $\nu_w \in M[\rho, \Delta]$ при некотором Δ и $D' - \lim_{\tau \to 0} (\nu_w)_\tau = D' - \lim_{\tau \to \infty} (\nu_w)_\tau = 0$.

Значит (см. п. 2), $w \in U[\rho, \sigma]$ при некотором σ. Заметим, что $D' - \lim_{\tau \to 0} w_\tau = D' - \lim_{\tau \to \infty} w_\tau = 0$. Исследуем подробнее поведение w_τ на луче $\{\arg z = \varphi_0\}$. Имеем

$$w_\tau (e^{i\varphi_0} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \psi(\tau) = \left[\max(\ln|1-\tau|, -N) + \sum_{n=1}^{p} \frac{\tau^n}{n}\right] \tau^{-\rho}. \tag{4.1}$$

Можно непосредственным исследованием установить следующие свойства $\psi(\tau)$, считая, что $N > 0$ достаточно велико:

а) вне интервала $[1 - e^{-N}, 1 + e^{-N}]$, $\psi(\tau) = H(\tau, p)\tau^{-\rho}$, где H — каноническое ядро (2.5), а внутри этого интервала первое слагаемое в (4.1) заменяется на $-N$;

б) $\psi(\tau) > 0$ при $\tau > \tau_1$-корня уравнения $H(\tau, p) = 0$, монотонно убывает на $(0, 1 - e^{-N})$ и монотонно возрастает на $(1 - e^{-N}, \tau_1)$.

Полагаем теперь $\tau_2 = (1 - e^{-N})$ и $v(z) = w_{\tau_2}(z) \cdot D$. Эта функция уже удовлетворяет условиям (3.1) и (3.2) леммы и $v_\tau(e^{i\varphi_0})$ имеет единственный отрицательный минимум при $\tau = 1$. Поэтому можно подобрать достаточно большое D, чтобы удовлетворить условиям (3.4) и (3.5) при заданных ε и τ_0.

Доказательство леммы 3.2. В [9] было показано, в частности, что если выполняется условие (3.1), то существует $w^0 \in \in SH(\rho(r))$, удовлетворяющая условию (3.6). Мы усовершенствуем конструкцию из [9] так, чтобы выполнялось дополнительно и условие (3.7).

Пусть $v \in U[\rho, \sigma]$ и $\nu = \nu_v$ распределение масс, ассоциированное с v. Из непрерывности в D' оператора Лапласа и условия (3.1) следует, что найдутся такие две последовательности $\tau_{j,0} \to 0$ и $\tau_{j,\infty} \to \infty$, что $D' - \lim \nu_{\tau_{j,0}} = D' - \lim \nu_{\tau_{j,\infty}} = 0$. Пусть $u \in SH(\rho(r))$, $\mu = \mu_u$ распределение масс u, $v^0 \in \mathrm{Fr}[u]$, ν^0 — распределение масс v^0.

Из (2.4) следует, что существует последовательность $r_n \to \infty$ такая, что

$$D' - \lim (\mu_u)_{r_n} = \nu^0. \tag{4.2}$$

Можно считать, что $\{r_n\}$ удовлетворяет условию $r_{n+1}/r_n \to \infty$, причем стремление к бесконечности сколь угодно быстрое.

Определим теперь меру μ^0 равенствами

$$d\mu^0 = \begin{cases} L(|z|)\, d(\nu)_{\tau_n} & \text{для } |z|/r_n \in (\tau_{n,0};\ \tau_{n,\infty}), \\ 0 & \text{для } |z|/r_n \notin \bigcup\limits_n (\tau_{n,0};\ \tau_{n,\infty}), \end{cases}$$

где $L(r) = r^{\rho(r) - \rho}$, $\tau_n = \frac{1}{r_n}$. Можно показать, как и в [9] (теорема 2′), что $\mu^0 \in M(\rho(r))$ и $\mathrm{Fr}[\mu^0] = \{\nu_\tau : \tau \in (0, \infty)\} \cup \{0\}$. Полагаем теперь $w^0(z) = \int\limits_C H(z/\zeta, p)\, d\mu^0$ и показываем, как и в [9, § 4], что w^0 удовлетворяет условию (3.6). Условие (3.7) также выполняется. Действительно, из конструкции видно, что $\mu^0_{t_n} \to \nu_\tau$ и, значит, $w^0_{t_n} \to v_\tau$ только по таким последовательностям $t_n \to \infty$, которые удовлетворяют условию $\exists\, c > 0$ и подпоследовательность $\{r_{i_n}\} \subset \{r_n\}$ такие, что $t_n/r_{i_n} \in (1/c, c)$, а для таких последовательностей $(\mu_u)_{t_n} \to \nu^0_\tau$ и, значит, [9, § 4] $u_{t_n} \to v^0_\tau$.

5. Доказательство теоремы 1. Пусть $E \subset \{z : |z| = 1\}$ неразрежено в точке $e^{i\varphi_0}$ и $u \in SH(\rho(r))$ такова, что $\forall w \in SH(\rho(r))$ и $e^{i\varphi} \in E$ выполняется равенство

$$\boldsymbol{h}(u + w, e^{i\varphi}) = \boldsymbol{h}(u, e^{i\varphi}) + \boldsymbol{h}(w, e^{i\varphi}). \tag{5.1}$$

Требуется доказать, что

$$\boldsymbol{h}(u, e^{i\varphi_0}) = \overline{h}(u, e^{i\varphi_0}). \tag{5.2}$$

Лемма 5.1. Пусть E' — множество в $\mathbf{C}$, удовлетворяющее условию $\forall e^{i\varphi} \in E$, $\forall \delta > 0$ на луче $\{\arg z = \varphi\}$ найдется точка $z' \in E'$ такая, что $|z' - e^{i\varphi}| < \delta$. Тогда E', также как E, неразрежено в точке $e^{i\varphi_0}$.

Доказательство. Не ограничивая общности считаем, что E' не пересекается с некоторой окрестностью нуля.

Обозначим через $P(z)$ отображение, переводящее точку z в точку $e^{i \arg z}$. Легко видеть, что для любых $z_1', z_2' \in E'$ выполняется условие $|P(z_1') - P(z_2')| < A|z_1' - z_2'|$. Отсюда следует, что логарифмическая емкость $C_l(\cdot)$ удовлетворяет неравенству [10, с. 212]

$$C_l(M) < AC_l(M'), \tag{5.3}$$

где $M' \subset E'$, $M = P(M')$.

Воспользуемся теперь следующим условием неразреженности множества E в точке z_0. Во-первых, если E неразрежено в точке z_0, то существует компакт $K \subset E$ неразреженный в z_0 [10, с. 363, 376]. Во-вторых, для компакта, неразреженного в z_0, выполняется условие [10, с. 366]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln \frac{1}{C_l(K_n)}} = \infty, \tag{5.4}$$

где $K_n = K \cap \{z : q^{n+1} \leqslant |z - z_0| \leqslant q^{n+1}\}$, $0 < q < 1$.

Используя теперь неравенство (5.3), получаем, что из расходимости ряда (5.4) для некоторого компакта $K \subset E$ следует расходимость его и для $K' \subset E'$, где $K = P(K')$, т. е. E' неразрежено в точке $P(e^{i\varphi_0}) = e^{i\varphi_0}$. Лемма доказана.

Пусть $\varepsilon(\varphi) \to 0$ при $\varphi \to \varphi_0$ и $v \in \mathrm{Fr}[u]$ — произвольная функция. Пусть для $e^{i\varphi} \in E$ выполняется (3.8). Из (3.8) следует, что $\exists\, z' = z'(e^{i\varphi}, \Delta)$ для $\forall \Delta > 0$ такое, что

$$\arg z' = \varphi, \ v(z') < \boldsymbol{h}(e^{i\varphi}) + \varepsilon(\varphi), \tag{5.5}$$

причем $|z' - e^{i\varphi}| < \Delta$.

Обозначим $E' \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcup\limits_{\varphi \in E} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} z'(e^{i\varphi}, 1/n)$. Из (5.5) и полунепрерывности $\boldsymbol{h}(e^{i\varphi})$ следует, что

$$\varlimsup_{\substack{z' \to e^{i\varphi_0} \\ z' \in E'}} v(z') \leqslant \boldsymbol{h}(e^{i\varphi_0}). \tag{5.6}$$

Так как по лемме 5.1 E' неразрежено в $e^{i\varphi_0}$, то $\varlimsup v$ совпадает с $v(e^{i\varphi_0})$ [10, с. 376], т. е $v(e^{i\varphi_0}) \leqslant \boldsymbol{h}(e^{i\varphi_0})$. Обратное неравенство верно всегда, см. (2.1). Значит, $v(e^{i\varphi_0}) = \boldsymbol{h}(e^{i\varphi_0})$, $\forall v \in \mathrm{Fr}[u]$, т. е. $\overline{\boldsymbol{h}}(u, e^{i\varphi_0}) = \boldsymbol{h}(u, e^{i\varphi_0})$.

6. Доказательство теоремы 2. Будем обозначать множество e^{iE_0} через E. Требуется доказать, что если E разрежено в каждой точке окружности (в частности, в каждой собственной точке), то существует $u \in SH(\rho(r))$ такая, что $\forall w \in SH(\rho(r))$ выполняется равенство (5.1) $\forall e^{i\varphi} \in E$, но ни при каком φ_0 не выполняется (5.2).

Пусть $v^1 \in U[\rho, \sigma]$. Обозначим $\Lambda[v^1[\overset{\text{def}}{=} \subset \text{los}_{D'} \{v^1_\tau : \tau \in (0, \infty)\}$ — замыкание в D' кривой $\{v^1_\tau : \tau \in (0, \infty)\}$. Обозначим через $\text{Fr}_0[v^1]$ и $\text{Fr}_\infty[v^1]$ — предельные множества для v^1 при $\tau \to 0, \infty$ [9, с. 4].

Мы воспользуемся следующим утверждением, доказанным в п. 7.

Лемма 6.1. *Существует* $v^1 \in U[\rho, \sigma]$ *такая, что*

$$\text{Fr}_0[v^1] = \text{Fr}_\infty[v^1], \tag{6.1}$$

$$\inf\{v(e^{i\varphi}) : v \in \Lambda(v^1)\} = \lim_{\tau \to 1} v(\tau e^{i\varphi}) = 0, \quad \forall v \in \Lambda[v^1], \ \forall e^{i\varphi} \in E, \tag{6.2}$$

$$\sup\{v(e^{i\varphi}) : v \in \Lambda(v^1)\} \neq \inf\{v(e^{i\varphi}) : v \in \Lambda(v^1)\}, \ \forall e^{i\varphi}, \tag{6.3}$$

в [9] *показано, что из условия (6.1) следует существование такой* $u \in \text{SH}(\rho(r))$, *что* $\text{Fr}[u] = \Lambda(v^1)$. *Из условия (6.2) следует, что*

$$\boldsymbol{h}[u, e^{i\varphi}] = 0 = \underline{\lim_{\tau \to 1}}\, v(\tau e^{i\varphi}), \ \forall v \in \text{Fr}[u], \ \forall e^{i\varphi} \in E,$$

значит, $\forall e^{i\varphi} \in E$ *выполняется условие (5.1). Из (6.3) следует, что* $\boldsymbol{h}[u, e^{i\varphi}] \neq \overline{h}[u, e^{i\varphi}]$, $\forall e^{i\varphi}$.

7. Докажем лемму 6.1.

Пусть $B_j\{z : T^j < |z| < T^{j+1}\}$, где T — фиксировано, $T > 1$. Обозначим $L_E = \{z : e^{i \arg z} \in E\}$.

Пусть Q — множество рациональных чисел на интервале $(1, T)$. Полагаем: $S_Q\{z : |z| \in Q\}$, $T^j S_Q = \{zT^j : z \in S_Q\}$, $A_j = L_E \cap T^j S_Q$ $j = -\infty, \infty$.

Лемма 7.1. *Для некоторого* $\sigma > 0$ $\exists v \in U[\rho, \sigma]$ *такая, что*

$$v(z) = -\infty, \ z \in A_0 \ \textbf{(7.1)}, \ \mu_v(e) = 0, \ \forall e \subset \boldsymbol{C} \setminus B_0 \ \textbf{(7.2)},$$

где μ_v — *распределение масс, ассоциированное с* $\boldsymbol{v}$.

Доказательство. Множество E разрежено в каждой точке, значит, полярно [8, с. 95], поэтому [8, с. 43] и множество $\{z : |z| = r\} \cap L_E$ — полярно. Счетное объединение полярных множеств полярно [8, с. 43], поэтому A_0 полярно. Значит, учитывая [8, с. 55], получаем, что существует положительная мера μ, сосредоточенная на B_0, для которой потенциал $\int \text{H}(z/\zeta, p)\, d\mu = v(z)$ обращается в $-\infty$ на A_0. Легко видеть, что $\mu \in M[\rho, \Delta]$ и, значит, $v \in U[\rho, \sigma]$ при некотором $\sigma > 0$.

Лемма 7.2. *Существует* $\omega \in U[\rho, \sigma]$ *для некоторого* $\sigma > 0$ *такая, что выполняются условия* $\omega(z) = -\infty$; $z \in A \overset{\text{def}}{=} \bigcup_j A_j$,

$$\omega(Tz) = T^\rho \omega(z) \tag{7.3}$$

Доказательство. Полагаем для любого $E \subset\subset \mathbf{C} \setminus 0$

$$\nu(E) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} T^{j\rho} \mu_v (T^{-j} E \cap B_0). \qquad (7.4)$$

Из (7.4) следует, что для любого E $\nu(TE) = T^{\rho}\nu(E)$ **(7.5)**. Покажем, что $\nu \in M[\rho, \Delta]$. Пусть $R > 0$ выберем k так, чтобы $RT^k \in [1, T]$, имеем, используя (7.5), $\nu(R) = \nu(RT^k) T^{-k\rho} = R^{\rho} \times \nu(RT^k)(RT^k)^{-\rho} \leqslant \nu(T) R^{\rho} \overset{\text{def}}{=} \Delta R^{\rho}$. Полагаем $\omega(z) = \int\limits_{C} H(z/\zeta, p) \times d\nu_{\zeta}$. Так как $\nu \in M[\rho, \Delta]$, то $\omega \in U[\rho, \sigma]$ при некотором σ, а из (7.5) следует (7.3).

Лемма 7.3. *Пусть* ω — *субгармоническая функция в* $\mathbf{C}$. *Обозначим* $m(\varphi) = \max\{\omega(re^{i\varphi}) : r \in [1, T]\}$. *Тогда существует такое* $C > -\infty$, *что* $m(\varphi) > C$ $\forall \varphi$. Доказательство леммы 7.3 опускаем.

Доказательство леммы 6.1. Пусть $\omega(z)$ найдено по лемме 7.2 и $v = (\omega(z) + D \ln^{+} 2|z|)$. Из условия (7.3) следует, что $\mathrm{Fr}_0[\omega] = \mathrm{Fr}_{\infty}[\omega] = \{\omega_{\tau} : \tau \in [1, T]\}$. Так как $(\ln^{+} 2|z|)_{\tau} \to 0$ при $\tau \to 0$, ∞, то v удовлетворяет условию $\mathrm{Fr}_0[v] = \mathrm{Fr}_{\infty}[v] = \{\omega_{\tau} : \tau \in [1, T]\}$. Можно показать, что если последовательность субгармонических функций $u_n \to u$ в D', то $u_n^{+} \to u^{+}$ в D'. Поэтому для функции $v^1(z) = v^{+}(z)$ имеем $\mathrm{Fr}_0[v^1] = \mathrm{Fr}_{\infty}[v^1] = \{\omega_{\tau}^{+} : \tau \in [1, T]\}$. Заметим, что $v^1(z) = 0$ для $z \in A$, так как A плотно в L_E, то выполняется (6.2). Выбирая D достаточно большим, можно, с учетом леммы 7.3, сделать так, чтобы на каждом луче была точка, где значение v^1 положительно. Поэтому $\sup\{v(e^{i\varphi}) : v \in \Lambda[v^1]\} > 0$. И, значит, (6.3) выполняется для $e^{i\varphi} \in E$. Пусть теперь $e^{i\varphi} \notin E$. Если бы $\mathbf{h}[u, e^{i\varphi}] = \bar{h}[u, e^{i\varphi}]$, то функция $v_{\tau}^{1}(e^{i\varphi})$ была бы постоянна по τ, но это неверно, так как при $\tau = T^k$ получаем, используя (7.3): $v_{\tau}^{1}(e^{i\varphi}) = [\omega(e^{i\varphi}) + D(\ln^{+} 2\tau)\tau^{-\rho}]^{+} \not\equiv v^1(e^{i\varphi})$. Лемма 6.1 доказана.

Список литературы: 1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.— М.: ГИТТЛ, 1956.— 630 с. 2. *Азарин В. С.* Теория роста субгармонических функций.— Харьков, ХГУ, 1982.— 74 с. 3. *Азарин В. С.* Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка.— Мат. сб., 1979, **108 (150)**, № 2. с. 147—167. 4. *Азарин В. С.* О сложении индикаторов целых функций.— Теория функций, функц. анализ и их приложения, 1966 вып. 2. с. 55—56. 5. *Фаворов С. Ю.* О сложении индикаторов целых и субгармонических функций многих переменных.— Мат. сб., **105 (147)**, с. 128—140. 6. *Напалков В. В.* Об одном классе уравнений типа свертки.— Усп. мат. наук, 1974, **29**, вып. 3 (177), с. 217—218. 7. *Епифанов О. В.* Об эпиморфизме свертки в выпуклой области.— Докл. АН СССР, 1974, **217**, № 1, с. 18—19. 8. *Брело М.* Основы классической теории потенциала.— М.: Мир, 1964.— 217 с. 9. *Азарин В. С., Гинер В. Б.* О строении предельных множеств целых и субгармонических функций.— Теория функций, функц. анализ и их приложения, 1982, вып. 38, с. 3—12. 10. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала.— М.: Изд.-во физ.-мат. лит., 1966.— 515 с.

Поступила в редколлегию 12.12.82.

УДК 517.53

А. Ф. ГРИШИН

О МНОЖЕСТВАХ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ. III*

5. Одна интерполяционная теорема.

Теорема 9. *Пусть* $E=\{a_n=r_n e^{i\theta_n}\}$ — *последовательность комплексных чисел с единственной точкой сгущения на бесконечности,* $\rho(r)$ — *уточненный порядок,* $\rho>0$, $h(\theta)$ — *тригонометрически ρ-выпуклый индикатор,* $H(re^{i\theta})=r^\rho h(\theta)$. *Тогда следующие пять условий а, б, в, г, д эквивалентны.*

а) Для любой последовательности b_n, удовлетворяющей условию

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left[\frac{1}{r_n^{\rho(r_n)}}\ln|b_n|-h(\theta_r)\right]\leqslant 0 \tag{34}$$

существует целая функция $f(z)$ с индикатором $h_1(\theta)$, $h_1(\theta)\leqslant h(\theta)$ относительно уточненного порядка $\rho(r)$, такая, что $f(a_n)=b_n$;

б) для любой последовательности b_n, удовлетворяющей условию (34), существует целая функция $f(z)$ вполне регулярного роста с индикатором $h(\theta)$ относительно уточненного порядка $\rho(r)$ такая, что $f(a_n)=b_n$;

в) существует целая функция $\varphi(z)$ с индикатором $h(\theta)$ относительно $\rho(r)$, которая обращается в ноль на множестве E и такая, что

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left[\frac{1}{r_n^{\rho(r_n)}}\ln\frac{1}{\varphi'(a_n)}+h(\theta_n)\right]\leqslant 0; \tag{35}$$

г) существует целая функция $\varphi(z)$ вполне регулярного роста с индикатором $h(\theta)$ относительно $\rho(r)$, которая обращается в ноль на множестве E и такая, что если λ_n, $n=1, 2, \ldots$ — множество всех ее корней, то

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left[\frac{1}{|\lambda_n|^{\rho(|\lambda_n|)}}\ln\frac{1}{|\varphi'(\lambda_n)|}+h(\arg\lambda_n)\right]\leqslant 0; \tag{36}$$

д) 1) $d_E(K)\leqslant\mu_H(K)$ для любого компакта K,

2) $\lim\limits_{\delta\to 0}\sup\limits_{z}\int\limits_0^\delta\frac{\Phi_{E,z}(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha=0.$

Доказательство. Импликация *г* $\Rightarrow$ *в* — тривиальная. Импликацию *в* $\Rightarrow$ *а*, используя метод Хермандера решения $\bar\partial$-проб-

---

* Сообщ. I. II см. в сб. «Теория функций, функцион. анализ и их прил.», 1983, вып. 40, 41.

лемы, доказал А. М. Руссаковский [12]. Раньше утверждение $г \Rightarrow а$ доказала О. С. Фирсакова [8]. Б. Я. Левин заметил, что методом О. С. Фирсаковой можно доказать и импликацию $в \Rightarrow а$. Здесь приводится доказательство импликации $в \Rightarrow а$ методом Фирсаковой. Из (34), (35) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n^{-\rho(r_n)} \ln^+ \left|\frac{b_n}{\varphi'(a_n)}\right| = 0$. Покажем, что существует уточненный порядок $\rho_1(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty} \rho_1(r) = \lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho$ такой, что

$$\lim_{r\to\infty} r^{\rho_1(r)-\rho(r)} = 0, \ \lim_{n\to\infty} r_n^{-\rho_1(r_n)} \ln^+ \left|\frac{b_n}{\varphi'(a_n)}\right| = 0. \qquad (37)$$

Пусть s_j, $j = 1, 2, \ldots$ — круговая проекция множества E на ось $(0, \infty)$. Пусть $c_j = \max\limits_{|a_n|=s_j} \ln^+ \left|\frac{b_n}{\varphi'(a_n)}\right|$. Пусть $\psi(r)$ — кусочно-постоянная функция, равная c_j на полусегменте $[s_j, s_{j+1})$. Тогда $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{\psi(r)}{r^{\rho(r)}} = 0$, $\psi(s_j) = c_j$. Обозначим $\varepsilon_1(r) = \sup\limits_{t\geqslant r} \varepsilon(t)$, $\varepsilon(r) = \frac{\psi(r)}{r^{\rho(r)}}$. Функция $\varepsilon_1(r) \downarrow 0$ при $r \to \infty$ и строго положительная, $\varepsilon_1(r) \geqslant \varepsilon(r)$. Пусть $\varepsilon_2(r) = \frac{\sup\limits_{2\leqslant t\leqslant r} \varepsilon_1(t)\ln t}{\ln r}$. Тогда по лемме 5 $\varepsilon_2(r) \geqslant \varepsilon_1(r)$, $\varepsilon_2(r) \downarrow 0$, $\varepsilon_2(r)\ln(r) \uparrow$, $\varepsilon_2'(r) \leqslant \varepsilon_2(r)\frac{1}{r\ln r}$, где — $\varepsilon_2'(r) = \overline{\lim\limits_{n\to 0}} \frac{1}{h}(\varepsilon_2(r) - \varepsilon_2(r+h))$. Пусть $\varepsilon_3(r) = \int\limits_r^{r+1} \varepsilon_2(t)\,dt$. Тогда $\varepsilon_3(r) \downarrow 0$, $\varepsilon_3(r) \leqslant \varepsilon_2(r)$, $\varepsilon_3(r) \geqslant \varepsilon_2(r+1) \geqslant \varepsilon_2(r)\frac{\ln r}{\ln(r+1)}$, $|\varepsilon_3'(r)| = \varepsilon_2(r) - \varepsilon_2(r+1) = \int\limits_r^{r+1} |\varepsilon_2'(t)|\,dt \leqslant \int\limits_r^{r+1} \varepsilon_2(t)\frac{1}{t\ln t}\,dt \leqslant \int\limits_r^{r+1} \varepsilon_3(t) \times \frac{\ln(t+1)}{t\ln^2 t}\,dt \leqslant \varepsilon_3(r)\int\limits_r^{r+1} \frac{\ln(t+1)}{t\ln^2 t}\,dt \leqslant \varepsilon_3(r)\frac{1}{r\ln r}$. Из этого неравенства и соотношения $\varepsilon_3(r) > \frac{M}{\ln r}$ следует, что функция $\rho_1(r)$, определяемая из уравнения $r^{\rho_1(r)} = \sqrt{\varepsilon_3(r)}\, r^{\rho(r)}$ является искомым уточненным порядком.

Пусть $h_2(\theta)$, $h_2(\theta) \geqslant 1$,— тригонометрически ρ-выпуклый индикатор. По теореме 6 существует целая функция $\omega(z)$ вполне регулярного роста с индикатором $h_2(\theta)$ относительно уточненного порядка $\rho_1(r)$ такая, что $\ln|\omega(a_n)| \sim h_2(\theta_n) r_n^{\rho_1(r_n)}$. Обозначим $u_n = \frac{b_n}{\varphi'(a_n)\,\omega(a_n)}$. Из оценки $\omega(a_n)$, неравенства $h_2(\theta) \geqslant 1$ и равенства (37) следует, что существует такая константа M,

что $|u_n| \leqslant M|a_n|^{-2\rho-2}$. Обозначим через C объединение кругов $C = \bigcup\limits_{a_n \in E} C(a_n, |a_n|^{-\rho-1})$. Сумма радиусов кругов, образующих множество C, конечна. Вне множества C справедлива оценка

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{u_n}{z+a_n}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\rho+1} |u_n| \leqslant M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\rho+1}} = M_1.$$

Функция $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(z)\,\omega(z)\,b_n}{(z-a_n)\,\varphi'(a_n)\,\omega(a_n)}$ решает интерполяционную задачу $f(a_n) = b_n$. Так как вне множества C справедливо неравенство $|f(z)| \leqslant M_1 |\varphi(z)|\,|\omega(z)|$, то индикатор функции $f(z)$ не превосходит $h(\theta)$. Импликация $в \Rightarrow а$ доказана.

Далее мы рассмотрим импликацию $д \Rightarrow г$. Из условия 1 пункта $д$, теоремы 5, условия 2 и теоремы 8 следует существование целой функции $\varphi(z)$ вполне регулярного роста с индикатором $h(\theta)$, которая обращается в ноль на множестве E и для которой справедливо равенство

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{z} \int_0^{\delta} \frac{\Phi_{\varphi,\, z}(\alpha)}{\alpha}\, d\alpha = 0. \tag{38}$$

К. Г. Малютин [13] доказал, что для целой функции $\varphi(z)$ вполне регулярного роста условия (38) и (36) эквивалентны. Для полноты изложения здесь воспроизведем доказательство К. Г. Малютина импликации $(38) \Rightarrow (36)$. Обозначим через

$$R_\delta(z) = \prod_{|\lambda_h - z| < \delta r} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right), \quad \varphi_\delta(z) = \frac{\varphi(z)}{R_\delta(z)}.$$

Так же как в [1] доказывается равенство $\lim\limits_{r \to \infty} r^{-\rho(r)} \ln|\varphi(re^{i\theta})| = h(\theta)$, $z \bar{\in} C_0$, где C_0 — исключительное множество нулевой линейной плотности, можно доказать, что

$$\lim_{r \to \infty} r^{-\rho(r)} \ln|\varphi_\delta(re^{i\theta})| - \rho \iint\limits_{C(e^{i\theta}, \delta)} \ln\left|1 - \frac{e^{i\theta}}{te^{i\varphi}}\right| t^{\rho-1} dt\, ds(\varphi). \tag{39}$$

Отметим также, что равенство (39) можно доказать с помощью леммы 4.4.4 из [4]. Обозначим $\varphi(z) = \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) e^{\frac{z}{\lambda_k} + \cdots + \frac{z^p}{\lambda_k^p}} \times \varphi_k(z)$. Тогда

$$\varphi'(\lambda_k) = -\frac{1}{\lambda_k} e^{1+\cdots+\frac{1}{p}} \varphi_k(\lambda_k) =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_k} e^{1+\cdots+\frac{1}{p}} \varphi_\delta(\lambda)_k \prod_{\substack{|\lambda_n - \lambda_k| < \delta|\lambda_k| \\ \lambda_n \neq \lambda_k}} \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_n}\right).$$

Откуда, учитывая (39), получим

$$\frac{1}{\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}}\ln|\varphi'(\lambda_k)| = h(\theta_k) - \rho \iint\limits_{C(e^{i\theta_k}\delta)} \ln\left|1-\frac{e^{i\theta_k}}{te^{i\varphi}}\right| t^{\rho-1}\,dt\,ds(\varphi) +$$

$$+\varepsilon(\lambda_k,\ \delta) + \frac{1}{|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}} \sum_{|\lambda_n-\lambda_k|<\delta|\lambda_k|} \ln\left|\frac{\lambda_k}{\lambda_n}\right| - \int\limits_0^\delta \ln\frac{1}{\alpha}\,d\Phi_{\varphi,\ \lambda_k}(\alpha), \tag{40}$$

где $\varepsilon(\lambda_k,\ \delta)\to 0$ при $\lambda_k\to\infty$. Далее имеем

$$1/2\ln\frac{1}{\delta^2}\,\Phi_{\varphi,\ z}(\delta^2) \leqslant \int\limits_{\delta^2}^{\delta} \frac{\Phi_{\varphi,\ z}(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha \leqslant \int\limits_0^\delta \frac{\Phi_{\varphi,\ z}(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha.$$

Из этого неравенства и (38) следует, что $\lim\limits_{\alpha\to 0}\sup\limits_z \ln\frac{1}{\alpha}\,\Phi_{\varphi,\ z}(\alpha)=0.$ Теперь из равенства

$$\int\limits_0^\delta \ln\frac{1}{\alpha}\,d\Phi_{\varphi,\ z}(\alpha) = \ln\frac{1}{\delta}\,\Phi_{\varphi,\ z}(\delta) + \int\limits_0^\delta \frac{\Phi_{\varphi,\ z}(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha$$

следует, что $\lim\limits_{\delta\to 0}\sup\limits_z \int\limits_0^\delta \ln\frac{1}{\alpha}\,d\Phi_{\varphi,\ z}(\alpha) = 0$. Пусть теперь ε — произвольное положительное число. Так как второе, четвертое и пятое слагаемые правой части (40) равномерно относительно λ_k стремятся к нулю при $\delta\to 0$, то существует такое δ, что сумма модулей этих слагаемых при этом δ и произвольном λ_k будет меньше чем $\varepsilon/2$. Затем найдем число R так, чтобы при выбранном δ и $|\lambda_k|>R$ выполнялось неравенство $|\varepsilon(\lambda_k,\ \delta)|<\varepsilon/2$. Тогда при $|\lambda_k|>R$ будет выполняться неравенство $||\lambda_k|^{-\rho(|\lambda_k|)}\times$ $\times\ln|\varphi'(\lambda_k)|-h(\theta_k)|<\varepsilon$. Тем самым неравенство (36), а вместе с ним и импликация $\partial\Rightarrow г$ доказаны.

Теперь остановимся на импликации $г\Rightarrow б$. Ее впервые доказал К. Г. Малютин [13]. Приводимое ниже доказательство основывается на другой идее. Пусть $f(z)$ целая функция с индикатором $h_1(\theta)$, $h_1(\theta)\leqslant h(\theta)$ решающая интерполяционную задачу $f(a_n)=b_n$. Существование такой функции мы доказали, доказав импликацию $в\Rightarrow а$. Пусть $\varphi(z)$ — целая функция вполне регулярного роста с индикатором $h(\theta)$, которая обращается в ноль на множестве E. Тогда существует множество кружков C_0 нулевой линейной плотности, вне которого справедливо соотношение $\ln|\varphi(re^{i\theta})|\approx h(\theta)\,r^{\rho(r)}$. Пусть $\psi(r)=\max\limits_{\substack{|z|=r\\ z\overline{\in}C_0}}\left|\frac{f(z)}{\varphi(z)}\right|$. Из свойств функций $f(z)$ и $\varphi(z)$ следует, что $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{\ln^+\psi(r)}{r^{\rho(r)}}=0$. Существует

такой уточненный порядок $\rho_1(r)$, что $\lim_{r\to\infty}\rho_1(r)=\rho$, $\lim_{r\to\infty} r^{\rho_1(r)-\rho(r)}=$ $=0$, $\lim_{r\to\infty}\frac{\ln^+\psi(r)}{r^{\rho_1(r)}}=0$. Доказательство существования функции $\rho_1(r)$ уже проводили. Пусть $h_2(\theta)$ — тригонометрически ρ-выпуклый индикатор, $h_2(\theta)\geqslant 1$. Пусть $\omega(z)$ — целая функция вполне регулярного роста с индикатором $h_2(\theta)$ относительно уточненного порядка $\rho_1(r)$. Тогда существует множество кругов $\widetilde{C}$ нулевой линейной плотности, вне которого отношение $\frac{f(z)}{\varphi(z)\,\omega(z)}$ стремится к нулю при $z\to\infty$. Функция $\varphi(z)\,\omega(z)$ является функцией вполне регулярного роста с индикатором $h(\theta)$ относительно уточненного порядка $\rho(r)$. Следовательно, такой же является функция $f_1(z)=f(z)+\varphi(z)\,\omega(z)$. Кроме того, $f_1(a_n)=b_n$. Импликация $г\Rightarrow \delta$ доказана.

Доказательство импликации $a\Rightarrow\partial$. Пусть $\varepsilon(t)=t^{-\rho(t)}$, а D_j — та система областей, которая строится в лемме 6. Выберем в каждой из областей D_j по точке α_j из множества E, если такие точки там есть. Множество выбранных точек обозначим A, а множество оставшихся точек — B, так что $E=A\cup B$. Пусть $f(z)$ целая функция с индикатором $h_1(\theta)$, $h_1(\theta)\leqslant h(\theta)$ относительно уточненного порядка $\rho(r)$, для которой выполнены равенства $f(a_n)=\exp h(\theta_n)\,r_n^{\rho(r_n)}$, $a_n=r_ne^{i\theta_n}$, если $a_n\in A$, $f(a_n)=0$, если $a_n\in B$. Определим отображение T на множестве B следующим образом. Если $a_n\in B\cap D_j$, то $T(a_n)=\alpha_j$. В силу свойства 2 леммы 6 отображение T асимптотически тождественное на бесконечности. Кроме того, $\ln|f(z)|=h(\theta)\,r^{\rho(r)}$ при $z\in T(B)$. Таким образом, множество B есть множество регулярного роста функции $f(z)$ относительно индикатора $h(\theta)$. Функция $f(z)$ обращается в ноль на множестве B. Тогда по теореме 4 $d_B(K)\leqslant\mu_H(K)$ для любого компакта K. Так как по свойству 3 леммы 6 множество A имеет нулевую угловую плотность относительно уточненного порядка $\rho(r)$, то $d_E(K)\leqslant\mu_H(K)$ для любого компакта K. Пункт первый условия ∂ доказан.

Далее доказываем пункт второй. Из непрерывности индикатора следует, что для любого положительного ε существует положительное число γ такое, что при $\delta\leqslant 2\gamma$, $|z-z_0|\leqslant\delta|z_0|$ и $|z_0|\geqslant 1$ будет выполняться неравенство

$$r^{\rho(r)}h(\theta)\leqslant r_0^{\rho(r_0)}\left(h(\theta_0)+\frac{\varepsilon}{2}\right),\ z=re^{i\theta},\ z_0=r_0e^{i\theta_0}.$$

Докажем, что

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{a_k}\int_0^{\delta}\frac{\Phi_{E,\,a_k}(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha=0. \tag{41}$$

Если это не так, то существуют положительное число η, последовательность $\alpha_k \in E$ и последовательность $\delta_k \to 0$ такие, что

$$\int_0^{\delta_k} \frac{\Phi_{E,\,\alpha_k}(\alpha)}{\alpha}\, d\alpha \geqslant \eta. \tag{42}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $|\alpha_{k+1}| > 2|\alpha_k|$. Пусть $f(z)$ — целая функция с индикатором $h_1(\theta)$, $h_1(\theta) \leqslant h(\theta)$, решающая интерполяционную задачу $f(\alpha_k) = \exp(h(\sigma_k)\, t_k^{\rho(t_k)})$, $\alpha_k = t_k e^{i\sigma_k}$, $f(a_n) = 0$, если a_n не совпадает ни с одной из точек α_k. Пусть $m_k + 1$ — число точек множества E, попавших в круг $C(\alpha_k,\ \gamma|\alpha_k|)$. Составим по этим точкам для функции $f(z)$ разделенную разность A_{m_k} порядка m_k. Для величины A_{m_k} имеют место такие формулы (см., например, [11, гл. 1, § 3])

$$A_{m_k} = \sum_{a_n \in C(\alpha_k,\ \gamma|\alpha_k|)} \frac{f(a_n)}{\omega'(a_n)} = \frac{\exp(h(\sigma_k)\, t_k^{\rho(t_k)})}{\omega'(\alpha_k)}, \tag{43}$$

где $\omega(z) = \prod\limits_{a_n \in C(\alpha_k,\ \gamma|\alpha_k|)} (z - a_n)$,

$$A_{m_k} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - \alpha_k| = 2\gamma|\alpha_k|} \frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)}\, d\zeta. \tag{44}$$

Если $a_n \in C(\alpha_k,\ \gamma t_k)$, а $|\zeta - \alpha_k| = 2\gamma t_k$, то $|\zeta - a_n| \geqslant \gamma t_k$, $|\omega(\zeta)| \geqslant \gamma^{m_k+1} t_k^{m_k+1}$. Существует такое число R, $R \geqslant 1$, что при $|z| \geqslant R$ будет выполняться неравенство $\ln|f(z)| < \left(h(\theta) + \frac{\varepsilon}{2}\right) r^{\rho(r)}$. Тогда в силу выбора числа γ при $t_k \geqslant R$ будет выполняться неравенство $|f(\zeta)| < \exp(h(\sigma_k) + \varepsilon)\, t_k^{\rho(t_k)}$ при $|\zeta - \alpha_k| = 2\gamma t_k$. Теперь из формулы (44) получаем

$$A_{m_k} \leqslant \frac{e^{(h(\sigma_k)+\varepsilon)t_k^{\rho(t_k)}}}{\gamma^{m_k} t_k^{m_k}}.$$

Далее из формулы (43) следует

$$\ln \frac{t_k^{m_k}}{|\omega'(\alpha_k)|} < \varepsilon t_k^{\rho(t_k)} + m_k \ln \frac{1}{\gamma}.$$

Разделим обе части неравенства на $t_k^{\rho(t_k)}$ и заметим, что левая часть полученного неравенства есть не что иное как $\int_0^{\gamma} \ln \frac{1}{\alpha}\, d\Phi_{E,\,\alpha_k}(\alpha)$. Поэтому

$$\int_0^{\gamma} \ln \frac{1}{\alpha}\, d\Phi_{E,\,\alpha_k}(\alpha) < \varepsilon + \Phi_{E,\,\alpha_k}(\gamma) \ln \frac{1}{\gamma}.$$

Заметим, что $\Phi_{E, \alpha_k}(\alpha)$ равна нулю в некоторой окрестности нуля. Поэтому, проводя интегрирование по частям в левой части неравенства, мы получим, что $\int\limits_0^1 \frac{\Phi_{E, \alpha_k}(\alpha)}{\alpha} d\alpha < \varepsilon$. Это противоречит (42), и, значит, равенство (41) доказано. Заметив еще, что при $\alpha < 0{,}5$ имеет место оценка $\Phi_{E, z}(\alpha) < M\Phi_{E, a_k}(\alpha)$, где a_k — ближайшая к z точка множества E, получим

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_z \int\limits_0^\delta \frac{\Phi_{E, z}(\alpha)}{\alpha} d\alpha = 0.$$

Список литературы: 1. *Ибрагимов И. И.* Методы интерполяции функций и некоторые их приложения.— М.: Наука, 1976.— 518 с. 2. *Руссаковский А. М.* Об интерполяции в классе целых функций, имеющих индикатор не выше данного.— Теория функций, функц. анализ и их прил., 1982, вып. 37, с. 111—114. 3. *Малютин К. Г.* Интерполяция голоморфными функциями: Дис. ... канд. физ.-мат. наук, Харьков, 1980.— 104 с.

Поступила в редколлегию 27.01.82.

УДК 513.77

В. И. ГУРАРИЙ, В. Ц. ЛЕВЕНТАЛЬ

ТЕОРЕМА О МНОГОГРАННЫХ КОНУСАХ

Настоящая заметка посвящена установлению следующей связи между многогранными конусами и шарами в E_N: пусть $x_0, x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$ — векторы из E_N, удовлетворяющие таким условиям:

$$\| x_i \| = 1 \qquad i = \overline{0, n} \ \ \textbf{(1)},$$
$$\| x_0 - x_i \| \leqslant 1 \quad i = \overline{1, n} \ \ \textbf{(2)}.$$

Пусть, далее, $B_0, B_1, \ldots, B_n$ — шары радиуса 1 с центрами в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ соответственно. Тогда для того, чтобы x_0 принадлежал конической оболочке C векторов $x_1, \ldots, x_n$, необходимо и достаточно, чтобы $\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i \subset B_0$ **(3)**.

С использованием алгебраической записи условия (3) результат можно переформулировать таким образом:

Теорема 1. *Пусть* $x_0, x_1, \ldots, x_n \in E_N$ *удовлетворяют условиям (1) и (2), и пусть* $C = \operatorname{cone}(x_1, \ldots, x_n)$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:* (I) $x_0 \in C$. (II) *Для любого* $y \in E_N$, *такого, что* $y \neq 0$, $\| x_0 - y \| = 1$ *существует такое,* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *что* $\| x_i - y \| > 1$.

Доказательство. (I) $\Rightarrow$ (II). Пусть $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, $\alpha_i \geqslant 0$, $i = \overline{1, n}$.

В силу (1), так как все векторы x_i, $i = \overline{1, n}$ различны, имеем $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i > 1$ **(4).**

Предположим далее, что для некоторого $y \in E_N$ такого, что $y \neq 0$ $\|x_0 - y\| = 1$ и для всех $i = \overline{1, n}$ выполнено $\|x_i - y\| \leqslant 1$, что эквивалентно неравенству

$$(y, y) \leqslant 2(x_i, y) \tag{5}$$

Суммируя (5) с коэффициентами α_i имеем $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (y, y) \leqslant \leqslant 2(x_0, y)$, откуда с учетом (1) $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - 1\right)(y, y) + \|x_0 - y\|^2 \leqslant \leqslant 1$, что в силу (4) противоречит определению y.

(II) $\Rightarrow$ (I). Пусть $x_0 \bar{\in} C$. Тогда по лемме Фаркаша [1, с. 119] существует $b \in E_N$ такое, что $(b, x_i) \geqslant 0$, $i = \overline{1, n}$, $(b, x_0) = = u < 0$.

Так как вектор b можно выбрать нормированным и в силу (2)

$$(x_0, x_i) \geqslant 1/2, \quad i = \overline{1, n}, \tag{6}$$

то можно считать, что $u > -1$.

Для любого числа t такого, что $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{u^2}$, введем вектор $y = y(t) = \alpha x_0 + \beta b$ и потребуем, чтобы $\|y\|^2 = 1 - tu^2$ **(7),** $\|x_0 - y\|^2 = 1$ **(8).**

Равенства (7) и (8) выполняются при

$$\beta = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{1 + tu^2}{2}\right)^2}{1 - u^2}}, \ \alpha = \frac{1 - tu^2}{2} - \beta u.$$

Учитывая (6), получаем, что для $i = \overline{1, n}$

$$\|y - x_i\|^2 = 1 + 1 - tu^2 - 2\alpha(x_0, x_i) - 2\beta(x_i, b) \leqslant$$

$$\leqslant 2 - tu^2 - \alpha = \frac{3}{2} - \frac{tu^2}{2} + u\sqrt{\frac{1 - \left(\frac{1 + tu^2}{2}\right)^2}{1 - u^2}}.$$

Рассмотрим функцию $f_u(t) = \frac{tu^2}{2} - u\sqrt{\frac{1 - \left(\frac{tu^2 + 1}{2}\right)^2}{1 - u^2}}$.

Так как $f_u\left(\frac{1}{u^2}\right)=\frac{1}{2}$, а

$$f_u'(t)=\frac{u^2}{2}\left(1+\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{1+tu^2}{2\sqrt{1-\left(\frac{tu^2+1}{2}\right)^2}}\right)\xrightarrow[t\to\frac{1}{u^2}-0]{}-\infty,$$

то, выбирая t достаточно близким к $\frac{1}{u^2}$, получим $\|y(t)-x_i\|^2<$ <1, $i=\overline{1,n}$, что доказывает теорему.

В качестве иллюстрации полученного результата приведем решение известной проблемы Борсука [2] для плоских многоугольников, т. е. докажем, что любое конечное множество точек X на плоскости можно разбить на 3 части меньшего диаметра, под диаметром множества A понимаем $\operatorname{diam} A=\sup\limits_{x,\,y\in A}\|x-y\|$.

Для заданного множества $x=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}\subset E_2$ введем граф G с множеством вершин $\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$, в котором ξ_i смежна с ξ_j тогда и только тогда, когда $\|x_i-x_j\|=\operatorname{diam} X$. Очевидно, что гипотеза Борсука для плоских многоугольников может быть переформулирована таким образом: граф G, соответствующий множеству $X\subset E_2$, является 3-хроматичным.

Докажем эту гипотезу методом от противного. Пусть $X\subset E_2$ — конечное множество, удовлетворяющее следующим условиям:

1) X не разбиваемо на 3 части меньшего диаметра;

2) любое подмножество X разбиваемо на 3 части меньшего диаметра; (нетрудно доказать, что любое множество X', удовлетворяющее условию 1, содержит подмножество X, удовлетворяющее обоим условиям). Тогда граф G, соответствующий X, является минимальным 4-хроматическим графом, и по теореме 12.23 [3, с. 168] степень каждой его вершины ξ_i не меньше 3. Не умаляя общности, можно считать, что $\operatorname{diam} X=1$, $x_0=0$, $\|x_i\|=1$, $i=1, 2, 3$.

Так как $\|x_i-x_j\|\leqslant 1$, $i, j=\overline{1,n}$, то все углы между векторами x_1, x_2, x_3 не превосходят 60°, а следовательно, один из этих векторов, например, x_1 принадлежит конической оболочке двух других. Но так как степень вершины ξ_1 графа G больше 2, то существует $x_l\in X$, $x_l\neq 0$, $l>3$, такое, что $\|x_l-x_1\|=1$. Так как при этом $\|x_l\|\leqslant 1$, то по доказанной теореме $\|x_l-$ $-x_2\|>1$ или $\|x_l-x_3\|>1$, что доказывает гипотезу.

Представляется вероятным получение указанным методом доказательства гипотезы Борсука для трехмерных многогранников. Как известно, существующее доказательство этого факта весьма сложно.

В заключение приведем очевидные обобщения теоремы 1 на случай бесконечного множества «образующих» конуса C. Пусть H — некоторое вещественное нормированное линейное пространство, $x_0\in H$, $\{x_i\}_{i\in I}\subset H$, причем $\|x_0\|=1$, $\|x_i\|=1$, $i\in I$ **(9)**, $\|x_0-x_i\|\leqslant 1$, $i\in I$ **(10)**.

Пусть далее C_0 — множество всех линейных комбинаций конечного числа x_i с неотрицательными коэффициентами, а C — замыкание C_0.

Теорема 2. *Пусть $H = E_N$. Тогда справедливо утверждение теоремы 1.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 за исключением того, что при получении неравенства (4) нужно воспользоваться теоремой Каратеодори [4, с. 171] и вместо леммы Фаркаша применить теорему о сильной отделимости.

Теорема 3. *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, вектор x_0 и множество $\{x_i\}_{i \in I}$ удовлетворяют условиям (9) и (10). Тогда для того, чтобы $x_0 \in C$, достаточно, а если множество $\{x_i\}$ слабо замкнуто, то и необходимо, чтобы для каждого $y \in H$, такого, что $\| x_0 - y \| = 1$ существовало такое $i \in I$, что $\| x_i - y \| \geqslant 1$.*

Доказательство. Достаточность доказывается так же, как и соответствующая часть теоремы 2.

Необходимость. Если $x_0 \in C_0$, то дословно повторяется соответствующая часть доказательства теоремы 1. Пусть $x_0 \in C$ является пределом последовательности $\{z_k\}_1^\infty \subset C_0$. Очевидно, что векторы z_k можно выбрать нормированными. Пусть $y \in H$ таково, что $\| x_i - y \| < 1$, $i \in I$, $\| x_0 - y \| = 1$. Рассмотрим точки $y_k = (1 - t_k) y + t_k z_k$, где t_k определяется из условия $\| y_k - z_k \| = | 1 - t_k | \cdot \| y_k - z_k \| = 1$. Поскольку $z_k \in C_0$, то для любого k существует такое $i_k \in I$, что $\| x_{i_k} - y_k \| > 1$, а поскольку по условию теоремы множество $\{x_i\}$ слабо компактно, то, рассматривая слабо сходящуюся последовательность $\{x_{i_k}\}_{k=1}^\infty$ и переходя к пределу, получим требуемое утверждение.

Список литературы: 1. *Черников С. Н.* Линейные неравенства.— М.: Наука, 1968.— 488 с. 2. *Грюнбаум В.* Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел.— М.: Наука, 1971.— 94 с. 3. *Харари Ф.* Теория графов.— М.: Мир, 1973.— 300 с. 4. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ.— М.: Мир, 1973.— 467 с.

Поступила в редколлегию 25.09.82

УДК 517.54

В. К. ДУБОВОЙ

ИНДЕФИНИТНАЯ МЕТРИКА В ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ПРОБЛЕМЕ ШУРА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. IV*

10. Решение вырожденной задачи Шура. В этом параграфе будет указан метод решения основных матричных неравенств

* Первые три части статьи опубликованы в выпусках 37, 38 и 41 этого сборника. Отметим, что для чтения этой статьи достаточно знакомства с I частью данной работы.

(S) и $(\tilde{S})$ (см. § 1) в случае вырождения основного информационного блока $A_n = I - C_n C_n^*$. Для отщепления ядра блока A_n вводится понятие подпространства типа K (п. 1). После отщепления ядра решение представляется в виде дробно-линейного преобразования матрицы-функции $\omega(\zeta) \in S_{p,q}$ (п. 1; леммы 10,1, 10.2) При этом матрицей коэффициентов дробно-линейного преобразования является элементарный кратный множитель неполного ранга [2]. Наличие ядра накладывает ограничения на параметр $\omega(\zeta)$, характер которых выясняется в п. 2. Окончательные результаты сформулированы в теоремах 10.1 и 10.2. Наконец, в п. 3 приведен пример подпространства типа K.

Заметим, что задачи с вырожденным информационным блоком рассматривались А. А. Нудельманом [3], И. П. Федчиной [4], Л. А. Галстяном [5]. Однако методы предлагаемые в этой работе отличны от рассматриваемых ранее.

1. В дальнейшем удобно отождествить функции $\omega(\zeta) \in S_{p,q}$ с операторнозначными функциями, действующими из пространства E_- $(\dim E_- = q)$ в пространство E_+ $(\dim E_+ = p)$.

В силу блочной структуры оператора C_k будем считать, что A_k действует в пространстве

$$E_+^{(k)} = E_+ \oplus E_+ \oplus \cdots \oplus E_+, \tag{10.1}$$

где E_+ повторено $k+1$ раз. Это позволяет вложить $E_+^{(k-1)}$ в $E_+^{(k)}$, положив $E_+^{(k)} = E_+^{(k-1)} \oplus E_+$. Таким образом,

$$E_+ = E_+^{(0)} \subset E_+^{(1)} \subset \cdots \subset E_+^{(n)}. \tag{10.2}$$

Определение. *Будем говорить, что подпространство* $L \subset E_+^{(n)}$ *является подпространством типа* K, *если*

1) L *является дополнением к* $\operatorname{Ker} A_n$, *т. е.* $L \dotplus \operatorname{Ker} A_n = E_+^{(n)}$;

2) L *инвариантно относительно* $V_{p,n}^*$, где

$$V_{p,n} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ I_p & 0 & & & & \\ & I_p & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & I_p & 0 \end{bmatrix}.$$

В пункте 3 приводится пример подпространства типа K. Отсюда, в частности, следует, что подпространств типа K бесконечно много.

Пусть L — произвольное подпространство типа K и P — ортопроектор на L. Тогда очевидно,

$$V_{p,n}^* P = P V_{p,n}^* P. \tag{10.3}$$

Пусть, далее, $\tilde{C}_n = PC_n$, $A_n^{(1)} = (P - \tilde{C}_n \tilde{C}_n^*)_{|L} = PA_nP_{|L}$. Ортогональное разложение $E_+^{(n)} = L \oplus \tilde{L}$ позволяет рассмотреть блочное представление A_n

$$A_n = \begin{bmatrix} A_n^{(1)} & B \\ B^* & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix}, \tag{10.4}$$

где X является решением уравнения $A_n^{(1)} X = B$. Из (10.4) следует, что $\operatorname{Ker} A_n$ состоит из векторов $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in L$, $f_2 \in \tilde{L}$, $f_1 = -Xf_2$, т. е. $\operatorname{Ker} A_n = \Delta \begin{bmatrix} -X \\ I \end{bmatrix}$. Значит,

$$\operatorname{Ker} [-X^*, \ I] = \Delta_{A_n}. \tag{10.5}$$

В дальнейшем существенную роль играют следующие свойства $\tilde{C}_n$;

$$\tilde{C}_n V_{q,n} = PV_{p,n} \tilde{C}_n, \tag{10.6}$$

$$P - \tilde{C}_n \tilde{C}_n^* \geqslant 0, \quad \operatorname{rang} (P - \tilde{C}_n \tilde{C}_n^*) = \operatorname{rang} P. \tag{10.7}$$

Для получения (10.6) достаточно равенство $C_n V_{q,n} = V_{p,n} C_n$ умножить слева на P и воспользоваться (10.3). Соотношения (10.7) следует из того, что L — подпространство типа K и $P - \tilde{C}_n \tilde{C}_n^* = PA_nP$.

При разложении $E_+^{(n)} = L \oplus \tilde{L}$ оператор $P - \tilde{C}_n \tilde{C}_n^*$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} A_n^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В связи с этим символом $(P - \tilde{C}_n \tilde{C}_n^*)^{-1}$ обозначим оператор вида

$$\begin{bmatrix} A_n^{(1)-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Приступим к решению неравенств (S) и $(\tilde{S})$. Записав (S) в виде (см. § 1, (1.4))

$$\begin{bmatrix} I - C_n C_n^* & B^{(1)}(\zeta, \ n) \\ B^{(1)*}(\zeta, \ n) & \dfrac{I - \theta(\zeta)\theta^*(\zeta)}{1 - |\zeta|^2} \end{bmatrix} \geqslant 0,$$

$$B^{(1)}(\zeta, \ n) = \Lambda_{p,n}^*(\zeta) - C_n \Lambda_{q,n}^*(\zeta) \theta^*(\zeta),$$

умножим его справа на

$$T = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix},$$

а слева на T^*. Принимая во внимание (10.4), приходим к эквивалентному неравенству

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X^* & I \end{bmatrix} B^{(1)}(\zeta, n) \\ * \qquad \dfrac{I-\theta(\zeta)\theta^*(\zeta)}{1-|\zeta|^2} \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

По лемме о неотрицательной блок-матрице (см., например, [6, с. 88) получаем, что последнее неравенство эквивалентно соотношениям

$$[-X^*, \ I]\, B^{(1)}(\zeta, n) = 0, \tag{10.8}$$

$$\frac{I-\theta(\zeta)\theta^*(\zeta)}{1-|\zeta|^2} - B^{(1)*}(\zeta, n)\,(P-\widetilde{C}_n\widetilde{C}_n^*)^{-1} B^{(1)}(\zeta, n) = 0. \tag{10.9}$$

Сейчас решим неравенство (10.9), а затем во множестве решений выберем те, которые удовлетворяют условию (10.8). Тем самым множество решений неравенства (S) будет полностью описано.

Неравенство (10.9) решаем так же, как и в невырожденном случае, а именно, учитывая, что

$$\frac{I-\theta(\zeta)\theta^*(\zeta)}{1-|\zeta|^2} = [\theta(\zeta), \ I]\,\frac{j}{1-|\zeta|^2}\begin{bmatrix} \theta^*(\zeta) \\ I \end{bmatrix};$$

$$B^{(1)}(\zeta, n) = [-C_n, \ I]\begin{bmatrix} \Lambda_{q,n}^*(\zeta) & 0 \\ 0 & \Lambda_{p,n}^*(\zeta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta^*(\zeta) \\ I \end{bmatrix}, \tag{10.10}$$

перепишем (10.9) в виде

$$[\theta(\zeta), \ I]\Bigg\{\frac{j}{1-|\zeta|^2} - $$

$$-j\begin{bmatrix} \Lambda_{q,n}(\zeta) & 0 \\ 0 & \Lambda_{p,n}(\zeta) \end{bmatrix} H_n \begin{bmatrix} \Lambda_{q,n}^*(\zeta) & 0 \\ 0 & \Lambda_{p,n}^*(\zeta) \end{bmatrix} j\Bigg\}\begin{bmatrix} \theta^*(\zeta) \\ 0 \end{bmatrix} \geqslant 0, \tag{10.11}$$

где

$$H_n = \begin{bmatrix} \widetilde{C}_n^* \\ P \end{bmatrix} (P-\widetilde{C}_n\widetilde{C}_n^*)^{-1}\, [\widetilde{C}_n, \ P].$$

В силу (10.3), (10.6) и (10.7), как показано в [2],

$$B_n(\zeta) = I + \frac{1-\zeta}{\zeta}\, j \begin{bmatrix} \Lambda_{q,n}(1) & 0 \\ 0 & \Lambda_{p,n}(1) \end{bmatrix} H_n \begin{bmatrix} \Lambda_{q,n}^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) & 0 \\ 0 & \Lambda_{p,n}^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \end{bmatrix} \tag{10.12}$$

является j-растягивающим элементарным кратным множителем, при этом

$$B_n^*(\zeta)\, jB_n(\zeta) - j = \frac{1-|\zeta|^2}{|\zeta|^2} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \Lambda_{q,n}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) & 0 \\ 0 & \Lambda_{p,n}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \end{bmatrix} H_n \begin{bmatrix} \Lambda_{q,n}^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) & 0 \\ 0 & \Lambda_{p,n}^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \end{bmatrix}.$$

Так как $B_n^{*-1}(\zeta) = jB_n\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) j$, то

$$\frac{j - B_n^{-1}(\zeta)\, jB_n^{*-1}(\zeta)}{1-|\zeta|^2} =$$

$$= j\begin{bmatrix} \Lambda_{q,n}(\zeta) & 0 \\ 0 & \Lambda_{p,n}(\zeta) \end{bmatrix} H_n \begin{bmatrix} \Lambda_{q,n}^*(\zeta) & 0 \\ 0 & \Lambda_{p,n}^*(\zeta) \end{bmatrix} j.$$

Поэтому (10.11) можно переписать следующим образом

$$[\theta(\zeta),\ I]\, \frac{B_n^{-1}(\zeta)\, jB_n^{*-1}(\zeta)}{1-|\zeta|^2} \begin{bmatrix} \theta^*(\zeta) \\ I \end{bmatrix} \geqslant 0. \qquad (10.13)$$

Определим пару матриц-функций, полагая $[\theta(\zeta),\ I]\, B_n^{-1}(\zeta) = [u(\zeta),\ v(\zeta)]$ **(10.14).** Как и в невырожденном случае проверяется, что $[u(\zeta),\ v(\zeta)]$ является голоморфной, j-нерастягивающей и неособенной парой в единичном круге, т. е. имеет смысл частное $\omega(\zeta) = v^{-1}(\zeta)\, u(\zeta) \in S_{p,q}$ **(10.15).**

Разобьем $B_n(\zeta)$ на блоки соответственно блокам матрицы j

$$B_n(\zeta) = \begin{bmatrix} a(\zeta) & b(\zeta) \\ c(\zeta) & d(\zeta) \end{bmatrix}.$$

Тогда из (10.14) с учетом (10.15) получим $\theta(\zeta) = [\omega(\zeta)\, b(\zeta) + d(\zeta)]^{-1} [\omega(\zeta)\, a(\zeta) + c(\zeta)]$ **(10.16).** Обратно, если $\omega(\zeta) \in S_{p,q}$, то матрица-функция $\omega(\zeta)\, b(\zeta) + d(\zeta)$ обратима всюду в единичном круге и $\theta(\zeta)$ удовлетворяет (10.13), а значит, и (10.9). Итак, доказана

Лемма 10.1. *Общее решение $\theta(\zeta)$ неравенства (10.9) представляется в виде дробно-линейного преобразования (10.16) произвольной матрицы-функции $\omega(\zeta) \in S_{p,q}$. Матрицей коэффициентов дробно-линейного преобразования является j-растягивающий элементарный кратный множитель (10.12), построенный по матрице C_n и одному из подпространств типа K.*

Выясним, какие требования к параметру $\omega(\zeta)$ предъявляет условие (10.8). Из (10.16) следует

$$\begin{bmatrix} \theta^*(\zeta) \\ I \end{bmatrix} = B_n^*(\zeta) \begin{bmatrix} \omega^*(\zeta) \\ I \end{bmatrix} q^*(\zeta),\ \ q(\zeta) = (\omega(\zeta)\, b(\zeta) + d(\zeta))^{-1}.$$

Поэтому, учитывая (10.10), получаем

$$B^{(1)}(\zeta, n) = [-C_n, I]\begin{bmatrix}\Lambda^*_{q,n}(\zeta) & 0\\ 0 & \Lambda^*_{p,n}(\zeta)\end{bmatrix} B^*_n(\zeta)\begin{bmatrix}\omega^*(\zeta)\\ I\end{bmatrix} q^*(\zeta). \quad (10.17)$$

Простой подсчет дает $\Lambda^*_{p,n}(\zeta)\Lambda_{p,n}\left(\frac{1}{\bar\zeta}\right) = D_{p,n}(\bar\zeta) + D^*_{p,n}\left(\frac{1}{\zeta}\right) + I$, где $D_{p,n}(\zeta) = \zeta V_{p,n} + \zeta^2 V^2_{p,n} + \cdots + \zeta^n V^n_{p,n}$. Пусть для краткости

$$\Phi_n(\zeta) = \begin{bmatrix} D_{q,n}(\bar\zeta) + D^*_{q,n}\left(\frac{1}{\zeta}\right) + I & 0\\ 0 & D_{p,n}(\bar\zeta) + D^*_{p,n}\left(\frac{1}{\zeta}\right) + I.\end{bmatrix}.$$

Тогда вид (10.12) $B_n(\zeta)$ позволяет переписать (10.17) следующим образом:

$$B^{(1)}(\zeta, n) = [-C_n, I]\left\{\begin{bmatrix}\Lambda^*_{q,n}(\zeta) & 0\\ 0 & \Lambda^*_{p,n}(\zeta)\end{bmatrix} + \right.$$
$$\left. + \frac{1-\bar\zeta}{\bar\zeta}\Phi_n(\zeta) H_n \begin{bmatrix}\Lambda^*_{q,n}(1) & 0\\ 0 & \Lambda^*_{p,n}(1)\end{bmatrix} j\right\}\begin{bmatrix}\omega^*(\zeta)\\ I\end{bmatrix} q^*(\zeta). \quad (10.18)$$

Заметив, что

$$\Lambda^*_{p,n}(\zeta) = \left(I - \frac{1-\bar\zeta}{\bar\zeta} D_{p,n}(\bar\zeta)\right)\Lambda^*_{p,n}(1),$$

имеем

$$[-C_n, I]\begin{bmatrix}\Lambda^*_{q,n}(\zeta) & 0\\ 0 & \Lambda^*_{p,n}(\zeta)\end{bmatrix} = [-C_n, I] \times$$
$$\times\left(I - \frac{1-\bar\zeta}{\bar\zeta}\begin{bmatrix}D_{q,n}(\bar\zeta) & 0\\ 0 & D_{p,n}(\bar\zeta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Lambda^*_{q,n}(1) & 0\\ 0 & \Lambda^*_{p,n}(1)\end{bmatrix}\right) =$$
$$= \left(I - \frac{1-\bar\zeta}{\bar\zeta} D_{p,n}(\bar\zeta)\right)[-C_n, I] \times \begin{bmatrix}\Lambda^*_{q,n}(1) & 0\\ 0 & \Lambda^*_{p,n}(1)\end{bmatrix}. \quad (10.19)$$

Далее, с учетом того, что $\tilde C_n = P_n C_n$, получаем

$$[-C_n, I]\Phi_n(\zeta) H_n = [-C_n, I]\Phi_n(\zeta)\begin{bmatrix}C^*_n\\ I\end{bmatrix}(P - \tilde C_n \tilde C^*_n)^{-1}[C_n, I] =$$
$$= \left\{A_n\left(I + D^*_{p,n}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right) + D_{p,n}(\bar\zeta) A_n\right\}(P - \tilde C_n \tilde C^*_n)^{-1}[C_n, I] =$$
$$= \left\{A_n\left(I + D^*_{p,n}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right)(P - \tilde C_n \tilde C^*_n)^{-1} + D_{p,n}(\bar\zeta)\begin{bmatrix}I & 0\\ X^* & 0\end{bmatrix}\right\}[C_n, I].$$

Таким образом, из (10.18) и (10.19) следует

$$B^{(1)}(\zeta, n) = \left\{ I - \frac{1-\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}} D_{p,n}(\zeta) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -X^* & I \end{bmatrix} + \frac{1-\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}} A_n \left(I + D^*_{p,n}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right) \times \right.$$
$$\left. \times (P - \widetilde{C}_n \widetilde{C}_n^*)^{-1} \right\} [-C_n,\ I] \begin{bmatrix} \Lambda^*_{q,n}(1) & 0 \\ 0 & \Lambda^*_{p,n}(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^*(\zeta) \\ I \end{bmatrix} q^*(\zeta).$$

Отсюда и из (10.5) находим, что условие (10.8) равносильно равенству

$$[-X^*,\ I] \left(I - \frac{1-\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}} D_{p,n}(\bar{\zeta}) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -X^* & I \end{bmatrix} \right) [-C_n,\ I] \times$$
$$\times \begin{bmatrix} \Lambda^*_{q,n}(1) & 0 \\ 0 & \Lambda^*_{p,n}(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^*(\zeta) \\ I \end{bmatrix} = 0,$$

или

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -X^* & I \end{bmatrix} \left(I - \frac{1-\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}} D_{p,n}(\bar{\zeta}) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -X^* & I \end{bmatrix} \right) [-C_n,\ I] \times$$
$$\times \begin{bmatrix} \Lambda^*_{q,n}(1) & 0 \\ 0 & \Lambda^*_{p,n}(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^*(\zeta) \\ I \end{bmatrix} = 0,$$

т. е.

$$\left(I - \frac{1-\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -X^* & I \end{bmatrix} D_{p,n}(\bar{\zeta}) \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -X^* & I \end{bmatrix} [-C_n,\ I] \times$$
$$\times \begin{bmatrix} \Lambda^*_{q,n}(1) & 0 \\ 0 & \Lambda^*_{p,n}(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^*(\zeta) \\ I \end{bmatrix} = 0.$$

Отсюда следует, что (10.8) эквивалентно условию

$$[-X^*,\ I] [-C_n,\ I] \begin{bmatrix} \Lambda^*_{q,n}(1) & 0 \\ 0 & \Lambda^*_{p,n}(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^*(\zeta) \\ I \end{bmatrix} = 0.$$

Обозначив через P_0 ортопроектор на $\operatorname{Ker} A_n$, полученное условие можно переписать в виде

$$P_0 [-C_n,\ I] \begin{bmatrix} \Lambda^*_{q,n}(1) & 0 \\ 0 & \Lambda^*_{p,n}(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^*(\zeta) \\ I \end{bmatrix} = 0. \tag{10.20}$$

Обратимся теперь к неравенству $(\widetilde{S})$ (см. п. 1):

$$\begin{bmatrix} I - C_n C_n^* & \widetilde{B}^{(1)}(\zeta, n) \\ \widetilde{B}^{(1)*}(\zeta, n) & \dfrac{I - \theta^*(\zeta)\,\theta(\zeta)}{1 - |\zeta|^2} \end{bmatrix} \geqslant 0,$$

где

$$\widetilde{B}^{(1)}(\zeta, n) = \frac{1}{\zeta} \Lambda^*_{p,n}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \theta(\zeta) - \frac{1}{\zeta} C_n \Lambda^*_{q,n}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right).$$

Умножив неравенство ($\tilde{S}$), как и неравенство (S) справа на

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix},$$

а слева на $\tilde{T}^*$, получим эквивалентное неравенство

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X^* & I \end{bmatrix} \tilde{B}^{(1)}(\zeta, n) \\ * & \dfrac{I - \theta^*(\zeta)\,\theta(\zeta)}{1 - |\zeta|^2} \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

Как и в случае неравенства (S), приходим к тому, что последнее неравенство равносильно условиям

$$[-X^*,\ I]\, \tilde{B}^{(1)}(\zeta, n) = 0, \tag{10.21}$$

$$\frac{I - \theta^*(\zeta)\,\theta(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}\zeta} - \tilde{B}^{(1)*}(\zeta, n)\,(P - \tilde{C}_n\tilde{C}_n^*)^{-1}\,\tilde{B}^{(1)}(\zeta, n) \geqslant 0. \tag{10.22}$$

Решим вначале неравенство (10.22). Для этого рассмотрим $\tilde{j}$-растягивающий элементарный кратный множитель [2]

$$\tilde{B}_n(\zeta) = I + (1 - \zeta)\begin{bmatrix} \Lambda_{p,n}(\zeta) & 0 \\ 0 & \Lambda_{q,n}(\zeta) \end{bmatrix} \times$$

$$\times\, \tilde{H}_n \begin{bmatrix} \Lambda_{p,n}^*(1) & 0 \\ 0 & \Lambda_{q,n}^*(1) \end{bmatrix} \tilde{j}, \tag{10.23}$$

где

$$\tilde{H}_n = \begin{bmatrix} P \\ \tilde{C}_n^* \end{bmatrix} (P - \tilde{C}_n\tilde{C}_n^*)^{-1}\,[P,\ \tilde{C}_n],\quad \tilde{j} = \begin{bmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}.$$

Повторяя рассуждения, проведенные в случае неравенства (S), можно показать, что (10.22) эквивалентно неравенству

$$[\theta^*(\zeta),\ I]\,\frac{\tilde{B}_n^{*-1}(\zeta)\,\tilde{j}\tilde{B}_n^{-1}(\zeta)}{1 - |\zeta|^2}\begin{bmatrix} \theta(\zeta) \\ I \end{bmatrix} \geqslant 0,$$

что в свою очередь приводит к утверждению:

Лемма 10.2. *Общее решение* $\theta(\zeta)$ *неравенства (10.22) представляется в виде дробно-линейного преобразования* $\theta(\zeta) = [\tilde{a}(\zeta)\,\tilde{\omega}(\zeta) + \tilde{b}(\zeta)]\,[\tilde{c}(\zeta)\,\tilde{\omega}(\zeta) + \tilde{d}(\zeta)]^{-1}$ *произвольной матрицы-функции* $\tilde{\omega}(\zeta) \in S_{p,q}$. *Матрицей коэффициентов*

$$\tilde{B}_n(\zeta) = \begin{bmatrix} \tilde{a}(\zeta) & \tilde{b}(\zeta) \\ \tilde{c}(\zeta) & \tilde{d}(\zeta) \end{bmatrix}$$

дробно-линейного преобразования является $\tilde{j}$-растягивающий элементарный кратный множитель (10.23), построенный по матрице C_n и одному из подпространств типа K.

Далее, как и ранее, получаем, что условие (10.21) эквивалентно равенству

$$P_0 [I, \ -C_n] \begin{bmatrix} \Lambda^*_{p,\,n}(1) & 0 \\ 0 & \Lambda^*_{q,\,n}(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\omega}(\zeta) \\ I \end{bmatrix} = 0. \qquad (10.24)$$

2. Выясним теперь смысл условий (10.20) и (10.24). Для этого перепишем их соответственно в виде $-P_0C_n\Lambda^*_{q,\,n}(1)\,\omega^*(\zeta) + P_0\Lambda^*_{p,\,n}(1) = 0$, $P_0\Lambda^*_{p,\,n}(1)\,\tilde{\omega}(\zeta) - P_0C_n\Lambda^*_{q,\,n}(1) = 0$. Взяв сопряжение над этими равенствами, получаем

$$\omega(\zeta)\,\Lambda_{q,\,n}(1)\,C^*_nP_0 = \Lambda_{p,\,n}(1)\,P_0, \qquad (10.25)$$

$$\tilde{\omega}^*(\zeta)\,\Lambda_{p,\,n}(1)\,P_0 = \Lambda_{q,\,n}(1)\,C^*_nP_0. \qquad (10.26)$$

Заметим, что

$$P_0C_n\Lambda^*_{q,\,n}(1)\,\Lambda_{q,\,n}(1)\,C^*_nP_0 = P_0C_n\,(D_{q,\,n}(1) + D^*_{q,\,n}(1) + I)\,C^*_nP_0 = P_0D_{p,\,n}(1)\,C_nC^*_nP_0 + P_0C_nC^*_nD_{p,\,n}(1)\,P_0 + P_0C_nC^*_nP_0 = P_0\,(D_{p,\,n}(1) + D^*_{p,\,n}(1) + I)\,P_0 = P_0\Lambda^*_{p,\,n}(1)\,\Lambda_{p,\,n}(1)\,P_0.$$

Пусть M_0 — образ оператора $\Lambda^*_{q,\,n}(1)\,C^*_nP_0$, а N_0 — образ $\Lambda_{p,\,n}(1)\,P_0$. Тогда из последних равенств видно, что отображение U, определяемое равенством $U\Lambda_{q,\,n}(1)\,C^*_nP_0 = \Lambda_{p,\,n}(1)\,P_0$, является унитарным отображением M_0 на N_0.

Таким образом, условия (10.25) и (10.26) эквивалентны соответственно равенствам $\omega(\zeta)_{|M_0} = \tilde{\omega}(\zeta)_{|M_0} = U$, т. е. при разложении $E_- = M_0 \oplus M_1$, $E_+ = N_0 \oplus N_1$ параметр $\omega(\zeta)$ имеет блочное представление

$$\omega(\zeta) = \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & \omega_1(\zeta) \end{bmatrix},$$

где $\omega_1(\zeta)$ — произвольное голоморфное внутри единичного круга сжимающее отображение M_1 на N_1. Аналогичным образом описывается и параметр $\tilde{\omega}(\zeta)$.

Итак, доказаны следующие утверждения.

Теорема 10.1. *Общее решение $\theta(\zeta)$ неравенства (S) представляется в виде дробно-линейного преобразования матрицы-функции $\omega(\zeta) \in S_{p,\,q}$:*

$$\theta(\zeta) = (\omega(\zeta)\,b(\zeta) + d(\zeta))^{-1}\,(\omega(\zeta)\,a(\zeta) + c(\zeta)). \qquad (10.27)$$

Пусть $\theta(\zeta)$ действует из пространства E_- в E_+. Тогда при разложении $E_- = M_0 \oplus M_1$, $E_+ = N_0 \oplus N_1$, где M_0 — образ $\Lambda_{q,\,n}(1) \times C^*_nP_0$, N_0 — образ $\Lambda_{p,\,n}(1)\,P_0$, P_0 — ортопроектор на Ker $(I -$

$-C_nC_n^*)$, а $\Lambda_{p,n}(\zeta)=[I_p, \zeta I_p, \ldots, \zeta^n I_p]$, *параметр* $\omega(\zeta)$ *имеет блочное представление*

$$\omega(\zeta)=\begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & \omega_1(\zeta) \end{bmatrix},$$

при этом U *является унитарным отображением* M_0 *на* N_0 *и определяется по данным задачи из равенства* $U\Lambda_{q,n}(1)C_n^*P_0=$ $=\Lambda_{p,n}(1)P_0$, *а* $\omega_1(\zeta)$ — *произвольное голоморфное внутри единичного круга сжимающее отображение* M_1 *на* N_1.

Матрица коэффициентов дробно-линейного преобразования (10.27)

$$B_n(\zeta)=\begin{bmatrix} a(\zeta) & b(\zeta) \\ c(\zeta) & d(\zeta) \end{bmatrix}$$

является j-растягивающим элементарным кратным множителем (10.12), который строится по матрице C_n и одному из подпространств типа K.

Теорема 10.2. *Общее решение* $\theta(\zeta)$ *неравенства* $(\tilde{S})$ *представляется в виде дробно-линейного преобразования матрицы-функции* $\tilde{\omega}(\zeta)\in S_{p,q}$: $\theta(\zeta)=(\tilde{a}(\zeta)\tilde{\omega}(\zeta)+\tilde{b}(\zeta))(\tilde{c}(\zeta)\tilde{\omega}(\zeta)+\tilde{d}(\zeta))^{-1}$, *при этом параметр* $\tilde{\omega}(\zeta)$ *описывается так же, как и в предыдущей теореме, а матрица коэффициентов дробно-линейного преобразования*

$$\tilde{B}_n(\zeta)=\begin{bmatrix} \tilde{a}(\zeta) & \tilde{b}(\zeta) \\ \tilde{c}(\zeta) & \tilde{d}(\zeta) \end{bmatrix}$$

является $\tilde{j}$*-растягивающим элементарным кратным множителем (10.23), который строится по матрице* C_n *и одному из подпространств типа* K.

Замечание. Можно показать, что $\dim M_0=\dim N_0=\dim \operatorname{Ker} A_n \times$ $\times (\operatorname{mod} \operatorname{Ker} A_{n-1})$.

3. Приведем теперь пример подпространства типа K. Для этого обозначим через $\tilde{F}_k$ ортогональную проекцию $\operatorname{Ker} A_k$ на $E_+^{(k)}\ominus$ $\ominus E_+^{(k-1)}$, $k=0, 1, 2, \ldots, n$; $E_+^{(-1)}=0$ (см. (10.1)). Пусть $\tilde{F}=$ $=\tilde{F}_0\oplus\tilde{F}_1\oplus\cdots\oplus\tilde{F}_n$.

Лемма 10.3. *Подпространство* $\tilde{F}$ *инвариантно относительно* $V_{p,n}$.

Доказательство. Так как $V_{p,n}\tilde{F}_n=0$, то, учитывая вложения (10.2), достаточно показать, что

$$V_{p,k+1}\tilde{F}_k\subset\tilde{F}_{k+1}, \quad k=0, 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (10.28)$$

Пусть $h \in \tilde{F}_k$. Тогда в соответствии с (10.1) существует $f \in \operatorname{Ker} A_k \subset E_+^{(k)}$, $f = \{f_0, f_1, \ldots, f_k\}$, $f_k = h$. Пусть $\tilde{f} = \{f, 0\} \in E_+^{(k+1)}$ и $g = V_{D,k+1}\tilde{f} = \{0, f_0, f_1, \ldots, f_k\} = \{0, f\}$. Учитывая, что

$$C_{k+1} = \begin{bmatrix} c_0 & 0 \ldots 0 \\ c_1 & \\ \vdots & C_k \\ c_{k+1} & \end{bmatrix},$$

получаем $(A_{k+1}g, g) = -\| c_1^* f_0 + c_2^* f_1 + \cdots + c_{k+1}^* f_k \|^2 \leqslant 0$. Следовательно, $g \in \operatorname{Ker} A_{k+1}$, $h = f_k \in \tilde{F}_{k+1}$, и включение (10.28) доказано.

Лемма 10.4. *Имеет место равенство* $\dim \tilde{F} = \dim \operatorname{Ker} A_n$. *При $n = 0$ утверждение очевидно. Далее, предположив его справедливость для $n-1$, заметим, что*

$$A_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} & B_n \\ B_n^* & I - \sum_{k=0}^{n} c_k c_k^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ Y^* & I \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & I - \sum_{k=0}^{n} c_k c_k^* - Y^* A_{n-1} Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

где Y является решением уравнения $A_{n-1}Y = B_n$. Значит, $\operatorname{Ker} A_n$ *состоит из векторов $\{f, g\}$, таких что $f + Yg \in \operatorname{Ker} A_{n-1}$, $g \in \operatorname{Ker} \left(I - \sum_{k=0}^{n} c_k c_k^* - Y^* A_{n-1} Y\right)$, при этом $g \in \tilde{F}_n$.*

Отсюда следует, что $\dim \operatorname{Ker} A_n = \dim \tilde{F}_n \ (\operatorname{mod} \operatorname{Ker} A_{n-1})$, и лемма доказана.

Пусть $F = E_+^{(n)} \ominus \tilde{F}$. Тогда $F = F_0 \oplus F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$, $F_k = E_+ \ominus \tilde{F}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Докажем, что F является подпространством типа K. Из лемм 10.3 и 10.4 следует, что для этого достаточно показать, что $F \cap \operatorname{Ker} A_n = \{0\}$. Если $A_n f = 0$, $f = \{f_0, f_1, \ldots, f_n\} \in F$, то с одной стороны, $f_n \in F_n$, а с другой, $f_n \in \tilde{F}_n$, т. е. $f_n = 0$. Аналогично устанавливается, что $f_0 = f_1 = \cdots = f_{n-1} = 0$ и, значит, $f = 0$.

Список литературы: 1. *Дубовой В. К.* Индефинитная метрика в интерполяционной проблеме Шура для аналитических функций. — Теория функций, функцион. анализ и их приложения, 1982, вып. 37, с. 14—26; 1982, вып. 38, с. 32—40; 1984, вып. 41, с. 41—45. 2. *Дубовой В. К.* Параметризация элементарного кратного множителя неполного ранга. — Анализ в бесконечномерных пространствах и теория операторов.— К.: Наук. думка, 1983, с.
3. *Нудельман А. А.* Об одной новой проблеме типа проблемы моментов. — Докл. АН СССР, 1977, 233, № 5, с. 792—795. 4. *Федчина И. П.* Описание решений касательной проблемы Неванлинны — Пика. — Докл. АрмССР, 1975,

60, № 1, с. 37—42. 5. *Галстян Л. А.* Аналитические j-растягивающие матрицы-функции и проблема Фейера.— Докл. АрмССР, 1976, **63**, № 1, с. 22—26. 6. *Ефимов А. В., Потапов В. П.* j-растягивающие матрицы-функции и их роль в теории электрических цепей. — Усп. мат. наук, 1973, **28**, вып. 1 с. 65—130.

Поступила в редколлегию 20.10.82.

УДК 517.5

В. Э. КАЦНЕЛЬСОН

К ТЕОРИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КЛАССА КАРТРАЙТ

Для целой функции $F(z)$ экспоненциального типа $\sigma_F \overset{\text{def}}{=} \overline{\lim}\,|z|^{-1}\ln|F(z)|$, $(|z|\to\infty)$, $0\leqslant\sigma_F<\infty$ индикатор роста $h_F(\theta)$ определяется как $h_F(\theta)=\lim r^{-1}\cdot\ln|F(re^{i\theta})$, $(r\to\infty)$. Целая функция $F(z)$ называется *функцией класса М. Картрайт*, если F экспоненциального типа, и

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln^+|F(x)|}{1+x^2}\,dx<\infty.$$

Определение. *Область, получающаяся удалением из полуплоскости* $\operatorname{Im}\theta>0$ *система отрезков (разрезов)* $\operatorname{Re}\theta=k\pi$, $0\leqslant\operatorname{Im}\theta\leqslant h_k$, $(k\in\boldsymbol{Z})$, *где* $0\leqslant h_k<\infty$, *называется гребенчатой областью* (рис. 1).

В это определение включаются и предельные случаи «четверть плоскости с разрезами» и «полуполосы с разрезами» (рис. 2).

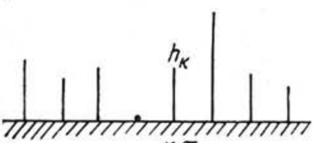

Рис. 1

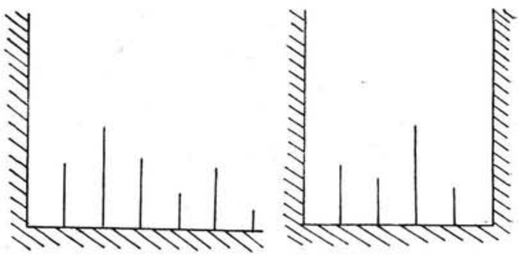

Рис. 2

Бесконечно удаленная точка «$\theta=\infty$» является граничной точкой гребенчатой области.

Пусть $\theta(z)$ — функция, осуществляющая конформное отображение полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$ на некоторую гребенчатую область*, причем $\theta(\infty)=\infty$.

Функция $\theta(z)$ аналитична в $\operatorname{Im}z>0$ и непрерывна в $\operatorname{Im}z\geqslant 0$. Функция $C(z)=\cos\theta(z)$ аналитична в $\operatorname{Im}z>0$, непрерывна

---

* Такие отображения составляют узкий подкласс класса отображений, которые применялись в [I] при исследовании экстремальных задач теории целых функций.

в $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ и вещественна на вещественной оси. По принципу симметрии, $C(z)$ продолжается до целой функции, которую мы также обозначим через $C(z)$.

Определение. *Функция вида* $C(z) = \cos\theta(z)$, *где* $\theta(z)$ — *функция, конформно отображающая* $\operatorname{Im} z > 0$ *на некоторую гребенчатую область, и* $\theta(\infty) = \infty$, *называется гребенчатой целой функцией.*

Очевидно, всякая гребенчатая целая $C(z)$ вещественна. Так как $\operatorname{Im}\theta(z)$ — положительная гармоническая в $\operatorname{Im} z > 0$, то $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im}\theta(x) \cdot (1 + x^2)^{-1}\, dx < \infty$ и $\operatorname{Im}\theta(z) = O((1 + |z|^2/y)$. Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\ln^+ |C(x)|) \cdot (1 + x^2)^{-1}\, dx < \infty \quad \text{и} \quad \ln^+ |C(z)| = O((1 + |z|^2)/|y|),$$

откуда следует, что всякая гребенчатая целая функция $C(z)$ является целой функцией класса Картрайт*.

Так как при $a = +1$ и при $a = -1$ все a-точки** функции $\cos\theta$ вещественны, то для любой гребенчатой целой функции все ее ± 1 — точки вещественны. Это свойство характеризует гребенчатые целые функции, как показывает

Теорема (В. А. Марченко, И. В. Островский [2, § 1]). *Всякая вещественная целая функция* ($\not\equiv$ const), *имеющая лишь вещественные а-точки при* $a = 1$ *и при* $a = -1$, *является гребенчатой.*

Подчеркнем, что априорных ограничений на рост функции здесь не налагается, в частности, принадлежность функции классу Картрайт не предполагается, а следует из условий теоремы.

Вещественные целые функции с вещественными ± 1-точками возникают, в частности, как дискриминанты Хилла линейных уравнений, описывающих пространственно-одномерные периодические структуры, и в таком качестве фигурировали еще у А. М. Ляпунова. Этот класс целых функций был выделен М. Г. Крейном [3] в связи со спектральными вопросами уравнения струны. В [3] указаны также связи с иными вопросами анализа (функциональными уравнениями Пелля, работами Абеля о периодических цепных дробях).

Теорема 1. *Всякая вещественная целая функция* $f(z)$ *класса Картрайт представима (неоднозначно) в виде* $f(z) = C_1(z) + C_2(z)$, *где* C_1, C_2 — *некоторые гребенчатые целые функции, причем* $\sigma_{C_1} = \sigma_{C_2} = \sigma_f$.

Теорема 2. *Всякая вещественная целая функция* $f(z)$ *класса Картрайт представима (неоднозначно) в виде* $f(z) = C_1(z) + C_2(z)$, *где* C_1, C_2 — *вещественные целые функции* ($\not\equiv$ const) *та-*

---

* При этом $C(z)$ полином точно тогда, когда гребенчатая область — это «полуполоса с разрезами».

** Напомним, что a-точками мероморфной функции $m(z)$ называются корни уравнения $m(z) - a = 0$.

кие, что у каждой из них все ± 1-*точки вещественны, и* $\sigma_{C_1} = \sigma_{C_2} = \sigma_f$.

Таким образом, теорема 1 является следствием теоремы 2 и цитированной выше теоремы В. А. Марченко — И. В. Островского.

Уместно сопоставить наши теоремы 1, 2 с теоремой 3 из [4].

Далее будем систематически пользоваться терминами, понятиями и результатами глав 7 и 9 монографии Б. Я. Левина [5], где изложены его результаты из [6]. Отметим, что изложение в [6] более подробное, чем в [5], и что эта монография не покрывает полностью работы [6].

Лемма. *Пусть $F(z)$ — целая функция класса Картрайт. Тогда существует целая функция $\omega(z)$ ($\not\equiv$const), являющаяся P-майорантой для каждой из функций $F(z)+1$, $F(z)-1$, $-F(z)+1$, $-F(z)-1$, причем $\sigma_\omega = \sigma_F$, а функции $\omega(z) \pm F(z) \pm 1$ не тождественно постоянные, и не имеют вещественных корней.*

Доказательство. Рассмотрим $r(z) = 4F(z)\cdot \overline{F}(z) + 8(1 + z^2)$. Функция $r(z)$ принадлежит классу Картрайт, положительна на вещественной оси, и $\sigma_r \leqslant 2\sigma_F$. По факторизационной теореме Н. И. Ахиезера (см. [5, Приложение 5]) $r(z)$ представима в виде $r(z) = \Omega(z)\cdot\overline{\Omega}(z)$, где функция Ω не имеет корней в $\operatorname{Im} z \leqslant 0$, и $h_\Omega(\theta) = \frac{1}{2}h_r(\theta)$. В частности, $h_\Omega(\pi/2) = h_\Omega\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ и $\sigma_\Omega = \frac{1}{2}\sigma_r$. При любом $k \geqslant 0$ функция $\omega(z) = \Omega(z)\cdot e^{ikz}$ и подавно будет функцией класса P. Выберем k так, чтобы $\sigma_\omega = \sigma_F$. По лемме 1, § 4 гл. 7 из [5] функция ω, как функция класса P, будет и функцией класса HB; (см. также следствие 3 леммы 2 из [6]). Так как $|\omega(x)|^2 = 4|F(x)|^2 + 8(1+x^2)$, то $|\omega(x)| > |\pm F(x) \pm 1|$, $(-\infty < x < \infty)$, Отсюда и из леммы 1, § 4 главы 9 из [5] (см. также лемму 2 из [6]) вытекает, что $\omega(z)$ является P-майорантой для каждой из четырех целых функций $\pm F(z) \pm 1$. Так как $|\omega(x)| \geqslant 1 + |x|$, $|\omega(x) \pm F(x) \pm 1| \geqslant 1 + |x|$, то функции $\omega(z)$, $\omega(z) \pm F(z) \pm 1$ не тождественно постоянны, и не имеют вещественных корней.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\omega(z) = p(z) + iq(z)$, (p, q — вещественны) — какая нибудь функция класса P с $\sigma_\omega = \sigma_f$, являющаяся P-майорантой для каждой из четырех целых функций $\frac{1}{2}f(z)+1$, $\frac{1}{2}f(z)-1$, $-\frac{1}{2}f(z)+1$, $-\frac{1}{2}f(z)-1$, причем $\omega(z)$, $\omega(z) \pm \frac{1}{2}f(z) \pm 1$ не тождественно постоянны и не имеют вещественных корней. (Существование такой майоранты утверждается в лемме). Согласно § 1, гл. 9 из [5] (см. также [6, лемма 3]), каждая из функций $\omega(z) \pm \frac{1}{2}f(z) \pm 1$ является функцией класса P. Дополняя рассуждения из [5], можно получить, что $\sigma_\omega = \sigma_{\omega \pm 1/2 f \pm 1}$. Таким образом, каждая из четырех целых

функций $p(z) \pm \frac{1}{2} f(z) \pm 1$ является «вещественной частью» непостоянной* функции класса P. Согласно теореме 7, § 4, гл. 7 из [5] (см. также [6, теорему 1]), каждая из функций $P(z) \pm \pm \frac{1}{2} f(z) \pm 1$ имеет лишь вещественные простые корни, иными словами, целые функции $\frac{1}{2} f(z) + p(z)$, $\frac{1}{2} f(z) - p(z)$ имеют лишь простые вещественные ± 1-точки. Так как «вещественная часть» функции класса P имеет тот же тип, что и сама функция, то $\sigma_{p \pm f/2 \pm 1} = \sigma_{\omega \pm f/2 \pm 1}$ $(= \sigma_\omega = \sigma_f)$. Осталось лишь положить $C_1(z) = = \frac{1}{2} f(z) + p(z)$, $C_2(z) = \frac{1}{2} f(z) - p(z)$.

Теорема 2 интересна с точки зрения теории распределения значений. Для того, чтобы целая функция f принадлежала классу Картрайт, необходимо, чтобы при каждом a ее a-точки $z_k(a)$ удовлетворяли *условию* $\sum |\operatorname{Im} 1/z_k(a)| < \infty$ *близости к вещественной оси*, и достаточно, чтобы это условие близости выполнялось хотя бы для двух различных a $(\neq \infty)$. (Гораздо более общие утверждения такого рода получены И. В. Островским См. [7, § 2, гл. 6] и ссылки там на более ранние работы И. В. Островского). Наша теорема 2, таким образом, допускает такую трактовку: всякая вещественная целая функция с ± 1-точками, близкими к вещественной оси, представима в виде суммы двух вещественных целых функций с ± 1-точками, расположенными точно на вещественной оси.

Примерно так же, как теорема 2, может быть доказана

Теорема 3. *Пусть $f(z)$ и $\rho(z)$ — целые функции класса Картрайт, f вещественна, ρ неотрицательна на вещественной оси, и* $l \geqslant \max\left(\sigma_f, \ \frac{1}{2}\sigma_\rho\right)$.

Тогда f представима в виде $f(z) = C_1(z) + C_2(z)$, где C_1 и C_2 — вещественные функции класса Картрайт, $\sigma_{C_1} = \sigma_{C_2} = l$, обладающие тем свойством, что для любой вещественной целой $e(z)$ такой, что $\sigma_e \leqslant l$ и $e^2(x) \leqslant \rho(x)$, $(-\infty < x < \infty)$, все корни уравнений $C_1(z) + e(z) = 0$, $C_2(z) + e(z) = 0$ вещественны и просты.

Мажоранту $\omega(z)$ здесь можно строить, факторизуя функцию $r(z) = f(z) \cdot \bar{f}(z) + 4\rho(z) + 8(1 + z^2)$.

Теорема 2 является частным случаем теоремы 3, соответствующим $\rho \equiv 1$, $e \equiv +1$, $e \equiv -1$.

Следствие. Пусть $f(z)$, $t_1(z)$, ..., $t_n(z)$ — вещественные целые функции класса Картрайт, причем σ_f, σ_{t_1}, ..., $\sigma_{t_n} \leqslant l$.

---

* Нам нужно еще, чтобы функции $p(z) \pm \frac{1}{2} f(z)$ были непостоянными. Так как $\omega(z) \neq \text{const}$, то этого можно достичь «малым шевелением»: $\omega(z) \to e^{i\alpha}\omega(z)$.

Тогда f представима в виде $f(z)=C_1(z)+C_2(z)$, где C_1, C_2 — вещественные целые функции класса Картрайт такие, что для любого $(\xi_1, \ldots, \xi_n)\in R^n$ такого, что $\sum \xi_j^2 \leqslant 1$, все корни уравнений $C_k(z)+\sum \xi_j t_j(z)=0$, $(k=1, 2)$, вещественны и просты.

Нужно лишь применить теорему 3 к $\rho(z)=\sum t_j(z)\bar{t}_j(z)$, $e\times \times (z)=\sum \xi_j t_j(z)$.

Подчеркнем, что факторизационная теорема Н. И. Ахиезера является лишь одним из средств построения P-майорант $\omega(z)$. В ряде ситуаций возможны и иные способы построения майорант. Мы делаем это замечание, в частности, потому, что теория классов P, майорант и связанных с этим вопросом во многом распространяется на целые функции многих переменных (см. [5, главы 7—9]). Однако аналога факторизационной теоремы Н. И. Ахиезера для многих переменных нет (контрпримеры по мотивам 17-й проблемы Гильберта), и приходится выходить из положения иными способами.

Так же, как в одном переменном, доказывается, что если $f(z_1, \ldots, z_n)$ — вещественная целая функция, а $\omega(z_1, \ldots, z_n)$ — P-майоранта для каждой из функций $2f(z)$ и 2, то f представима в виде $f(z_1, \ldots, z_n)=C_1(z_1, \ldots, z_n)+C_2(z_1, \ldots, z_n)$, где C_1, C_2 — вещественные целые функции такие, что при $a=1$ и $a=-1$ a-множества каждой из них не пересекаются с трубчатыми областями $T_+=\{z:\operatorname{Im} z_j>0,\ 1\leqslant j\leqslant n\}$ и $T_-=-T_+$, причем каждая из C_k имеет «тот же рост», что и ω. Таким образом, для обобщения теоремы 2 на функции многих переменных нужно уметь строить майоранты для функций многих переменных.

Приведем один из примеров таких построений. Пусть $\alpha(t)\geqslant \geqslant 1$ — монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая *«условию неквазианалитичности»*:

$$\int_0^\infty \frac{\ln \alpha(t)}{1+t^2}\,dt<\infty.$$

Как показано в [8], существует $\omega(z)$ нулевого рода с корнями в верхней полуплоскости такая, что $\alpha(|x|)\leqslant|\omega(x)|$, $(-\infty<x< <\infty)$, причем $\sup \alpha(|x|)\cdot|\omega(\lambda x)|^{-1}<\infty$ для любого $\lambda>0$. Пусть $l_1, \ldots, l_n\geqslant 0$. Положим

$$\omega(z_1, \ldots, z_n)=\prod_{1<j<n}\{\omega(z_j)\cdot\sin(l_j z_j-i)\}.$$

Функция $\omega(z_1, \ldots, z_n)$ принадлежит классу P от n переменных. Пусть $f(z_1, \ldots, z_n)$ — целая функция, допускающая на вещественной оси оценку вида* $|f(x_1, \ldots, x_n)|\leqslant\alpha(|x_1|)\ldots\alpha(|x_n|)$,

* Эта оценка равносильна оценке вида $|f(x_1, \ldots, x_n)|\leqslant \leqslant\alpha\left(\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\right)$.

а в комплексном пространстве оценку вида $\ln|f(z)| \leqslant \sum l_j|z_j| + o(|z|)$, $(|z| \to \infty)$, следовательно, и оценку $\ln|f(z)| \leqslant \sum l_j \times |y_j| + o(|z|)$, $(|z| \to \infty)$. Тогда так построенная $\omega(z_1, \ldots, z_n)$ будет P-майорантой для $f(z_1, \ldots, z_n)$.

Напомним, что рост целой функции $F(z_1, \ldots, z_n)$ экспоненциального типа, удовлетворяющей условию $\ln^+|F(x)| = o(|x|)$, $(|x| \to \infty)$, может быть охарактеризован индикатором Планшереля — Пойя (определение см. в [9, гл. 3, § 4]):

$$h_f(y_1, \ldots, y_n) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim_{r\to\infty}} r^{-1} \cdot \ln|F(x_1 + iry_1, \ldots, x_n + iry_n)).$$

(Этот предел один и тот же для всех $x \in \boldsymbol{R}^n$, за исключением множества нулевой n-мерной лебеговой меры, где возможно «понижение»).

В связи с этим возникает следующий вопрос: *Пусть $f(z_1, \ldots, z_n)$ — вещественная целая функция экспоненциального типа, допускающая на вещественной плоскости оценку $|f(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \varphi(|x|)$, где $\varphi \geqslant 1$ монотонна и удовлетворяет условию неквазианалитичности. Существует ли у этой $f(z)$ P-майоранта $\omega(z)$ с тем же, что и у f, индикатором Планшереля — Пойя?*

Приведенная выше конструкция дает утвердительный ответ лишь если $h_f(y) = \sum l_j|y_j|$.

Теоремы 1, 2 получены автором в 1975 г. и навеяны докладом И. В. Островского на семинаре по теории функций ХГУ, где излагалась теоретико-функциональная часть работы [2].

Список литературы: 1. *Ахиезер Н. И., Левин Б. Я.* Неравенства для производных, аналогичные неравенству С. Н. Бернштейна. — Докл. АН СССР, 1957, **117**, с. 735—738. 2. *Марченко В. А., Островский И. В.* Характеристика спектра оператора Хилла. — Мат. сборник, 1975, **97**, № 4, с. 540—606. 3. *Крейн М. Г.* Об обратных задачах теории фильтров и λ-зон устойчивости. — Докл. АН СССР, 1953, № 5, с. 767—770. 4. *Островский И. В.* Об одном классе целых функций. — Докл. АН СССР, 1976, **229**, № 1, с. 39—42. 5. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: ГИТТЛ, 1956.— 632 с. 6. *Левин Б. Я.* Об одном специальном классе целых функций и о связанных с ними экстремальных свойствах целых функций конечной степени. — Изв. АН СССР, 1950, **14**, № 1, с. 45—84. 7. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. — М.: Физматгиз, 1971. — 430 с. 8. *Иноземцев О. И., Марченко В. А.* О мажорантах нулевого рода. — Усп. мат. наук, 1956, **11**, вып. 2, с. 173—178. 9. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных. — М.: Физматгиз, 1971. — 430.

Поступила в редколлегию 27.12.82.

УДК 513.88

Д. Г. КЕСЕЛЬМАН

О ГРАНИЦЕ ШИЛОВА В СИМПЛЕКСЕ ШОКЕ

В симплексе Шоке S введем обозначения: $E(S)$ — множество его крайних точек; $Sh_S = \overline{E(S)} \setminus E(S)$; μ_x — максимальная мера, представляющая точку x; $M_x^+(\overline{E(S)})$ — множество всех вероят-

ностных мер, представляющих точку x и сосредоточенных на границе Шилова $\overline{E(S)}$; $P(S)$ — множество всех непрерывных и выпуклых на S функций; $A(S)=P(S)\cap(-P(S))$.

Пусть T — произвольное подмножество S. Для ограниченной функции $g\colon T\to R$ обозначим через $\hat{g}=\inf\{a\in A(S): a|_T\geqslant g\}$ и $\check{g}=\sup\{a\in A(S): a|_T\leqslant g\}$ ее верхнюю и нижнюю огибающие соответственно.

Рассмотрим точку x из границы Шилова $\overline{E(S)}$ и направленность $y_\alpha\to x$.

Определение. *Направленность $\{y_\alpha\}$ называется регулярной, если $\{\mu_{y_\alpha}\}$ слабо сходится к мере Дирака ε_x (мы будем обозначать слабую сходимость $\mu_{y_\alpha}\to\varepsilon_x$.*

Определение. *Точка $x\in S$ обладает системой квазипиков на S, если для каждой окрестности $U(x)$ этой точки существует квазипик, т. е. такая функция $a\in A(S)$, что $a(x)>0$ и $a|_{S\setminus U(x)}<0$.*

Как мы уже знаем [1], множество точек, которые обладают системой квазипиков на S, — это крайние точки и только они.

Цель данной работы состоит в получении новых топологических характеристик точек из $E(S)$ с помощью максимальных мер и регулярных направленностей и доказательства того факта, что в метризуемом S каждая точка из $\overline{E(S)}$ обладает регулярной последовательностью, которую можно выбрать из произвольного плотного в S подмножества D.

В случае, когда D выпукло, мы докажем, что для каждой точки $x\in S$ и вероятностной меры $\nu\in M_x^+(\overline{E(S)})$ существует последовательность $\{x_n\}\subset D$, которая сходится к x и $\mu_{x_n}\to\nu$.

Нам понадобится понятие так называемой тонкой топологии [2], т. е. слабейшей топологии, в которой все функции вида $\hat{p}$, где $p\in P(S)$, становятся непрерывными*.

Теорема 1. *Пусть $x\in S$. Следующие утверждения эквивалентны: 1) $x\in E(S)$; 2) для каждой открытой окрестности $U(x)$ точки x и для каждого числа $\varepsilon>0$ существует такая открытая окрестность $V(x)\subseteq U(x)$ точки x, что для всех y из $V(x)$ выполняется неравенство $\mu_y(S\setminus U(x))<\varepsilon$; 3) каждая направленность $x_\alpha\to x$ является регулярной.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Пусть $\varepsilon>0$, и $U(x)$ — произвольная открытая окрестность точки x. Рассмотрим непрерывную функцию $f\colon S\to[0;1]$, удовлетворяющую равенствам: $f(x)=1$ и $f|_{S\setminus U(x)}=0$.

Согласно теореме Урысона такая функция существует.

---

* По теореме Шоке-Мейера множество C таких функций на симплексе является конусом, поэтому можно говорить о тонкой топологии.

По теореме Эрве (см. [3 теорема 1.4.1) выполняется равенство $\check{f}(x) = f(x)$, поэтому существует функция a из $A(S)$, для которой справедливы неравенства: $a \leqslant f$ и $a(x) > 1-\varepsilon$. Рассмотрим открытое множество $V(x) = \{y \in U(x)\colon\ a(y) > 1-\varepsilon\}$. Множество $V(x)$ является окрестностью точки x, и для каждой точки y из $V(x)$ имеем $1-\varepsilon < a(y) = \int\limits_{S \setminus U(x)} a\, d\mu_y + \int\limits_{U(x)} a\, d\mu_y \leqslant \int\limits_{U(x)} a\, d\mu_y \leqslant$ $\leqslant \mu_y(U(x))$.

2) $\Rightarrow$ 3). Предположим, что направленность $\{x_\alpha\}$ сходится к x. Рассмотрим положительное число $\varepsilon > 0$ и функцию $f \not\equiv 0$ из $C(S)$. Выберем такую открытую окрестность $U_{(x)}$ точки x, что для всех y из $U(x)$ выполняется неравенсто $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$.

По утверждению 2) в множестве $U(x)$ можно выбрать меньшую открытую окрестность $U(x)$ точки x, причем такую, что для каждой точки y из $V(x)$ справедливо неравенство $\mu_y(S \setminus U(x)) < \frac{\varepsilon}{4\|f\|}$. Существует такой индекс α_0, что для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$ точки x_α попадут в окрестность $V(x)$, и тогда

$$|\mu_{x_\alpha}(f) - f(x)| \leqslant \int\limits_{S \setminus U(x)} |f - f(x)|\, d\mu_{x_\alpha} + \int\limits_{U(x)} |f - f(x)|\, d\mu_{x_\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant 2\|f\| \cdot \frac{\varepsilon}{4\|f\|} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

А это и означает, что направленность x_α является регулярной.

3) $\Rightarrow$ 1). Предположим, что x не принадлежит $E(S)$. Так как

$$E(S) = \bigcap_{q \in -P(S)} \{y \in S : q(y) = \check{q}(y)\},$$

то существует неотрицательная вогнутая функция q из $-P(S)$, такая, что $\check{q}(x) < q(x)$. В тонкой топологии, определенной по конусу C, множество $S \setminus \{x\}$ не является разреженным в точке x (см. [2 с. 13]), поэтому $\varliminf\limits_{\substack{y \to x \\ y \in S \setminus \{x\}}} \check{q}(y) = \check{q}(x)$.

Выберем направленность $\{y_\alpha\}$ из $S \setminus \{x\}$ такую, что $\lim\limits_{y_\alpha \to x} \check{q}(y_\alpha) = \check{q}(x)$. Тогда

$$\lim_{y_\alpha \to x} \mu_{y_\alpha}(q) = \lim_{y_\alpha \to x} \mu_{y_\alpha}(\check{q}) = \lim_{y_\alpha \to x} \check{q}(y_\alpha) = \check{q}(x) < q(x),$$

т. е. $\mu_{y_\alpha} \nrightarrow \varepsilon_x$.

Теорема доказана.

Следствие 1.1. Пусть $x \in \mathrm{Sh}_S$, $\varepsilon > 0$, тогда для каждой открытой окрестности $U(x)$ точки x существует такое отрытое множество $V \subseteq U(x)$, что для всех точек y из V справедливо неравенство $\mu_y(\overline{S \setminus U(x)}) < \varepsilon$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную открытую окрестность $U(x)$ точки x. Пусть t — произвольная точка из $E(S)\cap U(x)$. Так как $U(x)$ является открытой окрестностью и для точки t, то по теореме 1 существует такое открытое подмножество $V\subseteq U(x)$, содержащее точку t, что для всех y из V выполняется неравенство $\mu_y(S\setminus U(x))<\varepsilon$. Очевидно, что множество V является искомым.

Предложение 2. Рассмотрим точку x из $\overline{E(S)}$ и направленность $y_\alpha\to x$. Следующие утверждения эквивалентны: 1) направленность $\{y_\alpha\}$ является регулярной.; 2) для каждого $\varepsilon>0$ и для каждой открытой окрестности $U(x)$ существует такой индекс α_0, что для всех $\alpha\geqslant\alpha_0$ выполняется неравенство $\mu_{y_\alpha}(U(x))>$ $>1-\varepsilon$.

Доказательство. 1)$\Rightarrow$2). Предположим, что направленность $\{y_\alpha\}$ регулярна, и рассмотрим непрерывную функцию $f: S\to$ $\to[0;\ 1]$, удовлетворяющую равенствам $f(x)=1$ и $f|_{S\setminus U(x)}=0$. Так как $\mu_{y_\alpha}(f)\to f(x)=1$, то по $\varepsilon>0$ выберем такой индекс α_0, что для всех $\alpha\geqslant\alpha_0$ справедливо неравенство $\mu_{y_\alpha}(f)>1-\varepsilon$. Но тогда $1-\varepsilon<\int f\,d\mu_{y_\alpha}=\int\limits_{U(x)} f\,d\mu_{y_\alpha}<\mu_{y_\alpha}(U(x))$.

2)$\Rightarrow$1). Рассмотрим функцию $f\not\equiv 0$ из $C(S)$, число $\varepsilon>0$ и такую открытую окрестность $U(x)$ точки x, что для всех y из $U(x)$ выполняется неравенство $|f(y)-f(x)|<\varepsilon/2$. По утверждению 2) существует такой индекс α_0, что для всех $\alpha\geqslant\alpha_0$ справедливо неравенство $\mu_{y_\alpha}(U(x))>1-\frac{\varepsilon}{4\|f\|}$. Имеем

$$|\mu_{y_\alpha}(f)-f(x)|\leqslant\int\limits_{U(x)}|f-f(x)|\,d\mu_{y_\alpha}+\int\limits_{S\setminus U(x)}|f-$$

$$-f(x)|\,d\mu_{y_\alpha}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+2\|f\|\cdot\frac{\varepsilon}{4\|f\|}=\varepsilon.$$

Предложение доказано.

Следствие 2.1. Пусть D — произвольное плотное подмножество метрического симплекса S, тогда для каждой точки $x\in$ $\in\overline{E(S)}$ множество D содержит регулярную последовательность $y_n\to x$.

Доказательство. Если $x\in E(S)$, то по теореме 1 любая последовательность $\{y_n\}\subset D$, сходящаяся к точке x, является регулярной. Предположим, что $x\in \mathrm{Sh}_S$ и рассмотрим базис $\{U_n(x)\}$ вложенных открытых окрестностей точки x.

По следствию 1.1 в пересечении $D\cap U_n(x)$ можно выбрать точку y_n, удовлетворяющую неравенству $\mu_{y_n}(S\setminus U_n(x))\leqslant 1/n$.

Очевидно, что последовательность $\{y_n\}$ удовлетворяет условию 2) предложения 2 и потому регулярна.

Теорема 3. *Пусть D — плотное выпуклое подмножество метрического симплекса S; x — произвольная точка S; мера* $\nu\in$

$\in M_x^+(\overline{E(S)})$. *Тогда в D можно выбрать такую последовательность $x_n \to x$, что $\mu_{x_n} \to \nu$.*

Доказательство. В силу метризуемости S мера ν имеет счетную базу $B = \{V_n\}_{n \in N}$ окрестностей в слабой топологии.

Пусть $V \in B$, тогда существует такое конечное множество функций $\{f_i\}_{i=1}^k$ из $C(\overline{E(S)})$ и число $\delta > 0$, что для всех мер μ из окрестности V выполняются неравенства $|\nu(f_i) - \mu(f_i)| < \delta$, $i = 1, \ldots, k$.

Покажем, что V содержит максимальные меры с барицентрами из D. Можно считать, что симплекс S вложен в некоторое локально выпуклое пространство Z.

В силу равномерной непрерывности существует такая окрестность нуля W в пространстве Z, что для всех пар точек z и y из $\overline{E(S)}$, для которых $z - y \in W$, выполняются неравенства $|f_i(z) - f_i(y)| < \delta/2$, $i = 1, \ldots, k$.

В силу компактности границы Шилова $\overline{E(S)}$ выберем конечное подмножество точек $\{y_j\}_{j=1}^m$ из $\overline{E(S)}$, таких, что $\overline{E(S)} \subseteq \bigcup_{j=1}^m (W + y_j)$.

Положим $W_0 = \varnothing$, $W_j = W + y_j$, $j = 1, \ldots, m$ и рассмотрим борелевские множества $A_j = \overline{E(S)} \cap (W_j \setminus (W_1 \cup \ldots \cup W_{j-1}))$, $j = 1, \ldots, m$. Очевидно, что $\overline{E(S)} = \bigcup_{j=1}^m A_j$. Рассмотрим конечное число множеств $\{A_j^0\}_{j=1}^l = \{A_j : \nu(A_j) > 0\}$ и вероятностные меры $\nu_j = \lambda_j^{-1} \cdot \nu|_{A_j^0}$, где $\lambda_j = \nu(A_j^0)$, $j = 1, \ldots, l$. Для каждого индекса j выберем произвольную точку x_j из A_j^0. По следствию 2.1 существует последовательность максимальных мер $\{\mu_n^j\}_{n \in N}$ с барицентрами из D, сходящаяся в слабой топологии к мере Дирака ε_{x_j}.

Тогда для всех $n \geqslant n_0$ выполняются неравенства $|\mu_n^j(f_i) - f_i(x_j)| < \delta/2$, $i = 1, \ldots, k$. Отсюда для всех $n \geqslant n_0$ $|\nu_j(f_i) - \mu_n^j(f_i)| \leqslant |\nu_j(f_i) - f_i(x_j)| + |f_i(x_j) - \mu_n^j(f_i)| < \delta$. Рассмотрим последовательность мер

$$\mu_n^0 = \sum_{j=1}^l \lambda_j \mu_n^j.$$

В силу выпуклости множества D барицентры мер μ_n^0 принадлежат D.

Так как мера $\nu = \sum_{j=1}^l \lambda_j \nu_j$, то существует такой номер $n \in N$, что максимальная мера μ_n^0 принадлежит окрестности V.

Следовательно, существует такая последовательность точек $\{x_n\}$ из D, что их максимальные представляющие меры μ_{x_n} слабо сходятся к мере ν.

Так как пространство $A(S)$ разделяет точки S, то $x_n \to x$, и теорема доказана.

Список литературы: 1. *Кесельман Д. Г.* Гармонические пространства и связанные с ними симплексы Шоке: Автореф. ... канд. физ.-мат. наук. — Ростов-на-Дону, 1981. — 148 с. 2. *Брело М.* О топологиях и границах в теории потенциала. — М.: Мир, 1974. — 224 с. 3. *Alfsen E. M.* Compact convex sets and boundary integrals. — Berlin, Springer — Verlag, 1971. — 212 p.

Поступила в редколлегию 14.04.82.

УДК 503. 88

И. К. ЛИФАНОВ

О ПРОИЗВЕДЕНИИ ОДНОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1. В аэродинамике задача обтекания прямоугольного крыла стационарным потоком идеальной несжимаемой жидкости может быть приведена [1] к рассмотрению следующего сингулярного интегрального уравнения:

$$\int_{-b}^{b}\int_{-l}^{l} \frac{\partial\gamma(x, z)}{\partial z} \frac{x - x_0 + \sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}}{(x - x_0)(z - z_0)}\, dx\, dz = f(x_0, z_0). \quad (1)$$

Так как уравнение (1) пока не исследовано, то желательно изучить сингулярные интегральные уравнения с двукратными сингулярными интегралами типа Коши аналогичного вида, например

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{K(x_0, z_0, x, z)}{(x-x_0)(z - z_0)} \gamma(x, z)\, dx\, dz = f(x_0, z_0), \quad (2)$$

где $K(x_0, z_0, x, z)$ удовлетворяет условию Гёльдера [2] на квадрате и $K(x_0, z_0, x_0, z_0) \neq 0$ для любой точки $M(x_0, z_0)$ квадрата $I^2 = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Однако, как и для одномерных сингулярных уравнений [2], прежде чем изучать уравнения общего вида, надо изучить характеристические сингулярные интегральные уравнения с кратными интегралами типа Коши;

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\gamma(x, y)\, dx\, dy}{(x - x_0)(y - y_0)} = f(x_0, y_0). \quad (3)$$

Будем рассматривать сингулярное интегральное уравнение (3) и тогда, когда область интегрирования будет произведением $L_1 \times L_2$, где L_1 и L_2 — отрезок или окружность. Более того, рассмотрим также некоторые характеристические сингулярные интегральные уравнения второго рода с кратными интегралами типа Коши.

2. Рассмотрим одномерное характеристическое сингулярное интегральное уравнение второго рода:

$$a\gamma(t_0, \tau) + \frac{b}{\pi}\int\limits_L \frac{\gamma(t, \tau)\,dt}{t - t_0} = f(t_0, \tau), \tag{4}$$

где a, b — действительные константы, $a^2 + b^2 = 1$, $b \neq 0$, L — отрезок $[-1,1]$ или окружность единичного радиуса с центром в начале координат, $f(t_0, \tau)$ удовлетворяет условию Гёльдера на множестве $L \times T$, где T — некоторая ограниченная область изменения параметра τ.

Из результатов [2] можно получить следующие утверждения.

Если L — окружность, то уравнение (4) имеет единственное решение $\gamma(t, \tau)$ при любой правой части, даваемое формулой

$$\gamma(t, \tau) = af(t, \tau) - \frac{b}{\pi}\int\limits_L \frac{f(t_0, \tau)\,dt_0}{t_0 - t}. \tag{5}$$

Если L — отрезок $[-1,1]$, то индекс $\varkappa$ уравнения (4) принимает значения 1, 0, -1, а соответствующие решения задаются формулами

$$\gamma_\varkappa(t, \tau) = af(t, \tau) - \frac{b}{\pi}\,\omega_\varkappa(t)\int\limits_L \frac{f(t_0, \tau)\,dt_0}{\omega_\varkappa(t_0)(t_0 - t)} + T_\varkappa(\alpha)\,\omega_\varkappa^\alpha(t)\,C(\tau), \tag{6}$$

где $\omega_\varkappa^\alpha(t) = (1 - t)^\alpha(1 + t)^\beta$, $0 < |\alpha|$, $|\beta| < 1$, $\varkappa = -(\alpha + \beta)$, $a + b\operatorname{ctg}\alpha\pi = 0$, $T_1(\alpha) = -[\Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha)]^{-1}$, $T_0(\alpha) = T_{-1}(\alpha) = 0$, $C(\tau)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию Гёльдера. Если $\varkappa = 1$, то

$$\int\limits_L \gamma_1(t, \tau)\,dt = C(\tau). \tag{7}$$

Если $\varkappa = -1$, то функция $\gamma_{-1}(t, \tau)$ является решением уравнения (4) только при условии

$$\int\limits_L \frac{f(t_0, \tau)\,dt_0}{\omega_{-1}(t_0)} \equiv 0. \tag{8}$$

3. Запишем теперь уравнение (4) в операторной форме

$$A_{L, t_0}\gamma(t, \tau) = f(t_0, \tau), \tag{9}$$

где A_{L, t_0} означает символ тех операций, которые применяются справа в (4) к функции $\gamma(t, \tau)$, и который будем называть характеристическим сингулярным интегральным оператором второго рода.

Рассмотрим теперь такие характеристические сингулярные интегральные уравнения второго рода с двукратными интегралами типа Коши, операторы которых можно представить как произведение соответствующих одномерных операторов по каждой из переменных, т. е. уравнения вида

$$A_{L_1, t_0} \times A_{L_2, \tau_0} \gamma(t, \tau) = f(t_0, \tau_0) \tag{10}$$

или

$$A_{L_1, t_0}(A_{L_2, \tau_0} \gamma(t, \tau)) = A_{L_2, \tau_0}(A_{L_1, t_0} \cdot \gamma(t, \tau)).$$

В развернутом виде уравнение (10) запишется следующим образом:

$$a_1 \cdot a_2 \gamma(t_0, \tau_0) + \frac{a_2 b_1}{\pi} \int\limits_{L_1} \frac{\gamma(t, \tau_0)\, dt}{t - t_0} + \frac{a_1 b_2}{\pi} \int\limits_{L_2} \frac{\gamma(t_0, \tau)\, d\tau}{\tau - \tau_0} +$$

$$+ \frac{b_1 \cdot b_2}{\pi^2} \iint\limits_{L_1 \times L_2} \frac{\gamma(t, \tau)\, dt\, d\tau}{(t - t_0)(\tau - \tau_0)} = f(t_0, \tau_0). \tag{10a}$$

Найдем теперь решение уравнения (10) при разных предположениях на L_1 и L_2.

Пусть L_1, L_2 — окружности единичного радиуса с центрами в начале координат, применяя повторно формулу (5), получим

$$\gamma(t, \tau) = A^{-1}_{L_2 \tau} \cdot (A^{-1}_{L_1, t} f(t_0, \tau_0)) = a_1 a_2 f(t, \tau) - \frac{a_2 b_1}{\pi} \times$$

$$\times \int\limits_{L_1} \frac{f(t_0, \tau)\, dt_0}{t_0 - t} - \frac{a_1 b_2}{\pi} \int\limits_{L_2} \frac{f(t, \tau_0)\, d\tau_0}{\tau_0 - \tau} + \frac{b_1 b_2}{\pi^2} \iint\limits_{L_1 \times L_2} \frac{f(t_0, \tau_0)\, dt_0\, d\tau_0}{(t_0 - t)(\tau_0 - \tau)}. \tag{11}$$

Пусть теперь L_1 — окружность, а L_2 — отрезок $[-1,1]$.

Будем вначале искать решение, имеющее по координате τ индекс 1. В рассматриваемом случае оператор A_{L_1, t_0} однозначно обратим по любой правой части. Для однозначного обращения оператора A_{L_2, τ_0} надо еще знать функцию $\int\limits_{L_2} \gamma(t, \tau)\, d\tau$, которая будет однозначно найдена, если будет задана функция

$$A_{L_1, t_0} \int\limits_{L_2} \gamma(t, \tau)\, d\tau = C_1(t_0). \tag{12}$$

Будем считать, что функция $C_1(t_0)$ удовлетворяет условию Гёльдера на L_1.

Таким образом, в этом случае для однозначного разрешения уравнения (10) надо рассматривать систему

$$\begin{gathered} A_{L_1, t_0}(A_{L_2, \tau_0} \cdot \gamma(t, \tau)) = f(t_0, \tau_0), \\ A_{L_1, t_0}\Big(\int\limits_{L_2} \gamma(t, \tau)\, d\tau\Big) = C_1(t_0). \end{gathered} \tag{13}$$

Применяя теперь последовательно формулы (5) и (6), при $\varkappa = 1$ получим:

$$\gamma(t, \tau) = A_{L_2, \tau}^{-1}(A_{L_1, t}^{-1} f(t_0, \tau_0)) + T_1(\alpha_2)\,\omega_1^{\alpha_2}(\tau)\, A_{L_1, t}^{-1} C_1(t_0) =$$
$$= a_1 \cdot a_2 f(t, \tau) - \frac{a_2 b_1}{\pi} \int_{L_1} \frac{f(t_0, \tau)\, dt_0}{t_0 - t} - \frac{a_1 b_2}{\pi}\, \omega_1^{\alpha_2}(\tau) \times$$
$$\times \int_{L_2} \frac{f(t, \tau_0)\, d\tau_0}{\omega_1(\tau_0)(\tau_0 - \tau)} + \frac{b_1 b_2}{\pi^2}\, \omega_1^{\alpha_2}(\tau) \iint_{L_1 \times L_2} \frac{f(t_0, \tau_0)\, dt_0 d\tau_0}{\omega(\tau_0)(t_0 - t)(\tau_0 - \tau)} +$$
$$+ T_1(\alpha_2)\,\omega_1^{\alpha_2}(\tau) \left[a_1 C_1(t) - \frac{b_1}{\pi} \int_{L_1} \frac{C_1(t_0)\, dt_0}{t_0 - t} \right]. \tag{14}$$

Если решение уравнения (10) будет иметь индекс нуль или минус единицу по переменной τ, то решение его будет даваться формулой

$$\gamma(t, \tau) = A_{L_2, \tau}^{-1}(A_{L_1, t}^{-1} f(t_0, \tau_0)). \tag{14a}$$

При этом, если индекс равен -1 по переменной τ, то $\gamma(t, \tau)$ будет решением при условии

$$\int_{L_2} \frac{f(t, \tau_0)\, d\tau_0}{\omega_{-1}^{\alpha_2}(\tau_0)} \equiv 0. \tag{15}$$

Наконец, рассмотрим случай, когда L_1, L_2 — отрезки $[-1, 1]$.

Будем искать решение, имеющее индекс 1, по обеим переменным, т. е. $\varkappa = (1, 1)$. В этом случае для однозначной разрешимости оператора A_{L_1, t_0} надо знать функцию $\int\limits_{L_1} (A_{L_2, \tau_0} \gamma(t, \tau))\, dt = C_2(\tau_0)$. Для однозначной разрешимости оператора A_{L_2, τ_0} надо знать функцию $\int\limits_{L_2} \gamma(t, \tau)\, d\tau$, которая будет однозначно найдена с помощью оператора A_{L_1, t_0}, если будут известны функция $A_{L_1, t_0}\Big(\int\limits_{L_2} \gamma(t, \tau) \times$ $\times\, d\tau\Big) = C_1(t_0)$ и число $\int\limits_{L_1} dt \int\limits_{L_2} \gamma(t, \tau)\, d\tau = C$.

Таким образом, в этом случае решение будет найдено из системы

$$\begin{gathered} A_{L_1, t_0}(A_{L_2, \tau_0} \gamma(t, \tau)) = f(t_0, \tau_0), \\ \int_{L_1} dt\, (A_{L_2, \tau_0} \gamma(t, \tau)) = C_2(\tau_0), \\ A_{L_1, t_0}\Big(\int_{L_2} \gamma(t, \tau)\, d\tau\Big) = C_1(t_0), \\ \int_{L_1} \Big(\int_{L_2} \gamma(t, \tau)\, d\tau\Big)\, dt = C. \end{gathered} \tag{16}$$

Применяя теперь последовательно формулу (6), получим

$$\gamma(t, \tau) = A_{L_2, \tau}^{-1} (A_{L_1, t}^{-1} f(t_0, \tau_0) + T_1(\alpha_1) \omega_1^{\alpha_1}(t) C_2(\tau_0)) + + T_1(\alpha_2) \omega_1^{\alpha_2}(\tau) (A_{L_1, t}^{-1} C_1(t_0) + T_1(\alpha_1) \omega_1^{\alpha_1}(t) C). \quad (17)$$

Пусть теперь решение имеет индекс 0 по переменной t и индекс 1 по τ, т. е. $\varkappa = (0, 1)$. Тогда оператор A_{L_1, t_0} однозначно обратим по любой правой части, а для однозначной обратимости оператора A_{L_2, τ_0} надо знать функцию $\int\limits_{L_2} \gamma(t, \tau)\, d\tau$, и поэтому решение будет однозначно найдено из системы

$$\begin{aligned} &A_{L_1, t_0} (A_{L_2, \tau_0} \gamma(t, \tau) = f(t_0, \tau_0), \\ &A_{L_1, t_0} \Big(\int\limits_{L_2} \gamma(t, \tau)\, d\tau \Big) = C_1(t_0). \end{aligned} \quad (18)$$

Опять применяя последовательно формулу (6), получим

$$\gamma(t, \tau) = A_{L_2, \tau}^{-1} (A_{L_1, t}^{-1} f(t_0, \tau_0)) + T_1(\alpha_2) \omega_1^{\alpha_2}(\tau) A_{L_1, t}^{-1} C_1(t_0). \quad (19)$$

Везде выше функции $C_1(t_0)$, $C_2(\tau_0)$ удовлетворяют условию Гёльдера на соответствующей кривой.

Укажем теперь решение и систему, из которой его надо искать для остальных случаев индекса.

Если $\varkappa = (-1, 1)$, то система будет иметь вид (18), решение — вид (19), но при условии

$$\int\limits_{L_1} \frac{f(t_0, \tau_0)\, dt_0}{\omega_{-1}^{\alpha_1}(t_0)} \equiv \int\limits_{L_1} \frac{C_1(t_0)\, dt_0}{\omega_{-1}^{\alpha_1}(t_0)} = 0. \quad (20)$$

Решения индексов $\varkappa = (0, 0)$; $(0, -1)$; $(-1, 0)$; $(-1; -1)$ находятся однозначно из уравнения (10). Причем для той переменной, по которой индекс отрицателен, для правой части должно выполняться тождество (20).

Аналогично находятся решения индексов $\varkappa = (1, 0)$; $(1, -1)$.

Итак, если L_1, L_2 — отрезки $[-1, 1]$, то решение $\gamma_{\varkappa_1, \varkappa_2}(t, \tau)$ индекса $\varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2)$ получается по формуле

$$\gamma_{(\varkappa_1, \varkappa_2)}(t, \tau) = A_{L_2, \tau}^{-1} (A_{L_1, t}^{-1} f(t_0, \tau_0) + T_{\varkappa_1}(\alpha_1) \omega_{\varkappa_1}^{\alpha_1}(t) C_2(\tau_0)) + + T_{\varkappa_2}(\alpha_2) \omega_{\varkappa_2}^{\alpha_2}(\tau) (A_{L_1 t}^{-1} C_1(t_0) + T_{\varkappa_1}(\alpha_1) \omega_1^{\alpha_1}(t) \cdot C), \quad (21)$$

где $C_2(\tau_0)$, $C_1(t_0)$ — произвольные функции Гёльдера; C — произвольная константа.

Заметим, что аналогичным образом можно рассмотреть решение характеристических сингулярных интегральных уравнений с интегралами типа Коши любой кратности при условии, что левая часть представляется как произведение одномерных сингулярных операторов.

Список литературы: 1. *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Некоторые сингулярные интегральные уравнения аэродинамики.— Диф. уравнения, 1981, **17**, № 9, с. 1539—1547. 2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Наука, 1968.— 512 с.

Поступила в редколлегию 14.04.82.

УДК 517.53

М. Ю. ЛЮБИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИКИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Введение. Мы рассмотрим динамическую систему на сфере Римана, порожденную итерацией рациональной функции комплексного переменного. Еще в начале века Фату высказал гипотезу [1], которая в современных терминах звучит так: «*Рациональная функция общего положения удовлетворяет аксиоме A Смейла*». Как известно, аксиома A влечет устойчивость динамики на замыкании $P(f)$ множества периодических точек функции f («*P — устойчивость*»). В настоящей работе мы покажем, что P-устойчивость является свойством общего положения в любом голоморфном семействе рациональных функций. Любопытно, что этот факт справедлив и для таких семейств, в которых ни одна функция не удовлетворяет аксиоме A.

На динамику рациональной функции существенно влияет поведение орбит критических точек. Поэтому полезно, забыв на время об остальных траекториях, посмотреть, как орбиты критических точек зависят от параметров системы. При этом возникает последовательность аналитических функций от параметров, которая исследуется с помощью теории нормальных семейств Монтеля. В разделе 2 мы развиваем этот подход, который в контексте однопараметрических семейств полиномов впервые применен Г. М. Левиным [2]. В частности, оказывается, что устойчивость орбит всех критических точек эквивалентна P-устойчивости.

С другой стороны, в окрестности неустойчивой рациональной функции имеется огромное разнообразие в поведении орбит критических точек. Например, произвольная траектория одностороннего сдвига Бернулли может быть «скопирована» траекторией критической точки. Кроме того, для типичной неустойчивой рациональной функции одна из критических точек движется весьма хаотично, а именно, топологически транзитивно на множестве Жюлиа.

Наконец, в последнем разделе рассмотрим некоторые конкретные однопараметрические семейства. Например, в семействе $f_w(z) = 1 + wz^{-2}$ для типичной неустойчивой функции множество Жюлиа совпадает со всей сферой.

Недавно автор получил препринт Сулливана, Сада и Манэ [3], в котором по существу тем же способом, что и в настоящей работе доказана типичность P-устойчивости. Более того, авторы показали, что если наложить на функцию дополнительное условие Якобсона, справедливое в общем положении, то сопрягающий гомеоморфизм продолжается почти на всю сферу. Таким образом, типичная рациональная функция структурно устойчива!

Результаты настоящей работы докладывались в декабре 1981 года на семинаре по динамическим системам под руководством Я. Г. Синая. Их краткое изложение опубликовано в [4].

1. Итерация индивидуальной функции. По поводу большинства фактов, изложенных в этом разделе, мы отсылаем читателя к классическим работам Жюлиа и Фату ([1], см. также [5]).

Сферу Римана обозначим через $\boldsymbol{P}^1$. Пусть $f(z)$ — рациональная функция степени n. Точка $z \in \boldsymbol{P}^1$ называется *регулярной*, если семейство итераций $\{f^m\}$ нормально в некоторой ее окрестности. Следуя Д. Сулливану, дополнение $F(f)$ к множеству регулярных точек будем называть *множеством Жюлиа*. Множество Жюлиа является совершенным множеством, инвариантным относительно f и f^{-1} ($f^{-1}z$ — полный прообраз точки z). Если z — любая точка сферы, кроме, быть может, двух исключений, то $\bigcup\limits_{0 \leqslant m < \infty} f^{-m}z \supset F$. Множество F нигде не плотно или совпадает со всей сферой.

Точка z называется *периодической*, если $f^p z = z$ при некотором p, называемом периодом; наименьший из периодов q — это *порядок* периодической точки z; $\{f^i z\}_{i=0}^{q-1}$ — *цикл*. Замыкание множества периодических точек мы будем обозначать через $P(f)$. Если U — локальная координата в окрестности периодической точки порядка q, то равенство $Df^q(z) = \lambda(z)\,du$ корректно определяет *мультипликатор* $\lambda(z)$. Периодическая точка (ее цикл) называется *притягивающей*, *нейтральной* или *отталкивающей* в зависимости от того, $|\lambda(z)| < 1$, $|\lambda(z)| = 1$ или $|\lambda(z)| > 1$.

Притягивающие циклы лежат вне множества Жюлиа. *К каждому притягивающему циклу сходится орбита некоторой критической точки* (точка z называется *критической*, если $Df(z) = 0$), и, следовательно, *число притягивающих циклов не превосходит* $2n - 2$.

Вопрос о принадлежности нейтрального цикла $\{f^i z\}_{i=0}^{p-1}$ множеству Жюлиа непосредственно связан с проблемой аналитической линеаризации f^p в окрестности точки z. А именно, *для того, чтобы функция f^p в окрестности точки z была аналитически сопряжена с вращением диска* (т. е. $\varphi(f^p\zeta) = \lambda\varphi(\zeta)$, где φ конформно отображает некоторую окрестность точки z на единичный диск), *необходимо и достаточно, чтобы* $z \notin F(f)$. Если цикл $\{f^i z\}_{i=0}^{p-1}$ является *рациональным* (т. е. мультипликатор λ является корнем из 1), то $z \in F(f)$. Если же $\arg\lambda$ далек от рациональных чисел ($|\arg\lambda - m/n| \geqslant Cn^{-(2+\varepsilon)}$), то по теореме Зигеля точка z лежит вне множества Жюлиа. С другой стороны, существуют нейтральные иррациональные циклы, содержащиеся в $F(f)$. В третьем разделе мы дадим простое доказательство этого факта из категорных соображений. *Если $\{z_i\}$ — рациональный цикл, то существует критическая точка, орбита которой сходится к циклу $\{z_i\}$* (Фату). *Если цикл $\{z_i\}$ иррационален и содержится в $F(f)$, то можно утверждать, что $\{z_i\}$ содержится в предельном*

множестве $\omega(c)$ *орбиты некоторой критической точки* c. Это является следствием следующего факта.

Лемма 1.1. *Если в окрестности* U *определено семейство* $\{f_i^{-m}\}$ *однозначных ветвей функций* f^{-m}, *то* 1) *семейство* $\{f_i^{-m}\}$ *нормально и* 2) *если* $U \cap F \neq \varnothing$, *то* $\|Df_i^{-m}\| \to 0$ *равномерно на компактных подмножествах* в U · ($\|Dg\|$ — *сферическая норма дифференциала*).

Наконец, имеет место следующий глубокий факт, доказанный Фату: *общее число нейтральных циклов не превосходит* $4n-4$. Таким образом, функция f имеет бесконечное число отталкивающих циклов. *Отталкивающие циклы образуют плотное подмножество в множестве Жюлиа;* $F(f) = \overline{\mathrm{Per}^u(f)}$.

Через P_m обозначим множество периодических точек с периодом m, а через $\widetilde{P}_m \subset P_m$ — множество периодических точек порядка m. Рассмотрим меры $\mu_m = \frac{1}{|P_m|} \sum\limits_{\zeta \in P_m} \delta_\zeta$, $\widetilde{\mu}_m = \frac{1}{|\widetilde{P}_m|} \sum\limits_{\zeta \in \widetilde{P}_m} \delta_\zeta$, где δ_ζ — единичная масса, сосредоточенная в точке ζ. В [6] показано, что $\mu_m \to \mu$, где μ — мера, носитель которой совпадает с множеством F. Нам понадобится небольшое уточнение этого факта.

Теорема 1.1. $\lim \widetilde{\mu}_m = \mu$.

Доказательство. Пусть $\{z_i\}_{i=1}^s$ — все рациональные нейтральные периодические точки функции f; p_i — порядок точки z_i; λ_i — ее мультипликатор, являющийся корнем порядка ν_i из 1. Пусть, далее, r_i — кратность корня $z = z_i$ в уравнении $f^{p_i \nu_i} z = z$. Тогда z_i является корнем той же кратности в уравнении $f^{p_i l} z = z$, если l делится на ν_i и является простым корнем этого уравнения в противном случае. Отсюда следует, что уравнение s $f^m z = z$ имеет по крайней мере $n^m + 1 - \sum\limits_{i=1}^{s} r_i$ простых корней. Следовательно, $|P_m| \sim n^m$. С другой стороны, $|P_m \setminus \widetilde{P}_m| \leqslant \sum\limits_{d|m,\ d<m} (n^d + 1) = O(n^m)$. Отсюда, очевидно, вытекает, что $\lim(\mu_m - \widetilde{\mu}) = 0$.

Следствие 1.1. *Для любого* ε *найдется такое* N, *что при* $m \geqslant N$ *множество* $\widetilde{P}_m$ ε-*плотно в множестве Жюлиа.*

В работе [7] Д. Сулливан дал полное описание динамики на дополнении к множеству Жюлиа. Если U — компонента связности дополнения $\boldsymbol{P}^1 \setminus F(f)$, то при некотором l компонента $V = f^l U$ является периодической, т. е. $f^p V = V$. При этом возможны 2 случая: 1) существует такая p-периодическая точка $x \in \overline{V}$, что $f^{pm} z \to x$ ($m \to \infty$, $z \in V$) (это вариант теоремы Данжуа — Вольфа); если $x \in \partial V$, то x — рациональная нейтральная точка; 2) f^p конформно отображает V на себя. При этом $f^p | V$ конформно эквивалентно иррациональному вращению диска (пример Зигеля) или кольца (пример Эрмана (см. [7]). Из леммы 1.1 следует, что *граница* ∂V

содержится в объединении предельных множеств орбит критических точек.

Инвариантный компакт X будем называть *отталкивающим* (точнее следовало бы говорить «гиперболически отталкивающим»), если существуют такие константы $C>0$ и $\lambda>1$, что $\| Df^m(x)\| \geqslant C\lambda^m$ $(x \in X)$. Мы будем говорить, что *инвариантное множество поглощает орбиту точки* z, если $f^N z \in X$ при некотором N.

Предложение 1.1. *Если орбиты всех критических точек поглощаются отталкивающим инвариантным множеством* X, *то множество Жюлиа совпадает со всей сферой.*

Доказательство можно получить средствами, известными со времен Фату, но мы для простоты используем теорему Сулливана. Предположим, что функция f обладает диском Зигеля или кольцом Эрмана V. Можно считать, что V — ограниченная область плоскости $\boldsymbol{C}$ (так как $\boldsymbol{P}^1 \setminus V$ имеет непустую внутренность). Так как f^p конформно отображает область V на себя, то по принципу минимума $|(f^{pm})'(z)| \geqslant \min\limits_{\zeta \in \partial V} |(f^{pm})'(\zeta)|$ $(z \in V)$. Но граница ∂V содержится в объединении ω-предельных множеств орбит критических точек и, значит, принадлежит отталкивающему множеству X. Отсюда вытекает, что $|(f^{pm})'(z)| \to \infty$ $(z \in V)$ вопреки нормальности семейства $\{f^{pm}\}$ в области V.

Если же $F(f) \neq \boldsymbol{P}^1$, но диски Зигеля и кольца Эрмана отсутствуют, то из теорем Сулливана и Фату следует, что орбита некоторой критической точки сходится к притягивающему или нейтральному циклу, которые заведомо не могут принадлежать отталкивающему множеству.

Следствие 1.2. *Если орбиты всех критических точек функции f поглощаются отталкивающими циклами, то* $F(f) = \boldsymbol{P}^1$.

Именно этот эффект лежал в основе известных примеров рациональных функций со свойством $F(f) = \boldsymbol{P}^1$.

2. Рациональная функция общего положения $\boldsymbol{P}$-устойчива. Множество Q_n рациональных функций степени n естественно вложено в $2n+1$-мерное комплексное проективное пространство $\boldsymbol{P}^{2n+1}$. Это вложение индуцирует на Q_n структуру комплексного многообразия. Рассмотрим произвольное связное комплексное подмногообразие M.

Пусть X и Y — замкнутые подмножества сферы, инвариантные относительно отображений f и g соответственно. Говорят, что $f|X$ и $g|Y$ *топологически сопряжены, если существует такой гомеоморфизм* $h: X \to Y$, *что* $hfh^{-1} = g$.

Определение 2.1. *Рациональная функция $f \in M$ называется P-устойчивой (в семействе M), если существует такая окрестность $U \subset M$ функции f, что $f|P(f)$ и $g|P(g)$ топологически сопряжены для любой функции $g \in U$, причем сопрягающий гомеоморфизм $h_g: P(f) \to P(g)$ непрерывно зависит от g (на множестве непрерывных отображений $P(f) \to \boldsymbol{P}^1$ вводится равномерная топология).*

Теорема 2.1. *Множество P-устойчивых рациональных функций открыто и плотно в M.*

Далее будем использовать элементарные свойства аналитических множеств, которые содержатся, например, в первых главах книги [8]. Основную роль при доказательстве теоремы 2.1. играет семейство $\{X_m\}$ аналитических подмножеств многообразия $M \times \boldsymbol{P}^1$, заданных в $M \times \boldsymbol{P}^1$ уравнениями $f^m z = z$. Рассмотрим естественную проекцию $\pi : M \times \boldsymbol{P}^1 \to M$. Сужение $\pi | X_m$ является разветвленным накрытием. Через $L_m \subset M$ обозначим множество ветвления накрытия $\pi | X_m$. Если $f \in L_m$, то f обладает кратной периодической точкой z (т. е. $\mathcal{D}f^m(z)/du = 1$, где u — локальный параметр в окрестности точки z). Обратное также справедливо, если в семействе M имеется хотя бы одна функция без кратных периодических точек.

Множество $\overline{\bigcup\limits_{1<m<\infty} L_m}$ обозначим через K, а его дополнение через σ. Мы покажем, что σ совпадает с множеством P-устойчивых функций. Для того чтобы заодно получить более точную информацию о расположении множеств L_m, введем в рассмотрение аналитическое множество $Y_m = \overline{X_m \setminus \bigcup\limits_{d|m} X_d}$. На множестве Y_m плотны такие точки (f, z), что z — периодическая точка порядка m функции f. Через $N_m \subset M$ обозначим множество ветвления проекции π: $Y_m \to M$. Следующая лемма носит предварительный характер.

Лемма 2.1. *Предположим, что $x = (f, z) \in Y_p \cap Y_q$, где $p < q$. Тогда а) q делится на p; б) точка z является периодической точкой порядка p функции f, ее мультипликатор λ равен $e^{2\pi i l/d}$, где l взаимно просто с d*; в) x — регулярная точка проекции $\pi | Y_p$ и точка ветвления проекции $\pi | Y_q$; г) если p, q, m попарно различны, то $Y_p \cap Y_q \cap Y_m = \varnothing$.*

Доказательство. Предположим, что z — периодическая точка порядка r $((f, z) \in Y_r)$. Тогда $x = (f, z)$ может принадлежать только поверхностям вида Y_{rl} (l — целое). Если мультипликатор λ не является корнем из 1, то x — регулярная точка проекции $\pi | X_{rl}$ и, следовательно, $x \notin Y_{rl}$.

Пусть мультипликатор λ является корнем порядка ν из 1. По тем же причинам, что и выше, $x \notin Y_{rl}$, если l не делится на ν. Разложим $f^{r\nu}$ в ряд в окрестности точки z, выбрав локальный параметр u так, чтобы точке z соответствовало $u = 0$. Имеем $f^{r\nu} = a_s u^s + \cdots$, где $a_s \neq 0$, s — индекс ветвления поверхности $f^{r\nu}\zeta = \zeta$ в точке x во всем пространстве рациональных функций. Тогда $f^{r\nu l} = l a_s u^s + \cdots$ и, следовательно, индекс ветвления поверхности $f^{r\nu l}\zeta = \zeta$ в $Q_n \times \boldsymbol{P}^1$ также равен s. Отсюда следует, что поверхности, заданные в $Q_n \times \boldsymbol{P}^1$ уравнениями $f^{r\nu}\zeta = \zeta$ и $f^{r\nu l}\zeta = \zeta$, совпадают в некоторой окрестности точки x. Это непосредственно влечет,

* Таким образом, в точке $f \in M$ происходит бифуркация рождения притягивающего цикла порядка q из притягивающего цикла порядка p.

что $x \notin Y_{rvl}$. Итак, мы показали, что точка x может принадлежать лишь поверхностям Y_r и Y_{rv}, и свойства *а*), *б*) и *г*) проверены.

Остается показать, что x — точка ветвления $\pi | Y_q$. Рассмотрим для этого преобразование $A : Y_q \to Y_q$, $A(f, z) = (f, fz)$. Так как множество неподвижных точек преобразования A^p нигде не плотно на Y_q, то в окрестности точки $x \in Y_p \cap Y_q$ найдется нетривиальная орбита. Так как орбиты лежат в слоях проекции $\pi | Y_q$, то x — точка ветвления.

Пусть Z — аналитическое множество. *Голоморфной функцией на Z мы всегда будем называть голоморфное отображение $Z \to \boldsymbol{P}^1$.* Пространство голоморфных функций снабжается топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах в Z. Так же, как и в классической ситуации, *семейство $\{\varphi_\alpha\}$ голоморфных функций на Z называется нормальным, если оно предкомпактно.* Для нас исключительно важную роль (особенно в следующем разделе) будет играть

Теорема Монтеля. *Пусть имеются 3 функции ψ_1, ψ_2, ψ_3 такие, что уравнения $\varphi_\alpha(z) = \psi_i(z)$ и $\psi_i(z) = \psi_j(z)$ $(i \neq j)$ не имеют корней в Z. Тогда семейство $\{\varphi_\alpha\}$ нормально.*

Доказательство. В случае $\psi_i = \text{const}$ см. в [9]. Случай исключительных функций сводится к этому заменой $g_\alpha = \dfrac{\varphi_\alpha - \psi_1}{\varphi_\alpha - \psi_2} \times \times \dfrac{\psi_3 - \psi_2}{\psi_3 - \psi_1}$.

Замечание. В действительности условие $\psi_i(z) \neq \psi_j(z)$ $(i \neq j)$ излишне, но доказательство чуть сложнее, а для наших целей достаточно такой формы теоремы Монтеля.

Через $N_m \subset M$ обозначим множество ветвления проекции $\pi | Y_m$, через λ_m — голоморфную функцию на Y_m, заданную в локальных координатах так: $\lambda_m(f, z) = \mathcal{D}f^m(z)/du$ (λ_m вне точек ветвления — это просто мультипликатор).

Основная лемма. *Пусть U — такая односвязная область в M, что $U \cap N_{m_k} = \varnothing$ для некоторой подпоследовательности $m_k \to \infty$. Тогда а) $U \cap L_m = \varnothing$ для всех m; любая связная компонента поверхности $Y_m \cap \pi^{-1}U$ задается уравнением $z = \varphi_{m,i}(f)$, где $\varphi_{m,i} : U \to \boldsymbol{P}^1$ — голоморфная функция; б) замыкание Φ семейства $\{\varphi_{m,i}\}$ обладает следующими свойствами: (i) если $\varphi(f_0) = \psi(f_0)$ $(\varphi, \psi \in \Phi)$, то $\varphi = \psi$; (ii) семейство Φ компактно; (iii) семейство Φ инвариантно относительно преобразования $A : (A\varphi)(f) = f\varphi(f)$; в) если функция $\lambda_{m,i} = \lambda_m(f, \varphi_{m,i}(f))$ отлична от константы, то $|\lambda_{m,i}| < 1$ или $|\lambda_{m,i}| > 1$ всюду в U; г) эндоморфизмы f и g, принадлежащие U, P — сопряжены. Сопрягающий гомеоморфизм преобразует $\varphi(f)$ в $\varphi(g)$ $(\varphi \in \Phi)$ и непрерывно зависит от g.*

Доказательство. На протяжении доказательства заменим многообразие на его окрестность U, не изменяя обозначений для поверхностей X_m, Y_m и т. д. Так как поверхность Y_{m_k} не имеет

точек ветвления над односвязной областью U, то $Y_{m_k} = \bigcup_i Y_{m_k, i}$, где $Y_{m_k, i} \cap Y_{m_k, j} = \varnothing$ $(i \neq j)$ и $Y_{m_k, i}$ является графиком $z = \psi_{k, i}(f)$ голоморфной функции $\psi_{k, i}$ (мы пишем $\psi_{k, i}$ вместо $\varphi_{m_k, i}$ во избежание трехиндексных обозначений). Семейство функций $\{\psi_{k, i}\}$ обладает следующими свойствами: (i_0) если $\psi_{k, i}(f_0) = \psi_{l, j}(f_0)$ в некоторой точке $f_0 \in U$, то $(k, i) = (l, j)$; (ii_0) семейство $\{\psi_{k, i}\}$ нормально; (iii_0) семейство $\{\psi_{k, i}\}$ инвариантно относительно преобразования A.

Проверки: (i_0). Предположим, что $k < l$, но $\psi_{k, i}(f_0) = z_0 = \psi_{l, j}(f_0)$. Тогда по лемме 2.1 (f_0, z_0) — точка ветвления проекции $\pi | Y_{m_l}$ вопреки условию. Следовательно, $k = l$. Если, далее, $i \neq j$, то $Y_{m_k, i} \cap Y_{m_k, j} = \varnothing$, т. е. $\psi_{k, i}(f) \neq \psi_{k, j}(f)$.

(ii_0) Пусть g_1, g_2, g_3 — какие-нибудь 3 функции семейства $\{\psi_{k, i}\}$. Достаточно проверить нормальность семейства, оставшегося после удаления функций g_i. Но в силу свойства (i_0), если $\psi_{k, i} \neq g_j$, то $\psi_{k, i}(f) \neq g_j(f)$ для любого $f \in U$. Из теоремы Монтеля следует требуемое.

Свойство (iii_0) следует из того, что преобразование A переставляет связные компоненты поверхности Y_m.

Рассмотрим теперь замыкание Ψ семейства $\{\psi_{k, i}\}$. Из свойств (ii_0) и (iii_0) следует, что Ψ обладает свойствами (ii) и (iii). Проверим свойство (i). Предположим, что $\varphi(f_0) = \psi(f_0)$ $(\varphi, \psi \in \Psi)$. Существуют последовательности $\{\varphi_m\}$ и $\{\psi_m\}$ семейства $\{\psi_{k, i}\}$, сходящиеся к функциям φ и ψ соответственно. Без ограничения общности можно считать, что $\varphi(f_0) \neq \infty$. Тогда в некоторой окрестности $V \subset U$ функции φ_m и ψ_m голоморфны при достаточно больших m. Имеем, далее, $\varphi_m(f_0) - \psi_m(f_0) \to 0$, но $\varphi_m - \psi_m \to \varphi - \psi \not\equiv 0$. По теореме Гурвица для всех достаточно больших m найдется $h_m \in V$ такое, что $\varphi_m(h_m) - \psi_m(h_m) = 0$. В силу свойства (i_0) $\varphi_m = \psi_m$ и, значит, $\varphi = \psi$. Противоречие доказывает (i) для семейства Ψ.

Рассмотрим теперь отображение $\rho_f : \Psi \to P(f)$, $\varphi \to \varphi(f)$. Очевидно, ρ_f непрерывно. В силу свойства (i) ρ_f инъективно. Так как Ψ компактно, то ρ_f является гомеоморфизмом на свой образ $I(f)$. Образ $I(f)$ содержит все периодические точки функции f порядка m_k. По следствию 1.1 множество Жюлиа $F(f)$ содержится в $I(f)$. Очевидно, отображение ρ_f сопрягает преобразование $A | \Psi$ и функцию $f | I(f)$. Следовательно, $\rho_{g, f} = \rho_g \rho_f^{-1} : I(f) \to I(g)$ сопрягает $f | I(f)$ и $g | I(g)$.

Заметим теперь, что 1) $\rho_{g, f}$ преобразует $F(f)$ в $F(g)$, так как множество Жюлиа $F(f)$ выделяется из $I(f)$ топологическим свойством: его точки не изолированы; 2) $\rho_{g, f}$ преобразует периодические точки в периодические. Следовательно, если $\psi \in \Psi$ и $z_0 = \psi(f_0)$ — отталкивающая периодическая точка функции f_0, то $z = \psi(f)$ — отталкивающая или нейтральная точка функции f. Но так как мультипликатор $\lambda_\psi(f)$ является голоморфной функцией в области U, то $\psi(f)$ — отталкивающая точка при всех $f \in U$.

Далее, график $z=\psi(f)$ содержится в связной компоненте Z множества X_p (p — порядок периодической точки z_0), проходящей через точку (f_0, z_0) и не содержит точек ветвления проекции $\pi \mid X_p$. Следовательно, этот график совпадает с Z.

Пусть теперь $z_0=\psi(f_0)$ $(\psi \in \Psi)$ — нейтральная периодическая точка функции f_0 порядка p. Тогда из доказанного следует, что $|\lambda_p(f, \psi(f))| \leqslant 1$ и, следовательно, $\lambda_p(f, \psi(f)) \equiv \text{const}$. Мы проверили свойство *в)* для функций из семейства Ψ.

Наконец, предположим, что (f_0, z_0) — точка ветвления проекции $\pi \mid X_p$. Тогда $\lambda_p(f_0, z_0)=1$ и так же, как и выше, мы получим, что $\lambda_p \mid Z \equiv 1$, где Z — неприводимая компонента множества X_p, проходящая через (f_0, z_0). Но тогда $z \in F(f)$, если $(f, z) \in Z$. Следовательно, через любую точку $(f, z) \in Z$ проходит график некоторой функции $\psi \in \Psi$. Беря точку гладкости множества Z, получаем, что соответствующий ей график совпадает с компонентой Z. Но тогда через точку (f_0, z_0) проходит еще одна компонента Z_1 поверхности X_p, которая тоже параметризуется функцией $\psi_1 \in \Psi$. С другой стороны, из свойства (i) семейства Ψ вытекает, что $\psi \equiv \psi_1$. Противоречие показывает, что на X_p нет точек ветвления и пункт *а* доказан.

Теперь в качестве последовательности $\{m_k\}$ можем рассмотреть весь натуральный ряд. Тогда семейство Ψ будет совпадать с семейством Φ, а для первого из этих семейств свойства *б* и *в* уже установлены. Для окончания доказательства пункта *г* остается заметить, что образ отображения ρ_f, построенного по семейству Φ, совпадает с $P(f)$, а также проверить непрерывную зависимость сопрягающего гомеоморфизма $\rho_{g, f}$ от g. Но семейство Φ равностепенно непрерывно в окрестности точки g. Следовательно, если h достаточно близко к g, то $d(\varphi(g), \varphi(h))<\varepsilon$ $(\varphi \in \Phi)$, т. е. $\rho_{h, f}$ равномерно близко к $\rho_{g, f}$.

Следствие 2.1. *Множество P-устойчивых функций семейства M совпадает с σ.*

Доказательство. По Основной лемме все функции $f \in \sigma P$-устойчивы. Обратно, пусть $f \in L_p$. Сколь угодно близко к f имеются $g \notin L_p$. Тогда $|(\pi \mid X_p)^{-1} f|<|(\pi \mid X_p)^{-1} g|$. Но $(\pi \mid X_p)^{-1} f$ — это число f-периодических точек с периодом p, инвариантное относительно P-сопряженности. Следовательно, f не является P-устойчивым.

Следствие 2.2. *Если $f \in K$, то найдется такая последовательность $f_m \rightarrow f$, что $f_m \in N_m$.*

Через $s_p(f)$ обозначим число притягивающих циклов функции f порядка p, $s(f)=\sum s_p(f)$ — общее число притягивающих циклов, $\nu_{p, \lambda}$ — число нейтральных циклов порядка p с мультипликатором λ.

Следствие 2.3. *а) Функции $s_p(f)$, $\nu_{p, \lambda}(f)$ постоянны на связных компонентах множества σ. б) Если $f \in K$, то существует последовательность $h_p \rightarrow f$ такая, что h_p имеет притяги-*

вающий цикл порядка p. *Следовательно*, $s(h_p) > s(f)$ *при достаточно больших* p.

Доказательство б). Через Z_p обозначим объединение таких неприводимых компонент поверхности Y_p, на которых функция λ_p тождественно равна 1. Таких множеств Z_p имеется лишь конечное число, так число нейтральных рациональных циклов не превосходит $2n-2$. Положим $p_0 = \max\{p \mid Z_p \neq \varnothing\}$. По предыдущему следствию существует такая последовательность $f_p \to f$, что $f_p \in N_p$. Пусть V_p — неприводимая компонента множества Y_p, проходящая через соответствующую точку ветвления $(f_p, z_p) \in Y_p$. Функция λ_p голоморфна на V_p, не равна тождественно 1 при $p > p_0$ и $\lambda_p(f_p, z_p) = 1$. Следовательно, сколь угодно близко от (f_p, z_p) найдется такая точка $(h_p, \zeta_p) \in V_p$, что $|\lambda_p(h_p, \zeta_p)| < 1$, т. е. ζ_p — притягивающий цикл порядка p для h_p, что и требовалось. Свойство $s(h_p) > s(f)$ следует из того, что при малом возмущении притягивающие циклы функции f не исчезнут.

Следствие 2.4. *Множество* K *нигде не плотно*.

Доказательство. Если $f \in K$, то сколь угодно близко от f найдется функция f_1, такая что $s(f_1) > s(f)$. Если $f_1 \in K$, то процедура повторяется. Так как $s(f_i) \leqslant 2n-2$, то процесс оборвется за конечное число шагов.

Итак, множество σ плотно в M, и теорема 2.1 доказана: рациональная функция общего положения P-устойчива.

Будем говорить, что *множество* $Z \subset M$ *является множеством локальной единственности, если для любой области* U, *пересекающейся с* Z, *и любой голоморфной функции* $\varphi\colon U \to \boldsymbol{P}^1$ *из того, что* $\varphi \mid Z = 0$ *следует, что* $\varphi = 0$. *Очевидно, множество локальной единственности является совершенным*.

Мы говорим, что $x \in M$ *является точкой сгущения семейства подмножеств* $\{Z_\alpha\}$, *если существует последовательность* $x_{\alpha k} \in Z_{\alpha_k} \setminus \bigcup_{i<k} Z_{\alpha_i}$, *такая что* $x_{\alpha_k} \to x$.

Теорема единственности. *Пусть в области* $U \subset M$ *задано семейство* $\{Z_\alpha\}$ *замкнутых однородно* $\dim M - 1$*-мерных аналитических подмножеств, имеющее точку сгущения внутри* U. *Если голоморфная функция* $\varphi : U \to \boldsymbol{P}^1$ *обращается в нуль на всех множествах* Z_α, *то* $\varphi = 0$.

Следствие 2.5. *Множество* K *является множеством локальной единственности*.

Доказательство. Пусть $f \in K$, U — окрестность точки f, $f_m \in N_m$ и $f_m \to f$. Через T_m обозначим какую-нибудь неприводимую компоненту множества $N_m \cap U$, проходящую через точку f_m. Тогда T_m — замкнутое аналитическое подмножество в U коразмерности 1. Если $T_{m_i} = T_{m_j}$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$, то $l \leqslant 2n-2$. Действительно, по лемме 2.1 *b* функция $f \in \bigcap T_{m_i}$ имеет, по крайней мере, l различных нейтральных рациональных циклов. Следовательно, существует последовательность $\{T_{m_i}\}_{i=1}^{\infty}$, такая что $T_{m_i} \neq T_{m_j}$. Но тогда сколь

угодно близко от f_{m_j} найдется $\tilde{f}_{m_j} \in T_{m_j} \setminus \bigcup_{l<j} T_{m_k}$. Следовательно, f — точка сгущения семейства $\{T_m\}$.

Будем говорить, что *нейтральный цикл* $\{f^i z\}_{i=0}^{p-1}$ *функции* f *является устранимым, если мультипликатор* λ_p *отличен от* const *на любой неприводимой компоненте поверхности* Y_p, *проходящей через точку* $(f, z) \in M \times \boldsymbol{P}^1$. Из теоремы единственности следует, что тогда это свойство выполняется в любой окрестности $U \subset Y_p$ точки (f, z). Если в семействе M имеется хотя бы одна функция f_0 без нейтральных циклов, то нейтральные циклы любой функции $f \in M$ устранимы. Из пункта b основной леммы сразу вытекает

Следствие 2.6. *Если функция* $f \in M$ *имеет устранимый нейтральный цикл, то* $f \in K$.

Заметим также, что множество функций с устранимым нейтральным циклом плотно в K, так как нейтральные циклы всех функций f_p из следствия 2.2, начиная с некоторой, устранимы (см. доказательство следствия 2.3).

Лемма 2.2. *Пусть* $\varphi : U \to \boldsymbol{P}^1$ — *такая голоморфная функция в окрестности* $U \subset M$, *что свойство* $f^p(\varphi(f)) = \varphi(f)$ *выполняется или нарушается одновременно для всех* $f \in U$. *Предположим, что* $\varphi(f)$ *не принадлежит орбитам критических точек функции* f. *Тогда* $U \subset \sigma$.

Доказательство. Рассмотрим поверхность $\Gamma_m \subset U \times \boldsymbol{P}^1$, заданную уравнением $f^m z = \varphi(f)$. Из условия леммы следует, что проекция $\Gamma_m \to U$ является неразветвленным накрытием. Без ограничения общности можно считать, что область U односвязна. Тогда поверхность Γ_m является объединением попарно не пересекающихся листов $\Gamma_{m,i}$, задаваемых уравнениями $z = \psi_{m,i}(f)$, где $\psi_{m,i} : U \to \boldsymbol{P}^1$ — голоморфная функция. Семейство $\{\psi_{m,i}\}$ обладает следующими свойствами: (i) если $\psi_{m,i}(f_0) = \psi_{k,j}(f_0)$, то $\psi_{m,i} = \psi_{k,j}$; (ii) семейство $\{\psi_{m,i}\}$ нормально; (iii) если $m \geqslant 1$, то $A\psi_{m,i} = \psi_{m-1,j}$, где $j = j(m, i)$, A преобразует функцию $\varphi(f)$ в функцию $f(\varphi(f))$; (iv) множество Жюлиа $F(f)$ содержится в предельном множестве для $\{\psi_{m,i}(f)\}_{m,i}$. Из этих свойств так же, как и при доказательстве основной леммы, вытекает, что любая функция f из U является P-устойчивой, т. е. $U \subset \sigma$.

Напомним, что *цикл* $\{f^i z\}_{i=0}^{p-1}$ *мы называем поглощающим, если он содержится в орбите некоторой критической точки. Поглощающий цикл будем называть устранимым, если на каждой неприводимой компоненте* Z *множества* X_p, *проходящей через точку* (f, z), *есть такая точка* (g, ζ), *сколь угодно близкая к* (f, z), *что* $\{g^i \zeta\}_{i=0}^{p-1}$ *не является поглощающим циклом.* Если в семействе M имеется хотя бы одна функция f_0 без поглощающих циклов, то любой поглощающий цикл функции $f \in M$ устраним. Через S обозначим множество функций $f \in M$, обладающих устранимым отталкивающим поглощающим циклом.

Следствие 2.7. *Множество S является плотным подмножеством в K.*

Доказательство. Поглощение орбиты критической точки отталкивающим циклом является P-инвариантным свойством. Но если $f \in S$, то это свойство нарушается малым возмущением функции f. Следовательно, $S \subset K$.

Пусть теперь $f_0 \in K$ и $\{f_0^k z^0\}_{k=0}^{p-1}$ — непоглощающий отталкивающий цикл функции f_0. Тогда в окрестности точки (f_0, z_0) множество $f^p z = z$ допускает голоморфную параметризацию $z = \varphi(f)$. Из предыдущей леммы следует, что сколь угодно близко от f_0 есть такая функция f, что цикл точки $\varphi(f)$ поглощает орбиту некоторой критической точки функции f. Этот цикл является отталкивающим, если f достаточно близка к f_0 и является устранимым, так как цикл точки z_0 непоглощающий. Следовательно, множество S плотно в K.

3. Устойчивость орбиты критической точки. Рассмотрим аналитическое множество критических точек $C = \{(f, c) \in M \times \boldsymbol{P}^1 \mid \mathcal{D}f(c) = 0\}$ и последовательность голоморфных функций $\psi_m : C \to \boldsymbol{P}^1$ на нем: $\psi_m : (f, c) \to f^m c$. Эта последовательность отвечает за зависимость орбиты критической точки от параметров системы. Так как ее изучение практически не использует специфику возникновения множества C, то мы рассмотрим более общую ситуацию.

Пусть f_x — семейство рациональных функций, голоморфно зависящее от точки x аналитического пространства Z. Мы будем предполагать далее, что Z локально неприводимо. Рассмотрим последовательность голоморфных функций $\psi_m : Z \to \boldsymbol{P}^1$, удовлетворяющую рекуррентному уравнению $\psi_{m+1}(x) = f_x(\psi_m(x))$ (или сокращенно $\psi_{m+1} = f(\psi_m)$). Мы далее считаем, что последовательность $\{\psi_m\}$ не является периодической, начиная с некоторого места (этот случай тривиален). Точка $x \in Z$ называется *регулярной*, если семейство $\{\psi_m\}$ нормально в некоторой ее окрестности. Множество регулярных точек обозначим через $\mathfrak{R}$, а его дополнение через L. Основой изучения этой последовательности служит признак нормальности Монтеля, сформулированный в начале второго раздела.

Мы опустим доказательство следующего простого факта.

Предложение 3.1. *Предположим, что орбита $\{\psi_m(x_0)\}$ сходится к притягивающему циклу $\{z_0^{(i)}\}_{i=0}^{p-1}$ функции $f_0 \equiv f_{x_0}$. Тогда а) $x_0 \in \mathfrak{R}$; б) орбита $\{\psi_m(x)\}$ также сходится к притягивающему циклу функции f_x, если x лежит в компоненте связности $\mathfrak{R}_0$ множества $\mathfrak{R}$, содержащей точку x_0; в) предельные функции семейства $\{\psi_m(x)\}$ в компоненте $\mathfrak{R}_0$ — это голоморфные ветви кривой $X_p = \{(x, z) \in Z \times \boldsymbol{P}^1 \mid f_x^p(z) = z\}$, проходящие через точки $(x_0, z_0^{(i)})$.*

Связные компоненты множества $\mathfrak{R}$, на которых имеет место описанная ситуация, будем называть *компонентами первого рода*, а остальные — *компонентами второго рода*.

Рассмотрим цикл $\rho = \{f_0^i z_0\}_{i=0}^{p-1}$ функции $f_0 \equiv f_{x_0}$ порядка p с мультипликатором λ. Напомним, что этот цикл мы называем *устранимым нейтральным*, если $|\lambda| = 1$ и функция $\lambda_p(x, z)$ отлична от const на всех неприводимых компонентах множества X_p, проходящих через точку (f_0, z_0).

Предложение 3.2. *Предположим, что имеет место одна из возможностей: а) цикл ρ — отталкивающий; б) ρ — устранимый нейтральный иррациональный цикл; в) ρ — нейтральный рациональный цикл. Пусть цикл ρ поглощает орбиту $\{\psi_m(x_0)\}$. Тогда $x_0 \in L$. При этом в случае а ни одна подпоследовательность $\{\psi_{m_k}\}$ не является нормальной в окрестности точки x_0.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $z_0 = 0$, z_0 является неподвижной точкой функции f_0, причем в случае b ее мультипликатор равен 1. Кроме того, заменяя функцию ψ_0 на некоторую функцию ψ_l, можно считать, что $\psi_0(x_0) = 0$. Так как $\psi_1 \not\equiv \psi_0$, то существует голоморфная кривая $x = \gamma(w)$ $(\gamma(0) = x_0)$ в Z, не содержащаяся в множестве $\psi_1(x) = \psi_0(x)$. Ограничив семейство f_x и последовательность $\{\psi_m\}$ на эту кривую, мы получим голоморфную функцию $f_w(z)$ в окрестности $(0, 0)$ в $\boldsymbol{C}^2$ $(f_0(0) = 0,\ f_0'(0) = \lambda)$ и последовательность $\{\psi_m(w)\}$ голоморфных функций, удовлетворяющую рекуррентному соотношению $\psi_{m+1}(w) = f_w(\psi_m(w))$, причем $\psi_m(0) = 0$, $\psi_1 \not\equiv \psi_0$. Предположим, что последовательность $\{\psi_m\}$ нормальна.

Последовательность $\{\psi_m\}$ — это траектория бесконечномерной динамической системы, преобразующей функцию ψ в функцию $f(\psi)$. Если $\lambda \neq 1$, то эта система обладает неподвижной точкой h. Удобно превратить h в начало координат. Положим $X = \psi - h$. Имеем: $Y = f(X) - h = f'(h) X + \frac{1}{2!} f''(h) X^2 + \cdots$ Перепишем это преобразование в координатах $X = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k w^{k+1}$, $Y = \sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k w^{k+1}$. Получим $y_k = \lambda x_k + g_k(x_0 \ldots x_{k-1}) + G_k(x_0 \ldots x_{k-1})$, где g_k — линейная форма, а полином G_k не содержит линейных членов и свободного члена. Треугольная форма позволяет явно решать нашу систему. Через $x_k^{(m)}$ обозначим коэффициенты функции $X_m = \psi_m - h$.

а) $|\lambda| > 1$. Если подпоследовательность $\{\psi_{m_k}\}$ нормальна, то подпоследовательность $\{x_0^{(m_k)}\}$ ограничена. Тогда из уравнения $x_0^{(m+1)} - \lambda x_0^{(m)} = 0$ следует, что $x_0^{(m)} = 0$ $(m = 0, 1, \ldots)$. Предполагая, что $x_i^{(m)} = 0$ $(i < k)$, получаем для $x_k^{(m)}$ уравнение $x_k^{(m)} - \lambda x_k^{(m-1)} = 0$, откуда заключаем, что $x_k^{(m)} = 0$. Следовательно, $X_m = 0$, т. е. $\psi_m = h$. Противоречие. *б)* Предположим по индукции, что $g_{k-1}(x_0 \ldots x_{k-2}) = 0$ и $x_i^{(m)} = \lambda^m x_i + \sum\limits_{j \geqslant 2} c_j \lambda^{jm}$ $(i < k)$ (сумма конечна, $x_i \equiv x_i^{(0)}$). Тогда последовательность $\{x_k^{(m)}\}_m$ удов-

летворяет линейному неоднородному уравнению, в правой части которого стоит комбинация прогрессий со знаменателями $\neq 1$ (так как λ — не корень из 1):

$$x_k^{(m+1)} - \lambda x_k^{(m)} = \lambda^m g_k(x_0 \ldots x_{k-1}) + \sum_{j \geqslant 2} d_j \lambda^{jm}.$$

Отсюда находим $x_k^{(m)} = \lambda^m x_k + k\lambda^m g_k(x_0 \ldots x_{k-1}) + \sum_{j \geqslant 2} e_j \lambda^{jm}$. Ограниченность $\{x_k^{(m)}\}_m$ и стоящей справа суммы влечет равенство $g_k(x_0 \ldots x_{k-1}) = 0$ и требуемый для индукции вид $x_k^{(m)}$.

Но формы $g_k(x_0 \ldots x_{k-1}) + \lambda x_k$ задают в координатах линейную часть нашей системы, т. е. $X \to f'(h) X$. Следовательно, $(f'(h) - \lambda) X_0 \equiv 0$. Так как z_0 — устранимая нейтральная периодическая точка, то $f'(h) \neq \lambda$. Следовательно, $X_0 = 0$, т. е. $\psi_0 = h$. *в*) Если $\lambda = 1$, то мы не можем, вообще говоря, голоморфно параметризовать кривую $f(z, w) = z$. Поэтому приходится действовать в исходных координатах: $\psi_m(w) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k^{(m)} w^k$. Тогда $x_k^{(m+1)} - x_k^{(m)} = \alpha_k + h_k(x_0^{(m)} \ldots x_{k-1}^{(m)})$, где свободный член полинома h_k равен нулю. Отсюда очевидной индукцией по k (с использованием ограниченности $\{x_k^{(m)}\}_m$) вытекает, что $x_k^{(m)} = \mathrm{const} = x_k$. Следовательно, $\psi_1 = \psi_0$. Противоречие.

Положим $\Psi(x) = \overline{\{\psi_m(x)\}}$. Будем говорить, что функция f_x *Ψ-устойчива*, если $f_x | \Psi(x)$ и $f_y | \Psi(y)$ топологически сопряжены при y, достаточно близких к x и сопрягающий гомеоморфизм непрерывно зависит от y. Через B обозначим множество таких регулярных значений параметра x, для которых орбита $\{\psi_m(x)\}$ конечна. Определение тонкого множества см. [8].

Теорема 3.1. *а) Если U — компонента первого рода множества $\mathfrak{K}$, то $U \cap B$ — объединение двух тонких множеств. б) Если U — компонента второго рода, то $U \cap B$ — тонкое замкнутое подмножество в U; в) Множество B нигде не плотно в $\mathfrak{K}$: 2) Множество Ψ-устойчивых значений параметра совпадает с $\mathfrak{K} \setminus B$.*

Доказательство. Аналитическое множество $\Gamma_{m,p}$ $(p > 0)$, заданное в Z уравнением $\psi_{m+p}(x) = \psi_m(x)$, не совпадает с Z, так как мы предполагаем, что последовательность $\{\psi_m\}$ бесконечна. Следовательно, множество $B = \bigcup \Gamma_{m,p} \cap \mathfrak{K}$ имеет первую категорию по Бэру. Таким образом, $\mathfrak{K} \setminus B$ плотно в $\mathfrak{K}$.

Зафиксируем связную компоненту U множества $\mathfrak{K}$. Рассмотрим односвязную область V, компактно содержащуюся в U. Пусть $x' \in V \cap \Gamma_{m,p}$. Тогда из предложения 3.2 вытекает, что $z' = \psi_m(x')$ является притягивающей или неустранимой нейтральной периодической точкой. При этом существует голоморфная функция $\varphi: V \to \boldsymbol{P}^1$, параметризующая ветвь поверхности X_p, проходящую через точку (x', z'). Таких функций может быть лишь конечное число, так как общее число притягивающих и нейтральных циклов

не превосходит $\eta(n)$. Обозначим эту конечную систему функций через T.

Рассмотрим аналитическое множество Δ_m^φ, заданное в V уравнением $\psi_m(x) = \varphi(x)$. Мы показали, что $B \cap V = \bigcup_{\varphi \in \tau} \bigcup_m \Delta_m^\varphi$. Проверим, что $\Delta^\varphi \equiv \bigcup_m \Delta_m^\varphi$ обладает свойствами а), б) при фиксированной функции $\varphi \in \tau$. При этом можно считать, что $\varphi(x)$ — неподвижная точка для f_x. Тогда $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \ldots$ (индекс φ мы опускаем). Предположим, что последовательнсcть $\{\Delta_m\}$ имеет предельную точку $x_0 \in V$. Пусть ψ — произвольная предельная функция для нормального семейства $\{\psi_m\}$. Тогда $\varphi | \Delta_m = \psi | \Delta_m$. По теореме единственности $\varphi = \psi$. Следовательно, $\psi_m \to \varphi$.

Рассмотрим, далее, аналитическое множество Λ «прообразов», заданное в $V \times \boldsymbol{P}^1$ уравнением $f(x, z) = \varphi(x)$. Предположим, что $(x_0, \varphi(x_0))$ не является особой точкой этого множества. Тогда через точку $(x_0, \varphi(x_0))$ проходит единственная локальная компонента множества Λ, а именно график $z = \varphi(x)$. Так как $\psi_m \to \varphi$, то графики $z = \psi_m(x)$ не пересекаются с остальными компонентами (в некоторой окрестности $W \ni x_0$ и при $m \geqslant N$). Но тогда $\Delta_{m+1} \cap W = \Delta_m \cap W$ $(m \geqslant N)$, вопреки тому, что x_0 — точка сгущения для $\{\Delta_m\}$. Следовательно, $(x_0, \varphi(x_0))$ — особая точка множества Λ. Этим доказано, что Δ_m — объединение двух тонких множеств.

Заметим, наконец, что если $(x_0, \varphi(x_0))$ — особая точка поверхности Λ, то $\varphi(x_0)$ — суперпритягивающая неподвижная точка для f_{x_0} и, следовательно, U — компонента первого рода. Пункты *а* и *б* доказаны. Пункт *в* непосредственно следует из *а* и *б*. Доказательство пункта *г* (в нетривиальную сторону) проводится так же, как в основной лемме при помощи следующих свойств семейства $\{\psi_m\}$ в $U \setminus B$: (*i*) $\psi_m(x) \neq \psi_l(x)$ $(m \neq l)$: (*ii*) семейство $\{\psi_m\}$ нормально: (*iii*) семейство $\{\psi_m\}$ инвариантно относительно преобразования $A : \varphi \mapsto f(\varphi)$.

Следующий результат дополняет предложение 3.2. Его постановка связана с тем, что любой нейтральный цикл, лежащий в множестве Жюлиа, содержится в предельном множестве орбиты некоторой критической точки. Спрашивается, может ли поведение этой орбиты быть устойчивым по параметру?

Предложение 3.3. *Пусть* z_0 — *устранимая нейтральная периодическая точка функции* f_{x_0}. *Предположим, что* $z_0 \in \overline{\{\psi_m(x_0)\}_m}$. Тогда $x_0 \in L$.

Доказательство. Предположим, что $x_0 \in \mathfrak{K}$, U — связная компонента множества $\mathfrak{K}$, содержащая точку x_0. Тогда U — компонента второго рода (так как $z_0 \in \Psi(x_0)$), а функция $f_{x_0}\Psi$ — устойчива. Следовательно, существует такая голоморфная функция $z = h(x)$ в окрестности точки x_0, что $z_0 = h(x_0) \mapsto h(x)$ при построенной в теореме 3.1 Ψ-сопряженности. Отсюда вытекает,

что функция $z = h(x)$ параметризует ветвь множества $f_x^p(z) = z$ (p — порядок точки x_0), проходящую через (x_0, z_0). Так как z_0 — устранимая нейтральная точка, то $z' = h(x')$ порождает притягивающий цикл при некотором x', причем $z' \in \Psi(x')$. Следовательно, U — компонента первого рода. Противоречие.

Через $S_{p,m}$ обозначим множество тех x, для которых $\psi_m(x)$ — отталкивающая периодическая точка порядка p. Мы знаем, что $S_{p,m} \subset L$.

Лемма 3.1. *Любое иррегулярное значение параметра $x_0 \in L$ является точкой сгущения множеств $S_{p,m}$.*

Доказательство. Рассмотрим какой-нибудь отталкивающий цикл $\{z_0^{(i)}\}_{i=0}^{p-1}$ функции f_0 порядка $p \geqslant 3$, такой что $f_0 \notin S_{p,m}$. Пусть $z^{(i)} = h_i(x)$ — параметризация кривой X_p в окрестности точки $(x_0, z_0^{(i)})$. По теореме Монтеля в любой окрестности точки x_0 одно из уравнений $\psi_m(x) = h_i(x)$ имеет корень.

Из леммы вытекает

Предложение 3.4. *L — множество локальной единственности.*

Рассмотрим теперь голоморфную функцию g в некоторой области U. Мы будем говорить, что g — *исключительная функция*, если $g(x)$ — исключительная точка отображения f_x при всех $x \in U$. Исключительных функций существует не более двух. Через $E_m^{(g)}$ обозначим множество, заданное уравнением $\psi_m(x) = g(x)$.

Предложение 3.5. *Пусть g — не исключительная функция, $x_0 \in L$. Тогда существует последовательность $y_m \to x_0$,* такая что *$y_m \in E_m^{(g)}$.*

Доказательство. Предполагая противное, найдем окрестность U точки x_0 и последовательность $m_k \nearrow \infty$, такие что $E_{m_k} \cap U = \varnothing$. В окрестности U найдется такое значение параметра x', что $z' = h(x')$ — не исключительная точка для $f_{x'}$. Тогда при некотором l имеем $|f_{x'}^{-l}z'| \geqslant 3$. Следовательно, множество Λ, заданное в $U \times \boldsymbol{P}^1$ уравнением $f_x^l(z) = h(x)$ является k — листным разветвленным накрытием над U, где $k \geqslant 3$. Множество ветвления $\Gamma \subset U$, являясь тонким, не покрывает все $U \cap L$. Найдем $x'' \in (U \cap \cap L) \setminus \Gamma$. Над окрестностью точки x'' множество Λ распадается в объединение графиков $k \geqslant 3$ функций. По теореме Монтеля семейство $\{\psi_{m_k}\}$ нормально в этой окрестности, вопреки предложению 3.2.

В заключение рассмотрим основной частный случай.

Пусть C — аналитическое пространство, заданное в $M \times \boldsymbol{P}^1$ уравнением $Df(c) = 0$. Чтобы были применимы результаты настоящего раздела заменим C на его нормализацию p: $\hat{C} \to C$, которая уже является локально неприводимым пространством. Пусть $\hat{\pi} = \pi p$: $\hat{C} \to M$. В качестве последовательности ψ_m рассмотрим поднятие на $\hat{C}$ последовательности функций $(f, c) \mapsto f^m c$. Множество $\mathfrak{R}$ плотно в $\hat{C}$. Действительно, если $x \in L$, то в любой окре-

стности x есть корень уравнения $\psi_m(x) = c(px)$. Это значит, что критическая точка c функции f (где $(f, c) = px$) порождает суперпритягивающий цикл и, следовательно, $x \in \mathfrak{R}$.

Следующий факт связывает результаты второго и третьего разделов:

Теорема 3.2. *Для того чтобы функция $f \in M$ была P-устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы $\hat{\pi}^{-1} f \in \mathfrak{R}$.*

Доказательство непосредственно получается сравнением предложения 2.7 и леммы 3.1.

4. Типичные свойства неустойчивых функций. Примеры. Пусть, по-прежнему, f_x — семейство рациональных функций, голоморфно зависящее от параметра $x \in Z$, где Z — аналитическое пространство. Предположим, что некоторая функция $f_0 \equiv f_{x_0}$ имеет инвариантное отталкивающее множество (см. раздел 1). Тогда в некоторой окрестности U точки x все функции f_x также имеют инвариантное отталкивающее множество Λ_x, такое, что $f_0 | \Lambda_0$ и $f_x | \Lambda_x$ топологически сопряжены (на самом деле это справедливо для любых гладких отображений, C^1 — близких к f_0 [10]). При этом сопрягающий гомеоморфизм $h_x : \Lambda_0 \to \Lambda_x$ непрерывно зависит от x.

Лемма 4.1. *Предположим, что в множестве Λ_0 плотны периодические точки функции f_0. Тогда $h_x(a)$ аналитически зависит от x при каждом фиксированном $a \in \Lambda_0$.*

Доказательство. Пусть сначала a — периодическая точка функции f_0, p — ее порядок. Тогда $z = h_x(a) \in \Lambda_x$ является отталкивающей периодической точкой функции f_x. Следовательно, $(x, h_x(a))$ не является точкой ветвления поверхности $f_x^p z = z$, а непрерывная функция $z = h_x(a)$ параметризует ветвь этой поверхности, проходящую через точку (x_0, a). Но такая параметризация автоматически является аналитической. Наконец, если a — произвольная точка множества Λ_0, то функция $h_x(a)$ является равномерным пределом функций $h_x(a_i)$, где $a_i \in P(f_0)$, так как периодические точки плотны в Λ_0, а отображение $(x, a) \mapsto h_x(a)$ непрерывно по совокупности переменных.

Мы будем говорить, что g — *орбита* $\{g^m \zeta\}$ *точки* ζ *копирует f-орбиту* $\{f^m z\}$ *точки* z, *если отображение* $f^m z \mapsto g^m \zeta$ *продолжается до гомеоморфизма замыканий наших орбит.* Следующий результат позволяет строить примеры рациональных функций с предписанным поведением траектории критической точки.

Предложение 4.1. *Пусть Λ_0 — инвариантное отталкивающее множество функции $f_0 \equiv f_{x_0}$, $a \in \Lambda_0 \subset P(f_0)$. Тогда сколь угодно близко к x_0 существует такое значение параметра $x \in Z$, что при некотором N орбита $\{\psi_{m+N}(x)\}_{m=0}^{\infty}$ копирует орбиту $\{f_0^m a\}_{m=0}^{\infty}$.*

Доказательство. Одно из уравнений $\psi_N(x) = h_x(a)$ имеет решение в любой окрестности точки x_0 (предл. 3.5. и предыдущая лемма). Гомеоморфизм $h_x : \Lambda_0 \to \Lambda_x$ дает нужное сопряжение.

Подмножество локально компактного метрического пространства L называется массивным, если оно содержит плотное в L

подмножество типа G_δ (пересечение счетного числа открытых множеств). Далее некоторое свойство будем называть типичным, если оно выполняется на массивном подмножестве значений параметра.

Теорема 4.1. *Для типичного иррегулярного значения параметра $x \in L$ орбита $\{\psi_m(x)\}$ содержится в множестве Жюлиа $F(f_x)$ и плотна в нем.*

Доказательство. Через $\rho_p(x)$ обозначим сферическое расстояние от орбиты $\{\psi_m(x)\}$ до самой далекой отталкивающей периодической точки функции f_x порядка p. Мы покажем, что $\rho_p = 0$ на массивном подмножестве в L. Множество Λ_p тех значений параметра $x \in L$, для которых f_x обладает устранимым нейтральным циклом, нигде не плотно в L. Поэтому достаточно проверить, что в некоторой окрестности U любой точки $x_0 \in L \setminus \Lambda_p$ свойство $\rho_p = 0$ типично. Пусть $a_1, \ldots, a_l$ — отталкивающие периодические точки функции f_0, $z = \varphi_{p.i}(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$ — параметризация кривой $f_x^p z = z$ в окрестности точки (x_0, a_i). Окрестность U выберем так, чтобы она не пересекалась с множеством Λ_p (множество Λ_p замкнуто). Тогда $\{\varphi_{p.i}(x)\}_{i=1}^{l}$ — это полный набор отталкивающих периодических точек функции f_x порядка p. Рассмотрим в окрестности U функцию $\rho_{p.i}^{(m)}(x) = d(\varphi_{p.i}(x), \psi_m(x)\}$ (d — сферическая метрика). Так как $\rho_{p.i}^{(m)}$ непрерывна, то функция $\rho_{p.i}(x) = \inf\limits_{1 \leqslant m < \infty} \rho_{p.i}^{(m)}(x)$ полунепрерывна сверху. Но множество нулей неотрицательной полунепрерывной функции есть множество типа G_δ. С другой стороны, это множество плотно в $U \cap L$, так как содержит те значения параметра, при которых отталкивающий цикл точки $\varphi_{p.i}(x)$ поглощает орбиту $\{\psi_m(x)\}$. Следовательно, свойство $\rho_{p.i}(x) = 0$ типично в $U \cap L$. Но тогда свойство $\rho_p(x) \equiv \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant l} \rho_{p.i}(x) = 0$ также типично в $U \cap L$, а значит, и на всем множестве L. Наконец, отсюда вытекает, что $\rho(x) \equiv \sup \rho_x(x) = 0$ на массивном подмножестве в L. Но $\rho(x) = 0$ означает, что все отталкивающие циклы функции f_x содержатся в замыкании орбиты $\{\psi_m(x)\}$, т. е. $F(f_x) \subset \overline{\{\psi_m(x)\}}$.

Для доказательства обратного включения рассмотрим функцию $r_p(x)$ — расстояние от точки $\psi_0(x)$ до ближайшей отталкивающей точки функции f_x порядка p. Функция $r_p(x)$ полунепрерывна сверху (так как отталкивающие циклы не исчезают) и, следовательно, функция $r(x) = \inf r_p(x)$ полунепрерывна сверху. Отсюда вытекает, что $r(x)$ обращается в нуль на множестве типа G_δ. С другой стороны, это свойство выполняется на плотном подмножестве (в L) тех значений параметра, для которых орбита $\{\psi_m(x)\}$ поглощается отталкивающим циклом.

Пример 1. $f_w(z) = z^2 + w$ $(w \in \boldsymbol{C})$. Это семейство при вещественных значениях параметра w (и вещественной переменной z) интенсивно изучалось в последнее время. Характер бифуркаций в комп-

лексной ситуации описан в работах [11, 12]. Мы ограничимся одним метрическим свойством.

Предложение 4.2. *Для типичного иррегулярного значения параметра $w \in K$ лебегова мера множества Жюлиа $F(f_w)$ равна 0.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}_\infty(w) = \{z \mid f_w^m z \to \infty\}$ область притяжения ∞ функции f_w, $\Gamma_m(w) = \{z \,\|\, f_w^m z \,| \leqslant 2\}$. Легко показать, что при $w \in K$ $\boldsymbol{C} \setminus \mathcal{D}_\infty(w) = \bigcap\limits_m \Gamma_m(w)$. Рассмотрим функцию $\rho_m(w) = \lambda(\Gamma_m(w))$, где λ — лебегова мера. Так как ρ_m непрерывна, то функция $\lambda(\boldsymbol{C} \setminus \mathcal{D}_\infty(w)) = \inf \rho_m(w)$ полунепрерывна сверху и, следовательно, обращается в нуль на множестве типа G_δ. С другой стороны, если орбита критической точки 0 поглощается отталкивающим циклом, то $\lambda(\boldsymbol{C} \setminus \mathcal{D}_\infty(w)) = 0$ [13]. Следовательно, свойство $\lambda(\boldsymbol{C} \setminus \mathcal{D}_\infty(w)) = 0$ типично. Тем более типично свойство $\lambda(F(f_w)) = 0$.

Пример 2. $f_\lambda(z) = \lambda z + z^2 + \ldots$ $(|\lambda| = 1)$. Это классический пример, рассмотренный Зигелем. По теореме Зигеля для почти всех значений λ на единичной окружности S^1 функция f_λ аналитически приводится к повороту.

Предложение 4.3. *Для типичного (в топологическом смысле) значения $\lambda \in S^1$ функция f_λ не приводится к повороту.*

Доказательство. Рассмотрим снова функцию $\rho_{(\lambda)}$ — расстояние от точки $z = 0$ до ближайшей отталкивающей периодической точки функции f_λ. Так же, как и ранее, убедимся в том, что функция $\rho(\lambda)$ полунепрерывна сверху и, следовательно, $\rho(\lambda)$ на множестве типа G_δ. Но обращение $\rho(\lambda)$ в нуль эквивалентно неприводимости к повороту функции f_λ. Остается заметить, что множество нулей функции $\rho(\lambda)$ плотно на единичной окружности, так как содержит все корни из 1.

Пример 3. $f_w(z) = 1 + wz^{-2}$ $(w \in \boldsymbol{C} \setminus 0)$. Функция f_w имеет две критические точки: 0 и ∞, причем $0 \mapsto \infty \mapsto 1$. Поверхность Z состоит из двух плоскостей с проколами: $Z_1 = \{(w, 0) \mid w \in \boldsymbol{C} \setminus 0\}$, $Z_2 = \{(w, \infty) \mid w \in \boldsymbol{C} \setminus 0\}$, причем точка $(w, 0)$ регулярна, когда точка (w, ∞) регулярна. Следовательно, множество $L \subset Z$ иррегулярных точек естественно отождествляется с множеством $K \subset \boldsymbol{C} \setminus 0$ неустойчивых значений параметра w. Множество K непусто. Например, при $w = 4/27$ функция f_w обладает устранимой кратной неподвижной точкой $z = 2/3$ и, следовательно, $4/27 \in K$. Таким образом, K совершенное нигде не плотное множество.

Предложение 4.4. *Для типичного иррегулярного значения параметра $w \in K$ множество Жюлиа функции $f_w(z) = 1 + wz^{-2}$ совпадает со всей сферой. При этом орбиты критических точек 0, ∞ плотны на сфере.*

Доказательство. Рассмотрим множество $S \subset K$ тех значений параметра, при которых орбита $\{f_w^m 1\}$ поглощается отталкивающим циклом. Это счетное, плотное в K множество, для которого по следствию 1.2 $F(f_w) = \boldsymbol{P}^1$. С другой стороны, покажем, что

условие $F(f_w) = \boldsymbol{P}^1$ выделяет в K подмножество типа G_δ. Действительно, пусть $\{a_i\}$ — счетное плотное подмножество сферы, $\rho_{m,i}(w)$ — расстояние от a_i до ближайшей отталкивающей периодической точки периода m. Так как $\rho_{m,i}$ полунепрерывна сверху, то функция $\rho_i = \inf\limits_{1 \leq m < \infty} \rho_{m,i}$ полунепрерывна сверху и, следовательно, ρ_i обращается в нуль на множестве типа G_δ. Но тогда множество общих нулей функций ρ_i также является множеством типа G_δ. Но свойство $\rho_i(w) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots)$ эквивалентно тому, что $F(f_w) = \boldsymbol{P}^1$.

Наконец, по теореме 4.1 орбита $\{f_w^m 1\}$ плотна в множестве $F(f_w)$ для типичного значения параметра w. Что и требовалось.

Ранее известные примеры функций со свойством $F(f) = \boldsymbol{P}^1$ были основаны на поглощении орбит критических точек отталкивающими циклами [5, 14]. Недавно автору стало известно, что Эрман построил континуум попарно топологически несопряженных рациональных функций, обладающих свойством $F(f) = \boldsymbol{P}^1$. Покажем, что в нашем семействе $1 + wz^{-2}$ присутствует такой континуум.

Рассмотрим значение $w_0 = 4/27$ параметра, при котором функция $f_{w_0} \equiv f_0$ имеет кратную неподвижную точку $z_0 = 2/3$. Легко найти две точки $a < 0 < b$, такие что $f_0[0, b] = [-\infty, 0]$, $f_0[a, 0] = [-\infty, b]$. При этом $|f_0(x)| \geqslant \lambda > 1$ при $x \in [a, 0] \cup [0, b]$. Рассмотрим инвариантное множество $\Lambda = \{x \mid f^m x \in [a, b]\ (m = 0, 1, \ldots)\}$. Каждой точке $x \in \Lambda$ можно сопоставить последовательность $hx = (\varepsilon_0, \varepsilon_1 \ldots)$ из нулей и единиц следующим образом: $\varepsilon_m = 0$, если $f^m x \in [a, 0]$ и $\varepsilon_m = 1$, если $f^m x \in [0, b]$. Это соответствие установит топологическое сопряжение между $f|\Lambda$ и сдвигом σ на односторонней топологической марковской цепи $\sum_A^+$ с матрицей переходов $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Инвариантное множество Λ будет отталкивающим, так как $|f'(x)| \geqslant \lambda > 1$ на Λ. Тогда по предложению 4.1 мы можем найти значение параметра w, такое что орбита $\{f_w^{m+N}\}_{m=0}^\infty$ будет копировать орбиту $\{f_0^m x\}_{m=0}^\infty$ любой точки $x \in \Lambda$, которая в свою очередь копирует орбиту $\{\sigma^m(hx)\}_{m=0}^\infty$ точки $hx \in \sum_A^+$. При этом точка $f_w^N 1$ будет лежать в некотором отталкивающем множестве Λ_w функции f_w. По предложению 1.1 $F(f_w) = \boldsymbol{P}^1$. Итак, мы имеем.

Предложение 4.5. *Для любой точки $y \in \sum_A^+$ найдется такое значение параметра w и такое N, что орбита $\{f_w^{m+N} 1\}_{m=0}^\infty$ функции $f_w = 1 + wz^{-2}$ копирует орбиту $\{\sigma^m y\}_{m=0}^\infty$, а множество Жюлиа $F(f_w)$ совпадает со всей сферой.*

Это дает континуальный запас функций, попарно топологически несопряженных и обладающих свойством $F(f_w) = \boldsymbol{P}^1$. Действительно, если функции f_{w_1} и f_{w_2} топологически сопряжены, то асимптотическое распределение орбит $\{f_w^m 1\}$ должно быть одинаковым. Рассмотрим на $\sum_A^+$ марковскую меру μ_p с матрицей перехо-

дов $\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $(0 \leqslant p \leqslant 1/2)$. Динамические системы (σ, μ_p) попарно неизоморфны, так как у них разные энтропии. Пусть x_p — типичная точка для системы (σ, μ_p) $\left(\text{т. е. } \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \varphi(\sigma^k x_p) \to \int \varphi d\mu_p \text{ для}\right.$ любой непрерывной функции φ на $\sum_A^+$. Мы знаем, что существует рациональная функция $f_{w_p} = 1 + w_p z^{-2}$, у которой $F(f_{w_p}) = \boldsymbol{P}^1$, а орбита $\{f_{w_p}^{m+N_p} 1\}_{m=0}^{\infty}$ копирует орбиту $\{\sigma^m x_p\}_{m=0}^{\infty}$. Функции f_{w_p} попарно топологически не сопряжены.

Список литературы: 1. *Fatcu P.* Sur les equations fonctionelles.— Bull. Soc. Math. France, 1920, **48**, p. 208—314. 2. *Левин Г. М.* О нерегулярных значениях параметра семейства полиномиальных отображений.— Усп. мат. наук, 1981, **36**, № 6, с. 219—220. 3. *Mañe R., Sad P., Sullivan D.* On the dynamics of rational maps.— Preprint, IHES, 1982—36 с. 4. *Любич М. Ю.* Некоторые типичные свойства динамики рациональных функций.— Усп. мат. наук 1983, **38**, № 5. 5. *Монтель П.* Нормальные семейства аналитических функций.— М.; Л.: НКТП СССР, 1936.—213 с. 6. *Lyubič M.* Entropy properties of rational endomorphisms of Riemann sphere.— Dyn. Syst. and Erg. Fh., 1982, **2**, № 7. *Sullivan D.* Iteration des fonctions analytiques complexes.— C. R. Acad, Sci., 1982, **294**, № 9, p. 301—304. 8. *Ганнинг Р., Росси Х.* Аналитические функции многих комплексных переменных.— М.: Мир, 1969.— 395 с. 9. *Kobayashi S.* Hyperbolic manifolols and holomorphic maps.— Pure and Appl. Math., Dekker, New York, 1970.—153 с. 10. *Каток А. Б.* Локальные свойства гиперболических множеств.— В кн.: Нитецки. Введение в дифференциальную динамику, М.: Мир, 1975.— 302 с. 11. *Левин Г. М.* О последовательности бифуркаций однопараметрического семейства отображений.— Усп. мат. наук, 1981, **37**, № 3, с. 189—190. 12. *Douady A., Hubbard H.* Iteration des polynomes quadratiques complexes.— C. R. Acad. Sci., 1982, **294**, № 3, p. 123—126. 13. *Любич М. Ю.* О типичном поведении траекторий рационального отображения сферы.— Докл. АН СССР, 1983, № 268, с. 58—70. 14. *Guckenheimer I.* Endomorphisms of the Riemann sphere.— Proc. Symp. Pure Math., 1970, **14**, „Global Analysis", p. 95—124.

Поступила в редколлегию 14.12.82.

УДК 517.982

С. Я. НОВИКОВ, Е. М. СЕМЕНОВ, Е. В. ТОКАРЕВ

О СТРУКТУРЕ ПОДПРОСТРАНСТВ ПРОСТРАНСТВ $\Lambda_p(\mu)$

Настоящая работа посвящена расширенному изложению результатов, анонсированных в статье [1]. Изложение ведется для более общего случая пространств $\Lambda_p(\varphi, \mu)$ измеримых функций на пространстве (T, Σ, μ) с положительной вероятностной мерой.

1. Предварительные сведения. Пусть (T, Σ, μ) — измеримое пространство с неотрицательной вероятностной мерой (т. е. $\mu(T) = 1$); $S \equiv S(T, \Sigma, \mu)$ — K-пространство (= условно полная вектор-

ная решетка) всех (эквивалентных классов) μ-измеримых функций $x(t)$ $(t\in T)$.

Для $x(t)\in S$ положим: $n_x(\tau)=\mu\{t: x(t)>\tau\}$; $x^*(s)=\inf\{\tau: n_{|x|}(\tau)<s\}$; $s\in[0, 1]$.

Пространство Лоренца $\Lambda_p(\varphi, \mu)$ $(1\leqslant p<\infty)$ — это банахово пространство измеримых функций, являющееся фундаментом в $S(T, \Sigma, \mu)$ и состоящее из тех $x(t)\in S$, для которых конечна норма

$$\|x\|_{\Lambda_p(\varphi,\mu)}=\left[\int_0^1 [x^*(s)]^p\, d\varphi(s)\right]^{1/p},$$

где $\varphi(s)$ — вогнутая на $[0, 1]$ неубывающая функция, непрерывная в начале координат, такая, что $\varphi(0)=0$; $\varphi(1)=1$.

Частным случаем пространств $\Lambda_p(\varphi, \mu)$ являются известные пространства Лебега — Рисса $L_p(\mu)$ (при $\varphi(s)\equiv s$), а также обычные пространства Лоренца $\Lambda(\varphi)$ и $\Lambda_p(\varphi)$ (в случае, когда (T, Σ, μ) — это отрезок $[0, 1]$ с мерой Лебега $\operatorname{mes} e$).

Для подмножества $K\subset\Lambda_p(\varphi, \mu)$ положим

$$\eta_{\Lambda_p(\varphi,\mu)}(K)=\lim_{\tau\to 0+}\ \sup_{x\in K\setminus\{0\}}\ \sup_{e\in\Sigma;\, \mu e=\tau}\frac{\|x(t)\chi_e(t)\|}{\|x\|},$$

где $\chi_e(t)$ — индикаторная функция множества $e\in\sum$.

Выделим следующие классы подпространств $\Lambda_p(\varphi, \mu)$.

Класс $K[\Lambda_p(\varphi, \mu)]\equiv K[\Lambda_p]$ состоит из тех подпространств B пространства $\Lambda_p(\varphi, \mu)$, для которых $\eta_{\Lambda_p(\varphi,\mu)}(B)<1$.

Класс $K_0[\Lambda\ ]\subset K[\Lambda_p]$ выделяется условием: $B\in K_0[\Lambda_p]\leftrightarrow\eta_{\Lambda_p(\varphi,\mu)}(B)=0$. Класс $\mathscr{D}[\Lambda_p]$ является дополнением класса $K[\Lambda_p]$ в классе $P[\Lambda_p]$ всех подпространств $\Lambda_p(\varphi, \mu)$.

Приведем известные факты о строении введенных классов. Эти результаты получены независимо в [2—4].

⟨1⟩ Всякое подпространство B из класса $K[\Lambda_p]$ рефлексивно; если $B\in K[\Lambda_p]$, то на B эквивалентны нормы $\|\cdot\|_{\Lambda_p(\varphi,\mu)}$ и $\|\cdot\|_{L_1}(\mu)$, а также сходимости по норме и по мере.

⟨2⟩ Всякое подпространство B из класса $\mathscr{D}[\Lambda_p]$ бесконечномерно; если $B\in\mathscr{D}[\Lambda_p]$, то для всякого $\varepsilon>0$ B содержит подпространство B_1, $(1+\varepsilon)$ — изоморфное l_p, дополняемое в Λ_p, причем стандартный базис B_1 эквивалентен дизъюнктной системе функций.

Напомним также, что при $p>1$ всякое пространство $\Lambda_p(\varphi, \mu)$ является рефлексивным, а $\Lambda_1(\varphi, \mu)\equiv\Lambda(\varphi, \mu)$ слабо секвенциально полно, так что всякое пространство $\Lambda_p(\varphi, \mu)$ обладает абсолютно непрерывной нормой, т. е. для любого $x\in\Lambda_p$, $\|x\chi_e\|_{\Lambda_p}\to 0$ при $\mu e\to 0$.

Для всякого $\Lambda_p(\varphi, \mu)$ справедливы непрерывные вложения: $L_p(\mu)\supseteq\Lambda_p(\varphi, \mu)$, т. е. для всех $x\in L_p(\mu)$, $\|x\|_{L_p(\mu)}\leqslant\|x\|_{\Lambda_p(\varphi,\mu)}$.

Пространство $\Lambda_p(\varphi, \mu)$ назовем бинарным, если $K[\Lambda_p] = K_0[\Lambda_p]$. Очевидно, в бинарных пространствах характеристика $\eta_{\Lambda_p}(B)$ на подпространствах $B \in P[\Lambda_p]$ принимает два значения: 0 или 1.

2. Бинарные пространства $L_p(\mu)$. Для упрощения обозначим $\|\cdot\|_{L_p(\mu)}$ через $\|\cdot\|_p$, а $\eta_{L_p(\mu)}(B)$ через $\eta_p(B)$.

Теорема 1. *Всякое пространство $L_p(\mu)$ при $1 \leqslant p < 2$ является бинарным.*

Доказательство. Согласно определению бинарности $L_p(\mu)$ и определению классов $K[L_p]$ и $K_0[L_p]$ требуется доказать, что из условий $B \in K[L_p]$ и $\eta_p(B) = \alpha < 1$ вытекает $\alpha = 0$.

Предположим противное. Пусть $B \in K[L_p]$ и $\eta_p(B) = \alpha \neq 0$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, что $\alpha + \varepsilon < 1$. В силу определения $\eta_p(B)$ найдется такая последовательность множеств $e_n \subset T$; $e_n \in \sum$ и такая последовательность элементов (x_n) из B, что

$$\sup_{t \in T \setminus e_n} |x_n(t)| \leqslant \inf_{t \in e_n} |x_n(t)|, \tag{1}$$

$$\alpha - \varepsilon \leqslant \|x_n \chi_{e_n}\|_p \leqslant \alpha; \quad \|x_n\|_p = 1, \tag{2}$$

$$\sum \mu e_n < \infty, \tag{3}$$

причем $(x_n \chi_{e_n}) / \|x_n \chi_{e_n}\|_p (1 + \varepsilon)$ эквивалентна стандартному базису пространства l_p.

В силу абсолютной непрерывности нормы в пространстве $L_p(\mu)$ и свойств перестановок функций (см. [4, с. 81]), для любого n найдется множество $f_n \subset T$; $f_n \in \sum$ такое, что

$$\sup_{t \in T \setminus f_n} |x_n(t)| \leqslant \inf_{t \in f_n} |x_n(t)|, \tag{4}$$

$$\|x_n \chi_{f_n}\|_p = \alpha + \varepsilon. \tag{5}$$

Если бы $\inf \mu f_n = 0$, то $\eta_p(B) \geqslant \alpha + \varepsilon$, что противоречит предположению, поэтому $\theta = \theta(\varepsilon) = \inf\limits_n \mu f_n > 0$. Сравнивая (1), (2) и (4), (5), видим, что $e_n \subset f_n$. Каждую функцию $x_n(t)$ можно представить в виде $x_n(t) = x_n(t)\chi_{e_n}(t) + x_n(t)\chi_{f_n \setminus e_n}(t) + x_n(t)\chi_{T \setminus f_n}(t) = u_n(t) + v_n(t) + w_n(t)$.

Построенные функции обладают следующими свойствами: А) для любых n_0 и $(\beta_n)_1^{n_0}$

$$(1 - \varepsilon)(\alpha - \varepsilon)\left(\sum_1^{n_0} |\beta_n|^p\right)^{1/p} \leqslant \left\|\sum_1^{n_0} \beta_n u_n\right\| \leqslant (1 + \varepsilon)\alpha\left(\sum_1^{n_0} |\beta_n|^p\right)^{1/p}; \tag{7}$$

Б) так как носители функций $v_n(t)$ и $u_n(t)$ дизъюнктны и выполнено (2), (5), то

$$\|v_n\|_p \leqslant [(\alpha + \varepsilon)^p - (\alpha - \varepsilon)^p]^{1/p} \leqslant 2\sqrt{\varepsilon}; \tag{8}$$

В) в силу (6) $|w_n(t)| \leqslant \theta^{-1/p}$. Тем более,

$$\|w_n\|_p \leqslant \theta^{-1/p}. \tag{9}$$

Рассмотрим функции

$$X_{n,s}(t) = n^{-1/p}\sum_{n+1}^{2n} r_n(s)\,x_n(t) = n^{-1/p}\sum_{n+1}^{2n} r_n(s)\,u_n(t) + \\ + n^{-1/p}\sum_{n+1}^{2n} r_n(s)\,v_n(t) + n^{-1/p}\sum_{n+1}^{2n} r_n(s)\,w_n(t) = \\ = U_{n,s}(t) + V_{n,s}(t) + W_{n,s}(t),$$

где $r_n(t) = \operatorname{sign}\sin 2^n\pi s$ — функции Радемахера. В силу (2) и (7)

$$(1-\varepsilon)(\alpha-\varepsilon) \leqslant \| U_{n,s}\|_p \leqslant \alpha + \varepsilon. \tag{10}$$

Докажем теперь, что для некоторых n, s нормы функций $V_{n,s}$ и $W_{n,s}$ достаточно малы.

Функции Радемахера, как известно, ортогональны на $[01]$. Учитывая это и (8), имеем:

$$\int_0^1 \| V_{n,s}\|_p^p ds = \int_0^1 \left[\frac{1}{n}\int_T \left|\sum_{n+1}^{2n} r_n(s)\,v_n(t)\right|^p d\mu\right] ds =$$

$$= \frac{1}{n}\int_T\int_0^1 \left|\sum_{n+1}^{2n} r_n(s)\,v_n(t)\right|^p ds\,d\mu \leqslant \frac{1}{n}\int_T \left(\int_0^1 \left|\sum_{n+1}^{2n} r_n(s)\,v_n(t)\right|^2 ds\right)^{p/2} d\mu =$$

$$= \frac{1}{n}\int_T \left(\sum_{n+1}^{2n} v_n^2(t)\right)^{p/2} d\mu \leqslant \frac{1}{n}\int_T \sum_{n+1}^{2n} |v_n(t)|^p\, d\mu \leqslant 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Отсюда $\mu\{s : \| V_{n,s}\|_p^p \geqslant 3(2\sqrt{\varepsilon})^p\} \leqslant 1/3$, тем более

$$\mu\{s : \|V_{n,s}\|_p \leqslant 6\sqrt{\varepsilon}\} \geqslant 2/3. \tag{11}$$

Аналогичным образом

$$\int_0^1 \| W_{n,s}\|_p^p\, ds \leqslant \frac{1}{n}\int_T \left(\sum w_n^2(t)\right)^{p/2} d\mu. \tag{12}$$

Из (9) следует, что $\int_T \left(\frac{1}{n}\sum w_n^2(t)\right) d\mu \leqslant \theta^{-2/p}$. Следовательно, $\int_T \left(\frac{1}{n}\sum w_n^2(t)\right)^{p/2} d\mu\, \theta^{-1}$. Используя полученное неравенство, продолжим (12): $\int_0^1 \| W_{n,s}\|_p^p\, ds \leqslant \theta^{-1} n^{p/2-1}$, отсюда

$$\mu\{s : \| W_{n,s}\|_p \leqslant 3\theta^{-1/p} n^{1/2-1/p}\} \geqslant 2/3. \tag{13}$$

По заданному ε найдем n такое, что $3\theta^{-1/p} n^{1/2-1/p} < \sqrt{\varepsilon}$. Неравенства (11), (13) показывают, что для некоторого $s_0 \in [0, 1]$

$$\| W_{n,s_0}\|_p + \| V_{n,s_0}\|_p < 7\sqrt{\varepsilon}. \tag{14}$$

Из оценок (10), (14) следует, что $\|X_{n,s_0}\|_p \leqslant \alpha + \varepsilon + 7\sqrt{\varepsilon}$; $\|X_{n,s_0}\chi_{U^{2n}_{m=n+1}e_m}\|_p \geqslant \|U_{n,s_0}\|_p - \|V_{n,s_0} + W_{n,s_0}\|_p \geqslant (\alpha - \varepsilon)\ (1 - \varepsilon) - 7\sqrt{\varepsilon}$. Согласно предположению (1) $\mu\,(U^{2n}_{m=n+1}e_m) \leqslant \sum^{2n}_{n+1}\mu e_m \leqslant \leqslant \sum^{\infty}_{n+1}\mu e_{m\,n\to\infty} \to 0$, поэтому $\eta_p(B) \geqslant \frac{(1+\varepsilon)(\alpha-\varepsilon) - 7\sqrt{\varepsilon}}{\alpha + \varepsilon + 7\sqrt{\varepsilon}}$, что при достаточно малых ε противоречит предположению $\eta_p(B) = \alpha < 1$. Таким образом, если $\eta_p(B) \neq 0$, то $\eta_p(B) = 1$. Теорема доказана.

3. **Свойство p-Мазура.** Пусть $p \in [1, 2)$. Скажем, что банахово пространство X обладает свойством p-Мазура, если для всякой слабо сходящейся к нулю последовательности элементов $(x_n) \subset X$ найдется двойная последовательность положительных чисел $\{1\alpha^n_j\}^{m(n)}_{j=1}\}^{\infty}_{n=1}$ такая, что

$$\sum^{m(n)}_{j=1}[\alpha^n_j]^p = 1 \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{15}$$

и последовательность $z_n = \sum^{m(n)}_{j=1}\alpha^n_j x_j$ сильно сходится к нулю (кратко: $X \in \mathrm{Maz}\,(p)$).

Согласно известной теореме Мазура [9], всякое банахово пространство X обладает свойством 1-Мазура, т. е. $X \in \mathrm{Maz}\,(1)$.

Теорема 2. *Пусть $p \in [1, 2)$. Если B — подпространство $L_p(\mu)$ такое, что $\eta_p(B) = 0$, то $B \in \mathrm{Maz}\,(p)$.*

Доказательство. Рассмотрим пространство $L_p(\lambda)$, состоящее из функций, суммируемых с p-й степенью на пространстве $(\Omega,\ A,\ \lambda)$, где Ω — прямое произведение пространств $T \otimes]0,\ 2]$, а $\lambda = \mu \otimes \mathrm{mes}$ — прямое произведение меры μ на меру Лебега.

Пространство $L_p(\mu)$ изометрически вкладывается в пространство $L_p(\lambda)$, так как всякой функции $x \in L_p(\mu)$ можно поставить в соответствие функцию $x \otimes \chi_{[0,\,1]}(t,\ s) \equiv x\,(t)\,\chi_{[0,\,1]}(s) \in L_p(\lambda)$ и это соответствие является изометрическим изоморфизмом. Ниже пространство $L_p(\mu)$ отождествляется с указанным подпространством $L_p(\lambda)$.

Пусть B — подпространство $L_p(\mu)$; $\eta_p(B) = 0$; (x_n) — слабо сходящаяся к нулю последовательность из нормированных элементов B. Можно считать, что (x_n) — базисная последовательность.

Рассмотрим в $L_p(\lambda)$ множество векторов $Z = \{z_j\}$; $z_n = x_n \otimes \otimes \chi_{[0,\,1]}(t,\ s)\,\gamma + k_n\,\chi_{e_n}(t,\ s)$, где $0 < \gamma < 1$; $e_n \subset T \otimes [1,\ 2]$ — попарно непересекающиеся множества; $k_n = (1-\gamma)/(\lambda e_n)^{1/p}$.

Множество Z ограничено в рефлексивном пространстве $L_p(\lambda)$ и, значит, слабо компактно. Поэтому существует подпоследовательность (z_{n_j}), слабо сходящаяся к некоторому $g \in L_p(\lambda)$. Это означает, что последовательность $\{z_{n_{2j}} - z_{n_{2j-1}}\}^{\infty}_{j=1}$ слабо сходится к нулю, так что из нее можно выделить базисную подпоследовательность $F = \{f_j\}$. Очевидно, $\eta_{L_p(\lambda)}(F) \neq 0$. Замыкание линейной оболочки системы F в пространстве $L_p(\lambda)$ является в $L_p(\lambda)$ подпространством, для которого $\eta_{L_p(\lambda)}(H) \neq 0$. Согласно теореме 1,

$\eta_{L_p}(H)=1$. По ⟨2⟩ $H=[F]_{L_p}$ содержит почти дизъюнктную систему функций, эквивалентную стандартному базису пространства l_p. Ввиду воспроизводимости $\mathrm{Bas}\, l_p$ (см. [5]), существует блок-базис по F, представляющий собой почти дизъюнктную систему функций. Коэффициенты этого блок-базиса должны удовлетворять условию (15), так как в противном случае окажется, что подпространство B содержит почти дизъюнктную систему функций, а это противоречит условию $\eta_p(B)=0$.

Это означает, что найдется такая последовательность чисел $\{\{\alpha_j^n\}_{j=1}^{m(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющая (15), что $\|\sum \alpha_j^n x_j\|_p \to 0$. Тем самым, B обладает свойством p-Мазура. Теорема доказана.

4. Бинарность пространств $\Lambda_p(\varphi, \mu)$.

Теорема 3. *Если $p\in[1, 2)$, то всякое пространство $\Lambda_p(\varphi, \mu)$ является бинарным.*

Доказательство. Как отмечалось ранее, $\Lambda_p(\varphi, \mu) \subseteq L_p(\mu)$, т. е. $\|x\|_{L_p(\mu)} \leqslant \|x\|_{\Lambda_p(\varphi,\mu)}$ для всех $x\in\Lambda_p(\varphi, \mu)$. Пусть B — подпространство $\Lambda_p(\varphi, \mu)$ из класса $K[\Lambda_p]$. Тогда на B эквивалентны нормы $\|\cdot\|_{L_1(\mu)}$ и $\|\cdot\|_{\Lambda_p(\varphi,\mu)}$, а это значит, что $B\in K[L_p]$. Из теоремы 2 вытекает, что $B\in \mathrm{Maz}(p)$. Предположим, $\eta_{\Lambda_p(\varphi,\mu)}(B)\neq 0$. Поскольку $B\in K[\Lambda_p]$, $\eta_{\Lambda_p(\varphi,\mu)}(B)=\alpha<1$.

Аналогично доказательству теоремы 1 выберем $x_n\in B$ и $e_n\subset T$; $e_n\in\Sigma$ так, что $\mu e_n\to 0$, а $\{x_n\chi_{e_n}\}$ эквивалентна $\mathrm{Bas}\, l_p$, причем $\|x_n\chi_{e_n}\|\geqslant \alpha-\varepsilon>0$. Обозначим $\hat{x}_n(t)=x_n\chi_{e_n}$; $\bar{x}_n=x_n-\hat{x}_n$. Поскольку множество $\overline{X}=\{\bar{x}_n\}$ слабо компактно, в $\overline{X}$ можно выбрать подпоследовательность (x_{n_j}) так, что $\bar{x}_{n_j}-x_{n_{j-1}})$ слабо сходится к нулю. Поскольку $B\in\mathrm{Maz}(p)$, существуют линейные комбинации $z_j=\Sigma_{k_j+1}^{k_j+1}\alpha_i^j(x_{n_{2i}}-x_{n_{2i-1}})$, $\alpha_i^j>0$; $\Sigma_{k_j+1}^{k_j+1}[\alpha_i^j]^p=1$; $k_1<$ $<k_2<\ldots$ такие, что $\lim\|z_j-\hat{z}_j\|=\lim\|\bar{z}_j\|=0$, где $\hat{z}_j=$ $=\Sigma_{k_j+1}^{k_j+1}\alpha_i^j(\hat{x}_{n_{2i}}-\hat{x}_{n_{2i-1}})$; $\bar{z}_j=z_j-\hat{z}_j$. Это означает, что $\eta_{\Lambda_p(\varphi,\mu)}(B)=$ $=1$, что противоречит условию $B\in K[\Lambda_p]$. Теорема доказана.

5. Структура подпространств пространств $L_p(\mu)$ и $\Lambda_p(\varphi, \mu)$. Следствием приведенных выше результатов является обобщение теорем Розенталя [7] и Энфло — Розенталя [8] на случай пространств $\Lambda_p(\varphi, \mu)$.

Отметим, эти результаты получены совершенно иным путем, чем в указанных работах, не использующим технику абсолютно суммирующих операторов, а результаты работ [7, 8], относящиеся к структуре подпространств пространств $L_p(\mu)$, являются частным случаем приводимой ниже теоремы.

Теорема 4. *Если B — подпространство $\Lambda_p(\varphi, \mu)$ $(1\leqslant p<2)$, то либо B содержит подпространство, изоморфное l_p (точнее $(1+\varepsilon)$ — изоморфное l_p), либо на B эквивалентны нормы $\|\cdot\|_{\Lambda p|(\varphi,\mu)}$ и $\|\cdot\|_{L_1(\mu)}$, причем последнее выполнено в том и толь-*

ко том случае, когда B не содержит подпространств, изоморфных l_p.

Доказательство. Если B содержит подпространство, изоморфное l_p, то $B \notin \mathrm{Maz}(p)$. Тем самым $B \notin K[\Lambda_p]$, т. е. $\eta_{\Lambda_{p(\varphi,\mu)}} \times \times (B) = 1$. Но тогда в B найдется почти дизъюнктная система, натягивающая подпространство $(1+\varepsilon)$-изометричное l_p и допускающее на себя проектор [3]. Если же B не содержит l_p, то $\eta_{\Lambda_{p(\varphi,\mu)}}(B) = 0$ и согласно [4] на B эквивалентны нормы $\|\cdot\|_{\Lambda_p}$ и $\|\cdot\|_{L_1}$.

Список литературы: 1. *Новиков С. Я., Семенов Е. М., Токарев Е. В.* Структура подпространств пространств Λ_p.— Докл. АН СССР, 1979, **243**, № 3, с. 252—254. 2. *Figiel T., Johnson W. B., Tzafriri L.* On Banach lottices and spaces having local unconditional structure with applications to Lorent z function spaces.— Journ. Approx. Theory, 1975, **13**, № 4, p. 395—412. 3. *Токарев Е. В.* О подпространствах некоторых симметричных пространств.— Теория функций, функцион. анализ и их приложения, 1975, вып. 24, с. 156—161. 4. *Токарев Е. В.* О подпространствах симметричных пространств функций.— Функцион. анализ и его приложения, 1979, **13**, вып. 2, с. 93—94. 5. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов.— М.: Наука, 1979.— 400 с. 6. *Lindenstraus J., Pelczryn'ski A.* Contribution to the theory of the olassical Banach spaces.—Jsr. Journ. Math., 1972, **8**, № 8, p. 225—249. 7. *Rosenthal N. P.* On subspaces of L_p.— Ann. Math., **97**, № 2, pp. 344—373. 8. *Enflo P., Rosenthal H. P.* Some results concerning $L_p(\mu)$-spaces.— Journ. Funct. Anal., 1973, **14**, № 4, p. 325—348. 9. *Банах С.* Курс функціонального аналізу.— Київ, Наука, 1949. —198 с.

Поступила в редколлегию 13.11.82.

УДК 513.88

М. И. ОСТРОВСКИЙ

О СВОЙСТВАХ РАСТВОРА И СВЯЗАННЫХ С НИМ ХАРАКТЕРИСТИК БЛИЗОСТИ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

1. Пусть X и Y — замкнутые подпространства банахова пространства Z, $S(X)$ и $S(Y)$ — их единичные сферы. Раствором X и Y называется [6] величина

$$\theta(X, Y) = \max\{\sup_{x\in S(X)} \operatorname{dist}(x, Y), \sup_{y\in S(Y)} \operatorname{dist}(y, X)\}.$$

Это понятие имеет применения в теории операторов (см. [1, 5]). Раствор θ не является метрикой, так как не выполнено неравенство треугольника. В связи с этим в работах [2, 3] вводились следующие модификации раствора:

$$\tilde\theta(X, Y) = \max\{\sup_{x\in S(X)} \operatorname{dist}(x, S(Y)), \sup_{y\in S(Y)} \operatorname{dist}(y, S(X))\},$$

$$\hat\theta(X, Y) = \max\{\sup_{x\in S(X)} \operatorname{dist}(x, B(Y)), \sup_{y\in S(Y)} \operatorname{dist}(y, B(X))\},$$

где $B(X)$, $B(Y)$ — замкнутые единичные шары X и Y. Эти модификации уже являются метриками, и по ним множество всех подпространств данного пространства полно [2, 3]. Растворы θ, $\tilde{\theta}$, $\hat{\theta}$ изучались в [4], где с их помощью введен ряд величин, характеризующих близость банаховых пространств. Положим $d_i(X, Y) = \inf\limits_G \inf\limits_{U,V} \theta(UX, VY)$, $i = 0,1$, где при $i = 0$ (при $i = 1$) G пробегает класс всех банаховых пространств, содержащих подпространства, изометричные (изоморфные) X и Y, а U и V — множество всех изометричных (изоморфных) вложений X и Y в G. Аналогично по $\tilde{\theta}$ и $\hat{\theta}$ определяются $\tilde{d}_0$, $\tilde{d}_1$, $\hat{d}_0$, $\hat{d}_1$. Целью настоящей работы является изучение свойств приведенных выше характеристик близости банаховых пространств. Сформулируем основные результаты.

Теорема. 1. *Величина $\hat{d}_0$ обладает свойствами:* а) $\hat{d}_0(X, Y) \leqslant \leqslant \hat{d}_0(X, Z) + \hat{d}_0(Z, Y)$; б) $\hat{d}_0(X_n, X_m) \to 0$ $(n, m \to \infty) \Rightarrow \exists X$; $\hat{d}_0(X_n, X) \to 0$ $(n \to \infty)$; *в) существуют неизоморфные X и Y, для которых $\hat{d}_0(X, Y) = 0$. Иначе говоря, $\hat{d}_0$ — полная квазиметрика.*

Теорема 2. *Если X рефлексивно, а Y не рефлексивно, то $d_1(X, Y) \geqslant 1/2$.*

Напомним, что пространство называется суперрефлексивным, если оно изоморфно равномерно выпуклому (это одно из эквивалентных определений). Пространство называется B-выпуклым, если $\sup\limits_n \inf\{d(l_1^n, Y) : Y \subset X, \dim Y = n\} = \infty$, где d — дистанция Банаха—Мазура. Каждое суперрефлексивное пространство B-выпукло, обратное неверно.

Теорема 3. *Если X суперрефлексивно, а Y не суперрефлексивно, то $d_1(X, Y) = 1$.*

Теорема 4. *Если X является, а Y не является B-выпуклым, то $d_1(X, Y) = 1$.*

Замечание. Ясно, что $1 \geqslant d_0 \geqslant d_1$, $2 \geqslant \tilde{d}_0 \geqslant \tilde{d}_1$, $1 \geqslant \hat{d}_0 \geqslant \hat{d}_1$. В силу известных неравенств между растворами [2, 3] имеем $2d_i \geqslant \tilde{d}_i \geqslant d_i$, $2\hat{d}_i \geqslant \tilde{d}_i \geqslant \hat{d}_i$, $2d_i \geqslant \hat{d}_i \geqslant d_i$. Мы не будем формулировать следствия наших результатов, непосредственно получаемые с помощью этих неравенств. Отметим также, что теорему, аналогичную теореме 1, можно доказать и для $\tilde{d}_0$.

В работе будут получены также некоторые уточнения и дополнения известных результатов о растворах. В частности, будет дан отрицательный ответ на следующий вопрос М. Г. Крейна, М. А. Красносельского и Д. П. Мильмана (см. [6, с. 104]). Имеет ли место для бесконечномерных пространств X и Y следующая импликация: $(\theta(X, Y) < 1) \Rightarrow (\dim X = \dim Y)$? (Размерностью бесконечномерного пространства называется минимальная мощность всюду плотного множества).

2. Доказательство теоремы 1. а) Пусть $U_1 : X \to G_1$; $V_1 : Z \to G_1$; $U_2 : Z \to G_2$; $V_2 : Y \to G_2$ — такие изометричные вложения, что $\theta(U_1X, V_1Z) \leqslant \hat{d}_0(X, Z) + \varepsilon$, $\hat\theta(U_2Z, V_2Y) \leqslant \hat{d}_0(Z, Y) + \varepsilon$. Рассмотрим фактор-пространство $G = (G_1 \oplus G_2)_1/M$, где M — подпространство в $(V_1Z \oplus U_2Z)_1$, заданное так: $M = \{(a, b) : V_1^{-1}a = U_2^{-1}b\}$ (по поводу определения прямых сумм, используемых здесь и в дальнейшем, см., например, [8.1], с. xii). Фактор-отображение обозначим F. Заметим, что FU_1, FV_1, FV_2 — изометричные вложения соответственно X, Z и Y в G, при этом $\hat\theta(FU_1X, FV_1Z) = \hat\theta(U_1X, V_1Z)$, $\hat\theta(FV_1Z, FV_2Y) = \hat\theta(U_2Z, V_2Y)$. Воспользовавшись неравенством треугольника для $\hat\theta$, имеем $\hat\theta(FU_1X, FV_2Y) \leqslant \hat{d}_0(X, Z) + \hat{d}_0(Z, Y) + 2\varepsilon$. Устремляя ε к нулю, получим неравенство а).

б) Выберем в $\{X_n\}$ подпоследовательность такую, что $\hat{d}_0(X_{n_i}, X_{n_{i+1}}) \leqslant 1/2^i$, и обозначим ее снова $\{X_n\}$. Пусть $U_n : X_n \to G_n$, $V_n : X_{n+1} \to G_n$ — изометричные вложения такие, что $\hat\theta(U_nX_n, V_nX_{n+1}) \leqslant 1/2^{n-1}$. Рассмотрим факторпространство $G = (\sum \oplus G_i)_1/ /M$, где $M = [M_i]_{i=1}^{\infty}$ (квадратные скобки здесь и в дальнейшем означают замыкание линейной оболочки), а $M_i = \{(0, \ldots, 0, a, b, 0, \ldots)\}$, где $a \in V_iX_{i+1}$ стоит на i-м, $b \in U_{i+1}X_{i+1}$ на $(i+1)$-м месте и $U_{i+1}^{-1}b = V_i^{-1}a$. Обозначим через F соответствующее фактор-отображение. Тогда FU_j — изометричные вложения X_j в G, при этом $\hat\theta(FU_jX_j, FU_{j+1}X_{j+1}) \leqslant 1/2^{j-1}$. Воспользовавшись полнотой по $\hat\theta$, получим существование $X \subset G$ такого, что $\hat\theta(FU_jX_j, X) \to \to 0$. При этом, очевидно, имеем $\hat{d}_0(X_j, X) \to 0$. Применив неравенство треугольника для тех X_k, которые не попали в подпоследовательность, получим б).

Нам понадобится следующее обобщение результата [4], получаемое близким методом.

Предложение 1. *Если $p > 1$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon, p) > 0$, что из $|r - p| < \delta(\varepsilon, p)$ следует $\tilde{d}_0(l_p, l_r) < \varepsilon$.*

Доказательство. Рассмотрим отображения $A : S(l_p) \to \to S(l_r)$; $B : S(l_q) \to S(l_s)$, $(1/p + 1/q = 1,\ 1/r + 1/s = 1)$, определенные равенствами: $A(\{x_i\}) = \{|x_i|^{p/r} \operatorname{sign} x_i\}$, $B(\{y_i\}) = \{|y_i|^{q/s} \times \times \operatorname{sign} y_i\}$. Введем в алгебраической сумме $l_p \oplus l_r$ следующую норму: $\|(x, y)\| = \sup\{|\langle x, z\rangle + \langle y, Bz\rangle|,\ z \in S(l_q)\}$. Ясно, что канонические образы l_p и l_r изометричны l_p и l_r соответственно. Оценим $\tilde{d}_0(l_p, l_r)$. Ясно, что $\tilde{d}_0(l_p, l_r) \leqslant \sup\{\|(x, -Ax)\| : x \in \in S(l_p)\} = \sup\{|\langle x, y\rangle - \langle Ax, By\rangle| : x \in S(l_p),\ y \in S(l_q)\}$. Оценим величину $|\langle x, y\rangle - \langle Ax, By\rangle| = |\sum_{i=1}^{\infty} x_iy_i - \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{p/r} |y_i|^{q/s} \operatorname{sign} x_i \times \times \operatorname{sign} y_i|$. Рассмотрим случай $p \geqslant 2$, $r \geqslant 2$. Имеем $|\langle x, y\rangle - \langle Ax, By\rangle| \leqslant$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} (|x_i|^{p/r} |y_i| \; \| x_i |^{1-p/r} - | y_i |^{q/s-1}|) = \sum_{i=1}^{\infty} | x_i |^{p/r} | y_i | \; \| x_i |^{(r-p)/r} -$$

$$- | y_i |^{(r-p)/((p-1)r)} | \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} | x_i |^{p/r} | y_i | \; |(r-p)/r| \max \{ | x_i |^{(r-p)/r-1};$$

$$| y_i |^{1/(p-1)((r-p)/r-1)} \} \; \| x_i | - |y_i|^{1/(p-1)}| \leqslant \frac{|r-p|}{r} \sum_{i=1}^{\infty} \max \{ |y_i|;\; |x_i|^{p/r} \times$$

$$\times | y_i |^{1-q/r} \} \; \| x_i | - | y_i |^{q/p} | \leqslant \frac{|r-p|}{r} \sum_{i=1}^{\infty} \| x_i | - | y_i |^{q/p} | \; (| x_i |^{p/q} + |y_i|) \leqslant$$

$\leqslant (|r-p|/r) \; \| \{ \| x_i | - | y_i |^{q/p} | \} \|_p \| \{ | x_i |^{p/q} + | y_i | \} \|_q \leqslant 4 | r-p |/r$ (так как $p \geqslant 2$, $r \geqslant 2$, то $1 - q/r \geqslant 0$, и поэтому $\max \{ | y_i |,$ $| x_i |^{p/r} | y_i |^{1-q/r} \} \leqslant | y_i | + | x_i |^{p/q}$). Таким образом, $\tilde{d}_0 (l_p, l_r) \leqslant 4 | r - p |/r$. В случае $p \leqslant 2$, $r \leqslant 2$ записываем $|\langle x, y \rangle - \langle Ax, By \rangle| \leqslant$ $\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} | x_i | | y_i |^{q/s} | |y_i|^{1-q/s} - | x_i |^{p/r-1}|$ и, проводя аналогичную выкладку, получаем $\tilde{d}_0 (l_p, l_r) \leqslant 4 | q - s |/s$. Так как при $p > 1$ близость r к p равносильна близости s к q, то предложение доказано.

Перейдем к построению пространств X и Y, существование которых утверждается в в). Пусть $\{p_n\}$, $\{r_n\}$ — счетные плотные подмножества отрезка $\{2 \leqslant a \leqslant 3\}$, причем $2 \in \{r_n\}$ и $2 \notin \{p_n\}$. Пусть $X = (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus l_{r_n})_3$ $Y = (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus l_{p_n})_3$ — прямые суммы по l_3. Сначала докажем $\tilde{d}_0 (X, Y) = 0$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и последовательность $h_j > 0$ такую, что $\Sigma h_j^3 < \varepsilon^3$. В силу предложения 1 последовательности $\{p_n\}$, $\{r_n\}$ можно перенумеровать так, что $\tilde{d}_0 (l_{p_j}, l_{r_j}) < h_j$. Пусть $\psi_j : l_{p_j} \to G_j$, $\varphi_j : l_{r_j} \to G_j$ — изометричные вложения такие, что $\hat{\theta} (\varphi_j (l_{r_j}), \psi_j (l_{p_j})) < h_j$. Рассмотрим прямую сумму $G = (\sum_{i=1}^{\infty} \oplus G_j)_3$ и естественные вложения $\varphi : X \to G$; $\psi : Y \to G$. Ясно, что $\theta (\varphi (X), \psi (Y)) < \varepsilon$ и, следовательно, $\tilde{d}_0 (X, Y) = 0$.

Перейдем к доказательству неизоморфности X и Y. Для этого покажем, что любой оператор из Y в l_2 компактен. Предположим противное. Тогда существует оператор $Q : Y \to l_2$ и слабо сходящаяся к нулю, а следовательно, и ограниченная, последовательность $\{x_n\} \subset Y$ такая, что $\| Qx_n \| > 2\varepsilon$. Каждый вектор из Y можно записать в виде бесконечной матрицы, i-й столбец которой дает координатную запись проекции вектора на l_{p_i}. Носителем вектора $x \in Y$ будем называть множество пар (l, j), для которых $(x)_{lj} \neq 0$, финитными — векторы с конечными носителями. Каждый вектор из последовательности $\{x_n\}$ можно считать финитным, а их носители непересекающимися. Запишем $x_n = (x_n)_{p_1} +$

$+\ldots+(x_n)_{p_{i(n)}}$, где через $(x_n)_{p_i}$ обозначена проекция x_n на l_{p_i}. Переходя при необходимости к подпоследовательности, можно считать, что последовательность норм $\|(x_n)_{p_1}\|$ сходится. Если эта последовательность сходится к нулю, то заменим последовательность $\{x_n\}$ другой, которую обозначим $\{x_n^1\}$ и для которой $(x_n^1)_{p_1}=0$. Для новой последовательности (после, возможно, отбрасывания конечного числа членов и перенумерации) будем иметь $\|Qx_n^1\|>3\varepsilon/2$. Таким образом, мы построили последовательность $\{x_n^1\}$ такую, что $\|(x_n^1)_{p_1}\|$ либо сходится к положительному числу, либо состоит из нулей, и при этом $\|Qx_n^1\|>3\varepsilon/2$. Рассуждая аналогично, можем по $\{x_n^1\}$ построить последовательность $\{x_n^2\}$, для которой $\|(x_n^2)_{p_2}\|$ либо сходится к положительному числу, либо состоит из нулей, и при этом $\|Qx_n^2\|>5\varepsilon/4$. Продолжая процесс построения последовательностей неограниченно, получим $\{x_n^3\}$, $\{x_n^4\}$, ... Рассмотрим последовательность $\{x_n^n\}$. Имеем $\|Qx_n^n\|>\varepsilon$, и при каждом $i=1, 2, \ldots$ существует $\lim\limits_{n\to\infty}\|(x_n^n)_{p_i}\|=\alpha_i$, причем $\alpha_i=0$ тогда и только тогда, когда последовательность $\{(x_n^n)_{p_i}\}$ финитна (по n). Так как последовательность $\{x_n^n\}$ ограничена, то имеем $\Sigma\alpha_i^3<\infty$. Разложим каждый вектор x_n^n в сумму $x_{n_1}+x_{n_2}$ так, чтобы носители x_{n_1} и x_{n_2} содержались в носителе x_n^n, а x_{n_1} являлось той «частью» x_n^n, для которой либо $\alpha_k/2\leqslant\|(x_{n_1})_{p_k}\|\leqslant 3\alpha_k/2$, либо $(x_{n_1})_{p_k}=0$. Тогда последовательности $(x_{n_2})_{p_k}$ финитны по n при всех $k=1, 2, \ldots$ и, при необходимости переходя к подпоследовательности, можем считать, что для любой числовой последовательности $\{s_n\}$ выполняется $\|\Sigma s_n x_{n_2}\|=(\Sigma|s_n|^3\|x_{n_2}\|^3)^{1/3}$.

Построим теперь последовательность $g_j>0$ так, чтобы ряд $\Sigma g_j x_j$ сходился, а ряд $\Sigma g_j Qx_j$ расходился. Заметим, что для расходимости $\Sigma g_j Qx_j$ достаточно, чтобы $\Sigma g_j^2=\infty$, так как последовательность $\{Qx_j\}$ можно считать эквивалентной ортонормированному базису l_2. Запишем $\Sigma g_j x_j=\Sigma g_j x_{j_1}+\Sigma g_j x_{j_2}$. Для сходимости второго ряда достаточно, чтобы $\Sigma g_j^3<\infty$. Для первого ряда имеем:

$$\|\sum_n^m g_j x_{j_1}\|\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\Big\{\Big(\sum_{j=n}^{n} g_j^{p_j}\Big)^{1/p_i}3\alpha_i/2\Big\}^3\Big)^{1/3}. \qquad (\divideontimes)$$

Ряд $\Sigma\alpha_i^3$ сходится, следовательно, можно найти $a_i\to\infty$ такие, что и ряд $\Sigma(\alpha_i a_i)^3$ сходится. Воспользуемся следующей леммой, доказательство которой опустим.

Лемма 1. *Пусть $C>p_i>2$ и $b_i\to\infty$, $b_i\geqslant s>0$. Тогда существует последовательность $g_j>0$ такая, что $\sum\limits_{j=1}^{\infty} g_j^{p_i}<b_i$, $i=1, 2, \ldots$, но $\Sigma g_j^2=\infty$.*

Применив лемму с $b_i = a_i^{p_i}$, построим последовательность $\{g_i\}$ такую, что $(\sum_i g_i^{p_i})^{1/p_i} \leqslant a_i$, но $\sum g_i^2 = \infty$. Для этой последовательности правая часть ($\divideontimes$) стремится к нулю при $m, n \to \infty$, так как выражение в фигурных скобках стремится к нулю при $m, n \to \infty$ и оценивается сверху величиной $3\alpha_i a_i/2$, $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i\alpha_i)^3 < \infty$. Поэтому ряд $\Sigma g_i x_{j_i}$, а следовательно, и $\Sigma g_i x_i$ сходится. Тем самым утверждение в) доказано.

3. Доказательство теоремы 2. Пусть $d_1(X, Y) < 1/2 - \delta$. Тогда существуют изоморфные вложения $U: X \to Z$, $V: Y \to Z$ такие, что $\theta(UX, VY) < 1/2 - \delta$. Согласно теореме 3 из [7] в нерефлексивном пространстве VY для произвольного $0 < \varepsilon < 1$ существует последовательность $\{y_i\}$, содержащаяся в единичном шаре $B(VY)$ такая, что для всех k выполняется $\operatorname{dist}(\operatorname{conv}\{y_1, \ldots, y_k\}, \operatorname{conv}\{y_{k+1}, \ldots\} \geqslant 1 - \varepsilon$. Пусть последовательность $\{x_i\} \subset UX$ такова, что $\| x_i - y_i \| \leqslant 1/2 - \delta$. Тогда $\operatorname{dist}(\operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_k\}, \operatorname{conv}\{x_{k+1}, \ldots\}) \geqslant \operatorname{dist}(\operatorname{conv}\{y_1, \ldots, y_k\}, \operatorname{conv}\{y_{k+1}, \ldots\}) - 1 + 2\delta \geqslant 2\delta - \varepsilon$. Выбрав ε так, чтобы $2\delta - \varepsilon > 0$, согласно другому утверждению теоремы 3 из [7] (примененному к последовательности $\{x_i/2\}$) получаем, что UX, а следовательно, и X нерефлексивны. Полученное противоречие доказывает теорему.

4. Доказательство теоремы 3. Пусть $d_1(X, Y) < 1 - \delta$. Тогда существуют изоморфные вложения $U: X \to Z$, $V: Y \to Z$ такие, что $\theta(UX, VY) < 1 - \delta$. Из известных результатов о суперрефлексивных пространствах (см. теорему 6 из [7]) следует, что в несуперрефлексивном пространстве VY для любого $0 < \varepsilon < 2$ и для любого положительного целого m существует множество $\{y_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k} : 1 \leqslant k \leqslant m;\ \varepsilon_k = 1, 2\}$, содержащееся в единичном шаре $B(VY)$ такое, что $y_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k} = (y_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k 1} + y_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k 2})/2$, $\| y_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k 1} - y_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k 2} \| \geqslant 2 - \varepsilon$. Выберем $x_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m} \in UX$, $\varepsilon_i = 1, 2$ так, чтобы $\| y_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m} - x_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m} \| < 1 - \delta$. Определим $x_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k}$, $k < m$ по индукции как $x_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k} = (x_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k 1} + x_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k 2})/2$. При этом $\| y_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k} - x_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k} \| < 1 - \delta$. Имеем: $\| x_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k 1} - x_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k 2} \| \geqslant \| y_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k 1} - y_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k 2} \| - 2(1 - \delta) \geqslant 2\delta - \varepsilon$. Выберем ε так, чтобы $2\delta - \varepsilon > 0$. Тогда согласно другой части теоремы 6 из работы [7] (примененной к системе $\{x_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k}/2\}$) получим, что UX не суперрефлексивно. Полученное противоречие доказывает теорему.

5. Доказательство теоремы 4. Пусть $d_1(X, Y) < 1 - \delta$. Тогда существуют изоморфные вложения $U: X \to Z$, $V: Y \to Z$ такие, что $\theta(UX, VY) < 1 - \delta$. В силу того, что Y не B-выпукло и результата [8.II.I.E.4] для любого n и любого $\varepsilon > 0$ найдутся $e_1, \ldots, e_n \in S(VY)$ такие, что для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ выполняется $\Sigma |\alpha_i| / (1 + \varepsilon) \leqslant \| \Sigma \alpha_i e_i \| \leqslant \Sigma |\alpha_i|$. Так как $\theta(UX, VY) < 1 - \delta$, то в UX можно найти $f_1, \ldots, f_n$ такие, что $\| f_i - e_i \| <$

$< 1-\delta$. Тогда $2\Sigma|\alpha_i| \geqslant \|\Sigma\alpha_i f_i\| \geqslant \|\Sigma\alpha_i e_i\| - \Sigma|\alpha_i|(1-\delta) \geqslant$ $\geqslant \Sigma|\alpha_i|(1/(1+\varepsilon)-(1-\delta))$. Выбрав ε так, чтобы $1/(1+\varepsilon)-$ $-(1-\delta)>0$, получим, что UX, а следовательно, и X не B-выпукло. Теорема доказана.

6. Дополнительные предложения о характеристиках близости.

Предложение 2. $\hat{d}_0(X, Y) \leqslant d(X, Y)-1$, *где d — дистанция Банаха—Мазура.*

Доказательство. Пусть $U: X \to Y$ — изоморфизм, $\|U\|=$ $=1$, $\|U^{-1}\| \leqslant d(X, Y)+\varepsilon$. Рассмотрим в алгебраической сумме $X \oplus Y$ полунорму $p((x, y)) = \sup\{|y^*(y)+U^*y^*(x)/\|U^*y^*\||: y^* \in$ $\in Y^*, \|y^*\|=1\}$.
Профакторизируем $X \oplus Y$ по нуль-пространству этой полунормы. Пространства X и Y изометрично вложены в полученное нормированное пространство и $\hat{\theta}(X, Y) \leqslant \sup\{p((x, -Ux)), x \in X, \|x\|=$ $=1\} \leqslant \sup\{|-y^*(Ux)+U^*y^*(x)/\|U^*y^*\||, \|x\|=1, \|y^*\|=1\}=$ $=\sup\{|y^*(Ux)||-1+1/\|U^*y^*\||, \|x\|=1, \|y^*\|=1\} \leqslant \|(U^*)^{-1}\|-$ $-1 \leqslant d(X, Y)-1+\varepsilon$. Устремляя ε к 0, получаем доказываемое предложение.

Пусть X, Y — подпространства банахова пространства Z. Нам понадобятся следующие результаты (см. [1, теоремы 1.1, 6.1, 6.2, 6.4]):

А) $(\min(\dim Y, \dim X) < \infty, \theta(X, Y) < 1) \Rightarrow (\dim X = \dim Y)$;
Б) $(\theta(X, Y) < 1/2) \Rightarrow (\dim X = \dim Y)$;
В) $\theta(X, Y) = \theta(X^\perp, Y^\perp)$;
Г) $\theta(X, Y) < 1/2 \Rightarrow \dim(Z/X) = \dim(Z/Y)$.

Выведем из этих результатов некоторые предложения о характеристиках близости.

Предложение 3. $(\min(\dim X, \dim Y) < \infty, d_1(X, Y) < 1) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\dim X = \dim Y)$.

Предложение 4. $\dim X \neq \dim Y \Rightarrow d_1(X, Y) \geqslant 1/2$. Эти предложения непосредственно следуют из А и Б соответственно.

Предложение 5. $\dim X^* \neq \dim Y^* \Rightarrow d_1(X, Y) \geqslant 1/2$.

Доказательство. Пусть $d_1(X, Y) < 1/2$; $U: X \to G$, $V: Y \to$ $\to G$ — изоморфные вложения такие, что $\theta(UX, VY) < 1/2$. Тогда в силу В) $\theta((UX)^\perp, (VY)^\perp) < 1/2$, и применение Г) дает $\dim$ $(G^*/(UX)^\perp) = \dim(G^*/(VY)^\perp)$.

7. Некоторые результаты о растворах. Построим пример, показывающий, что ответ на вопрос из [6], приведенный нами в п. 1, — отрицательный.

Предложение 6. *Существуют пространство Z и его подпространства X и Y, Y — сепарабельное, а X — нет, такие, что* $\hat{\theta}(X, Y) \leqslant 5/6$.

Доказательство. Рассмотрим алгебраическую сумму:

$$Z = c_0([0, 1]) \oplus \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \oplus C(0,1)\Big)_1 \oplus \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \oplus C(0,1)\Big)_1$$

(обозначения см. [8.1]). Введем в Z норму:

$$\|(h_0, (h_i)_{i=1}^{\infty}, (g_j)_{j=1}^{\infty}\| = \max\left(\sum_{i=0}^{\infty}\|h_i - \frac{1}{2}g_{i+1}\|, \ \sum_{j=1}^{\infty}\|g_j - \frac{1}{2}h_{j+1}\|\right),$$

где все нормы в правой части — супремумы модуля на $[0,1]$. Ясно, что пространство $X = \{(h_0, (h_i)_{i=1}^{\infty}, (0)_{j=1}^{\infty})\}$ изометрично $c_0([0,1]) \oplus_1 (\sum_{i=1}^{\infty} \oplus C(0,1))_1$, а пространство $Y = \{(0, (0)_{i=1}^{\infty}, (g_j)_{j=1}^{\infty})\}$ изометрично $(\sum_{j=1}^{\infty} \oplus C(0,1))_1$. Ясно также, что Y сепарабельно, а X — нет. Оценим $\hat{\theta}(X, Y)$. Для этого достаточно оценить $\operatorname{dist}(\tilde{h}_i, B(Y))$, $\operatorname{dist}(\tilde{g}_j, B(X))$ для векторов $\tilde{h}_i \in S(X)$, $\tilde{g}_j \in S(Y)$ вида $\tilde{h}_0 = (h_0, (0)_{i=1}^{\infty}, (0)_{j=1}^{\infty})$; $\tilde{h}_i = (0, (0, \ldots, 0, h_i, 0, \ldots), (0)_{j=1}^{\infty})$, где h_i стоит на i-м месте; $\tilde{g}_j = (0, (0)_{i=1}^{\infty}, (0, \ldots, 0, g_j, 0, \ldots))$, где g_j стоит на j-м месте. Для всех таких векторов, кроме векторов вида $\tilde{h}_0$ и $\tilde{h}_1$, это делается одинаково. Проведем оценку для $\tilde{h}_2$. Рассмотрим вектор $f_2 = (0, (0)_{i=1}^{\infty}, (0, 0, (1/3)h_2, 0, \ldots)) \in B(Y)$. Имеем $\operatorname{dist}(\tilde{h}_2, B(Y)) \leqslant \|\tilde{h}_2 + f_2\| \leqslant \max\{\|(5/6)h_2\|, \|(1/3)h_2\| + \|(1/2)h_2\|\} = 5/6$. Для $\tilde{h}_1$ оценку получаем так же, она будет иметь вид: $\operatorname{dist}(\tilde{h}_1, B(Y)) \leqslant \max\{\|(5/6)h_1\|, \|(1/3)h_1\|\}$. Проведем теперь оценку для $\tilde{h}_0$. Введем множество $A = \{x, |h_0(x)| \geqslant 1/3\}$. Это множество конечно. Определим функцию $g: A \to \mathbf{R}$ так: $g(x) = (1/3)\operatorname{sign}(h_0(x))$. Продолжим ее как непрерывную на весь отрезок так, чтобы $\sup\{|g(x)| : x \in [0,1]\} = 1/3$. Тогда $\sup\{|g(x) - h_0(x)| : x \in [0,1]\} = 2/3$. Рассмотрим вектор $z = (0, (0)_{i=1}^{\infty}, (2g, 0, \ldots))$. Имеем $\|z\| \leqslant 2/3$; $\operatorname{dist}(\tilde{h}_0, B(Y)) \leqslant \|\tilde{h}_0 + z\| \leqslant \max\{\|h_0 - g\|, 2\|g\|\} = 2/3$. Следовательно, $\hat{\theta}(X, Y) \leqslant 5/6$. Предложение доказано.

Замечание. В предложении 6, как и в предложении 9, константу 5/6 можно несколько уменьшить, заменив ее на $2(\sqrt{2} - 1)$. Для этого нужно в соответствующих местах числа 1/2 и 1/3 заменить положительным корнем уравнения $a^2 + 2a - 1 = 0$.

Покажем, что если ввести некоторые дополнительные ограничения, то ответ на вопрос, поставленный в [6], становится положительным.

Определение. *Система векторов $\{x_i, i \in I\}$ (I — множество индексов произвольной мощности) в банаховом пространстве X называется безусловным монотонным обобщенным базисом, если:* а) *любой $x \in X$ единственным образом представим в виде безусловно сходящегося ряда $\sum_{i \in I} \alpha_i x_i$ ($\alpha_i \neq 0$ для не более чем счетного множества индексов, называемого носителем*

вектора x); *б*) $\| \sum_{i \in A} \alpha_i x_i \| \leqslant \| \sum_{i \in B} \alpha_i x_i \|$, *если* $A \subset B$. По поводу пространств с таким базисом см. [9, § 17].

Предложение 7. *Если в пространстве* X, *имеющем безусловный монотонный обобщенный базис, для подпространств* Y *и* Z *имеем* $\theta(Y, Z) < 1$, *то* $\dim Y = \dim Z$.

Лемма 2. *Пусть* X — *банахово пространство,* Y, Z — *его подпространства,* $\theta(Y, Z) < 1$, *и пусть существует проектор* $P: X \to Y_1 \supset Y$ *такой, что при* $x \in Z$ *выполняется* $\| (I - P) x \| \leqslant h(x)$, где $h(x)$ — расстояние x *до* Y *и* $\dim Y_1 = \dim Y$. *Тогда* $\dim Z \leqslant \dim Y$.

Доказательство. Пусть $\dim Z \geqslant \dim Y$ и пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — подмножество в $S(Z)$ такое, что $\operatorname{card} A = \dim Z$ и при $\alpha \neq \beta$ имеем $\| x_\alpha - x_\beta \| > 1 - \varepsilon$. Так как $Px_\alpha \in Y_1$, то для любого $\delta > 0$ существуют $\alpha \neq \beta$ такие, что $\|Px_\alpha - Px_\beta\| < \delta$. Обозначим $y = x_\alpha - x_\beta$. Имеем: $\| y \| > 1 - \varepsilon$, $\| Py \| < \delta$. Поэтому $\| y/\| y \| - P(y/ \| y \|) \| > 1 - \delta/(1 - \varepsilon)$. Следовательно, $h(y/ \| y \|) \geqslant 1 - \delta/(1 - \varepsilon)$. Так как δ можно взять сколько угодно малым, получаем противоречие с тем, что $\theta(Y, Z) < 1$. Лемма доказана.

Доказательтаво предложения 7. Результат А позволяет рассматривать лишь случай, когда Y и Z бесконечномерны. В качестве Y_1 возьмем $[x_i]_{i \in H}$, где H — объединение носителей элементов из Y, P определим так: $P(\sum_{i \in A} \alpha_i x_i) = \sum_{i \in A \cap H} \alpha_i x_i$. Ясно, что так определенные P и Y_1 удовлетворяют условиям леммы 2 (именно в силу бесконечномерности Y). Следовательно, $\dim Z \leqslant \dim Y$. Поменяв Y и Z местами, аналогично рассуждая, получим $\dim Y \leqslant \dim Z$. Предложение доказано.

В связи с вопросом, приведенным в конце п. 1, докажем

Предложение 8. *Если в* $B(Z)$ *для любого* $\delta > 0$ *найдется подмножество* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *с* $\operatorname{card} A = \dim Z$ *такое, что* $\| x_\alpha - x_\beta \| \geqslant 2 - \delta$ *при* $\alpha \neq \beta$ *и* $\theta(Y, Z) < 1$, *то* $\dim Y \geqslant \dim Z$.

Доказательство. Пусть $\theta(Y, Z) < 1 - \varepsilon$. Возьмем $\delta < 2\varepsilon$ и выберем в $B(Z)$ подмножество $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\operatorname{card} A = \dim Z$, такое, что $\| x_\alpha - x_\beta \| \geqslant 2 - \delta$ при $\alpha \neq \beta$. Выберем в Y элементы y_α такие, что $\| x_\alpha - y_\alpha \| \leqslant 1 - \varepsilon$ (это можно сделать, так как $\theta(Y, Z) < 1 - \varepsilon$). Тогда $\| y_\alpha - y_\beta \| \geqslant \| x_\alpha - x_\beta \| - \| y_\alpha - x_\alpha \| - \| y_\beta - x_\beta \| \geqslant 2\varepsilon - \delta$ и, следовательно, $\dim Y \geqslant \operatorname{card} A$. Предложение доказано. Примерами пространств, удовлетворяющих его условиям, являются $l_1(\Gamma)$, $l_\infty(\Gamma)$.

В заключение уточним следующее утверждение работы [3, с. 195]:

Если в сепарабельном банаховом пространстве для подпространств P и Q $\theta(P, Q) < 1$ и P изометрично l_1, то Q изоморфно P.

Таким образом, доказано лишь то, что при указанных условиях Q содержит подпространство, изоморфное l_1.

Покажем, что в приведенной формулировке утверждение не имеет места.

Предложение 9. *Существуют такие пространство X и подпространства P и Q в нем, что P изометрично l_1, Q не изоморфно l_1 и $\hat{\theta}(P, Q) < 1$.*

Доказательство. В алгебраической сумме $C = l_1 \oplus l_1$ введем норму:

$$\| ((a_i)_{i=1}^{\infty},\ (b_i)_{i=1}^{\infty}) \| = \max \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left| a_i - \frac{1}{2} b_{i+1} \right|,\ \sum_{i=1}^{\infty} \left| b_i - \frac{1}{2} a_{i+1} \right| \right\}.$$

Ясно, что подпространства $A = \{((a_i),\ (0))\}$, $B = \{((0),\ (b_i))\}$, $B' = \{((0), (b_i)),\ b_1 = 0\}$ изометричны l_1. Орты A будем обозначать e_i, а орты B — f_i. Покажем, что $\hat{\theta}(A,\ B) \leqslant 5/6$, $\hat{\theta}(A,\ B') \leqslant 5/6$. Поскольку A, B и B' изометричны l_1, то достаточно показать $\operatorname{dist}(e_i,\ B(B')) \leqslant 5/6$, $\operatorname{dist}(f_i,\ B(A)) \leqslant 5/6$. В самом деле, $\operatorname{dist}(e_i,$ $B(B')) \leqslant \| e_i - (-(1/3) f_{i+1}) \| \leqslant \max \left\{ \left(1 - \frac{1}{6}\right),\ \ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \right\} = 5/6$, второе неравенство доказывается аналогично. Рассмотрим теперь $X = (\sum_{i=1}^{\infty} \oplus C)_1$, $P = (\sum_{i=1}^{\infty} \oplus A)_1$, $T = (\sum_{i=1}^{\infty} \oplus B)_1$, $T' = (\sum_{i=1}^{\infty} \oplus B')_1$. Ясно, что P, T, T' изометричны l_1, $T = T' \oplus l_1$, $\hat{\theta}(T,\ P) \leqslant 5/6$, $\theta(T', P) \leqslant 5/6$. Следовательно, для любого $Q, T' \subset Q \subset T$ $\hat{\theta}(Q, P) \leqslant$ $\leqslant 5/6$. Но в l_1 существуют подпространства Z, ему не изоморфные (см., например, [8, II, с. 107]). Тогда вследствие теоремы 2.a.3 из [8, I] $Q = T' \oplus Z$ не изоморфно l_1. Предложение доказано. Но все же имеет место

Предложение 10. *Если P изометрично l_1 и $\hat{\theta}(P,\ Q) < 1/2$, то Q изоморфно l_1.*

Доказательство. Пусть $\hat{\theta}(P,\ Q) < 1/2 - \delta$. Обозначим $\{e_i\}$ — канонический базис в $P = l_1$, а векторы $\{f_i\} \subset Q$ возьмем такими, что $\| f_i \| \leqslant 1$, $\| f_i - e_i \| < 1/2 - \delta$. Тогда $\left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\right)(1/2 + \delta) \leqslant$ $\leqslant \| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$. Покажем, что $[f_i] = Q$. Пусть это не так. Тогда существует $h \in Q$, $\| h \| = 1$ такой, что $\operatorname{dist}(h,\ [f_i]) > 1 - 2\delta$. Так как $\hat{\theta}(P,\ Q) < 1/2 - \delta$, то существует $g \in B(P)$ такой, что $\| h - g \| < 1/2 - \delta$; $g = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$. Тогда $\| h - \sum \beta_i f_i \| \leqslant \| h - \sum \beta_i e_i \| +$ $+ \| \sum \beta_i (e_i - f_i) \| \leqslant (1/2 - \delta) + \sum |\beta_i| (1/2 - \delta) \leqslant 1 - 2\delta$ (использовалось то, что $\sum |\beta_i| \leqslant 1$). Полученное противоречие доказывает справедливость предложения.

Список литературы: 1. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов.— Усп. мат. наук, 1957, **12**, вып. 2, с. 43—118. 2. *Гохберг И. Ц. Маркус А. С.* Две теоремы о растворе подпространств банахова пространства.— Усп. мат. наук, 1959, **14**, вып. 5, с 135—140. 3 *Гурарий В. И.* О растворах и наклонах подпространств банахова пространства.— Теория функций, функцион. анализ и их приложения, 1965, вып; 1, с. 194—204. 4. *Кадец М. И.* Замечание о растворе подпространств.—Функцион. анализ и его приложения, 1975, **9**, вып. 2, с. 73—74. 5. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.— М.: Мир, 1972. — 740 с. 6. *Крейн М. Г., Красносельский М. А., Мильман Д. П.* О дефектных числах линейных операторов в банаховом пространстве и о некоторых геометрических вопросах.— Тр. ин-та математики АН УССР, 1948, **11**, с. 97—112. 7. *James R. C.* Some self-dual properties of normed linear spaces.— Annals of Mathematics Studies, 1972, v. 69, p. 159—175. 8. *Lindenstrauss J., Fzafriri L.* Classical Banach Spaces, **1**, 2. Berlin: Springer, 1977.— 431 p. 9. *Singer J.* Bases in Banach Spaces II. Berlin: Springer, 1981.— 880 p.

Поступила в редколлегию 10.11.82.

УДК 517.984

Л. В. ПЕРКОЛАБ

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ ЯКОБИ

Пусть H — гильбертово пространство векторов $\vec{y} = (\ldots y_{-k}, \ldots y_{-1}, y_0, y_1, \ldots y_k, \ldots)$ со скалярным произведением $(\vec{x}, \vec{y}) = \sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty} x_i \bar{y}_i$.

Рассмотрим в H самосопряженный ограниченный оператор A, порожденный бесконечной периодической якобиевой матрицей (J-матрицей)

$$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ b_{-1} & a_0 & b_0 & 0 & & & & \\ 0 & b_0 & a_1 & b_1 & 0 & & & \\ & 0 & b_1 & a_2 & b_2 & 0 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & 0 & b_{k-1} & a_k & b_k & 0 & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \tag{1}$$

элементы $a_k = a_{k+n}$ которой вещественны, а $b_k = b_{k+n}$ отрицательны.

Как известно, спектр этого оператора S непрерывен и состоит из конечного числа зон

$$[\mu_k^+, \mu_{k+1}^-] \ (k = 0, 1, \ldots n-1): \quad S = \bigcup_{k=0}^{n-1} [\mu_k^+, \mu_{k+1}^-], \tag{2}$$

где $\mu_0^+ = \mu_0^- = \mu_0$, $\mu_n^+ = \mu_n^- = \mu_n$ и $\mu_0 < \mu_1^- \leqslant \mu_1^+ < \cdots < \mu_{n-1}^- \leqslant \leqslant \mu_{n-1}^+ < \mu_n$.

В настоящей работе будут найдены необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять последовательность сегментов (2) для того, чтобы она была спектром некоторой J-матрицы, и дан способ восстановления этой матрицы.

Так как по последовательности сегментов матрица A восстанавливается неоднозначно, будут указаны те дополнительные данные, которые однозначно ее определяют.

1. Свойства ортогональных многочленов. Уравнение $A\vec{y} = \mu\vec{y}$ **(1.1)** в пространстве произвольных последовательностей $(\ldots y_{-k}, \ldots y_{-1}, y_0, y_1, \ldots y_k, \ldots)$ эквивалентно конечно-разностному уравнению второго порядка

$$b_{k-1}y_{k-1} + a_k y_k + b_k y_{k+1} = \mu y_k \ (k = 0, \pm 1, \ldots). \qquad (1.2)$$

Обозначим через $\vec{P}\ (P_{-1}(\mu), P_0(\mu), P_1(\mu), \ldots)$ и $\vec{Q}\,(Q_{-1}(\mu), Q_0(\mu), Q_1(\mu) \ldots)$ фундаментальную систему решений уравнения (1.2) при начальных данных $P_{-1}(\mu) = 0$, $Q_{-1}(\mu) = 1$, $P_0(\mu) = 1$, $Q_0(\mu) = 0$.

Элементы $P_k(\mu)$, $Q_k(\mu)$ векторов $\vec{P}$, $\vec{Q}$ являются многочленами относительно μ степени k и $k-1$ соответственно.

Они обладают следующими свойствами:

1. Корни $P_k(\mu)$ вещественны, просты и перемежаются с корнями $P_{k-1}(\mu)$.

2. Корни $Q_k(\mu)$ вещественны, просты и перемежаются с корнями $P_k(\mu)$.

3. Имеет место аналог формулы Лиувилля — Остроградского

$$P_{k-1}(\mu)\,Q_k(\mu) - P_k(\mu)\,Q_{k-1}(\mu) = -\frac{b_{-1}}{b_{k-1}} \quad (k = 0, 1, \ldots). \qquad (1.3)$$

4. Справедливо равенство $\begin{pmatrix} y_{n+k-1} \\ y_{n+k} \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} y_{k-1} \\ y_k \end{pmatrix}$, где $y_k = y_k(\mu)$ — решение уравнения (1.2), а матрица $A_n = \begin{pmatrix} Q_{n-1}(\mu) & P_{n-1}(\mu) \\ Q_n(\mu) & P_n(\mu) \end{pmatrix}$ называется матрицей монодромии.

5. Числа $\mu_k^{\pm}$ $(k = 0, \ldots n)$ являются корнями уравнения $u_+(\mu) = \pm 1$ **(1.4)**, где $u_+(\mu) = \dfrac{P_n(\mu) + Q_{n-1}(\mu)}{2}$ — многочлен n-й степени, а $S = \{\mu : u_+^2(\mu) \leqslant 1\}$.

Замечание. Корни μ_k^-, μ_k^+ уравнения (1.4) могут совпадать.

Следствие. Многочлен $(n-1)$-й степени $u_+'(\mu)$ имеет только вещественные корни.

Теорема 1.1. *Пусть* $P_n(z)$ — *многочлен n-й степени. Для того чтобы уравнение* $P_n^2(z) = 1$ **(1.5)** *имело только вещественные корни, необходимо и достаточно, чтобы* $P_n(z)$ *представлялся в виде* $P_n(z) = \cos\theta(z)$, *где функция* $\theta(z)$ *осуществляет конформное отображение верхней полуплоскости на область* $\theta\{h_k\}$ *вида* (рис. 1),

переводящее бесконечно удаленную точку z-плоскости в бесконечно удаленную точку полуполосы θ-плоскости.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть уравнение (1.5) имеет $2n$ вещественных корней.

Не ограничивая общности, считаем n нечетным, а старший коэффициент многочлена $P_n(z)$ — отрицательным.

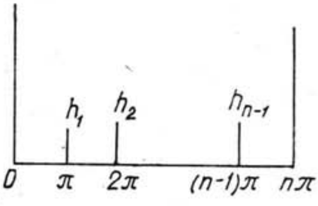

Рис. 1

Обозначим через α_0 и β_n самый левый и самый правый корни уравнения (1.5) соответственно. Тогда все корни этого уравнения будут заключены в отрезке $[\alpha_0, \beta_n]$, причем $P_n(\alpha_0) = +1$, а $P_n(\beta_n) = -1$. Исследование поведения $P_n(z)$ показывает, что его график имеет вид, изображенный на рис. 2, где α_{2k}, β_{2k}—корни уравнения $P_n(z) = 1$, а α_{2k-1}, β_{2k-1} — корни уравнения

$$P_n(z) = -1 \ \left(k = 1,\ 2,\ \ldots \frac{n-1}{2}\right).$$

Определим в верхней полуплоскости функцию $\theta(z)$ по формуле

$$\theta(z) = \int\limits_{\alpha_0}^{z} \frac{-P_n'(\xi)}{\sqrt{1 - P_n^2(\xi)}}\, \alpha_\xi, \tag{1.6}$$

выбрав ветвь радикала $\sqrt{1 - P_n^2(z)}$ так, чтобы $\operatorname{Im}\sqrt{1 - P_n^2(z)}$ была положительна при $z < \alpha_0$. Эта функция аналитична в области определения и непрерывна вплоть до границы.

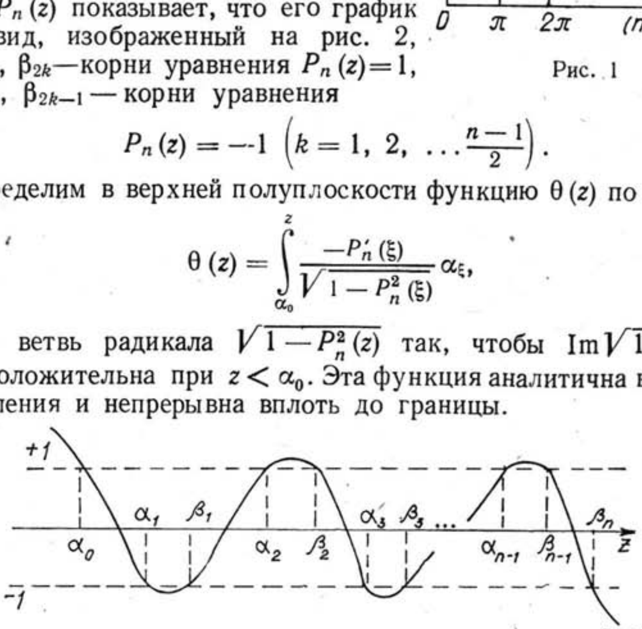

Рис. 2

На границе верхней полуплоскости, когда z меняется от $-\infty$ до α_0, $\arg\sqrt{1 - P_n^2(z)} = \frac{\pi}{2}$, при этом $P_n'(z) < 0$ и $\theta(z)$ является чисто мнимой величиной, монотонно изменяющейся от $i\infty$ до 0, а $\theta(\alpha_0) = 0$. Когда z меняется от α_0 до α_1, $P_n'(z) < 0$, $\sqrt{1 - P_n^2(z)}$ вещественен и $\theta(z) = \arccos P_n(z)$ монотонно возрастает от 0 до $\theta(\alpha_1)$.

Так как при этом $P_n(z)$ монотонно убывает от $+1$ до -1, то $\theta(\alpha_1) = \pi$.

При дальнейшем изменении z от α_k до β_k $(k=1, \dots n-1)$ функция $\sqrt{1-P_n^2(z)}$ принимает чисто мнимые значения, при этом $\arg\sqrt{1-P_n^2(z)} = \frac{\pi}{2} - k\pi$, а $\operatorname{sign}\operatorname{Im}\sqrt{1-P_n^2(z)} = (-1)^k$.

Так как многочлен $P_n'(z)$ имеет только простые корни $\gamma_k \in (\alpha_k, \beta_k)$, то $\operatorname{sign} P_n'(z) = \begin{cases}(-1)^k, & \alpha_k < z < \gamma_k \\ (-1)^{k+1} & \gamma_k < z < \beta_k.\end{cases}$

Следовательно, когда z возрастает от α_k до β_k, $\operatorname{Re}\theta(z)$ остается равной $\arccos(-1)^k = k\pi$, а $\operatorname{Im}\theta(z)$ сначала возрастает от 0 до $h_k = \frac{1}{i}(\theta(\gamma_k) - k\pi)$, а затем убывает от h_k до 0, и так как $P_n(\beta_k) = P_n(\alpha_k) = (-1)^k$, то $\theta(\beta_k)$ тоже равно $k\pi$. Когда z меняется от β_k до α_{k+1}, $P_n(z)$ изменяется от $(-1)^k$ до $(-1)^{k+1}$ монотонно, $\sqrt{1-P_n^2(z)}$ вещественен и $\theta(z) = \arccos P_n(z)$ возрастает от $k\pi$ до $\theta(\alpha_{k+1})$, где $\theta(\alpha_{k+1}) = (k+1)\pi$.

Следовательно, когда z пробегает в положительном направлении отрезки $[\alpha_k, \beta_k]$, $[\beta_k, \alpha_{k+1}]$ $(k=1, \dots n-1)$, функция $\theta(z)$ пробегает в положительном направлении часть границы $\Theta\{h_k\}$, состоящую из разреза $\operatorname{Re}\theta(z) = k\pi$, $0 \leqslant \operatorname{Im}\theta(z) \leqslant h_k$ и отрезка $[k\pi, (k+1)\pi]$. И, наконец, когда z становится больше β_n, $P_n'(z) < 0$, $\arg\sqrt{1-P_n^2(z)} = \frac{\pi}{2} - n\pi$, а $\theta(z) = n\pi + i\operatorname{Im}\theta(z)$, где $\operatorname{Im}\theta(z) > 0$ и возрастает.

Таким образом, когда z пробегает в положительном направлении вещественную ось, функция $\theta(z)$ пробегает границу области $\Theta\{h_k\}$, взаимно-однозначно отображая ось x на границу $\Theta\{h_k\}$ и сохраняя направление обхода.

По теореме о соответствии границ, функция $\theta(z)$ конформно отображает верхнюю полуплоскость на $\Theta\{h_k\}$.

Формула (1.6) дает также представление $\theta(z) = \arccos P_n(z)$, откуда следует, что $P_n(z) = \cos\theta(z)$. Необходимость доказана.

Замечание. Конформное отображение $\theta(z)$ верхней полуплоскости на $\Theta\{h_k\}$, сохраняющее бесконечно удаленную точку, однозначно, если оно фиксировано условиями $\theta(\alpha_0) = 0$, $\theta(\beta_n) = n\pi$.

Достаточность. Как известно, функция, осуществляющая конформное отображение верхней полуплоскости на область $\Theta\{h_k\}$, переводящее бесконечно удаленную точку z-плоскости в бесконечно удаленную точку полуполосы θ-плоскости, а точки α_0 и β_n в 0 и $n\pi$ соответственно, задается интегралом Кристоффеля—Шварца

$$\theta(z) = ci \int_{\alpha_0}^{z} \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(\xi - \gamma_k)\, d\xi}{\sqrt{(\xi-\alpha_0)\prod_{k=1}^{n-1}(\xi-\alpha_k)(\xi-\beta_k)(\xi-\beta_n)}}, \qquad (1.7)$$

где α_k, β_k являются прообразами точек $k\pi$, γ_k — точек $k\pi + ih_k$ $(k = 1, \ldots n-1)$ области $\Theta\{h_k\}$.

Функция $u(z) = \cos\theta(z)$ в верхней полуплоскости аналитична как суперпозиция аналитических функций. Когда z пробегает вещественную ось, $\theta(z)$ пробегает границу области $\Theta\{h_k\}$, притом вещественной части границы $\Theta\{h_k\}$ отвечают вещественные значения $\cos\theta(z)$.

Когда $\theta(z) = k\pi + il_k$, $\cos\theta(z) = (-1)^k \operatorname{ch} l_k$ $(k = 0, 1, \ldots n)$ тоже вещественен, т. е. функция $u(z)$ вещественна на границе верхней полуплоскости. Продолжим ее в нижнюю полуплоскость по формуле $u(z) = \overline{u(\overline{z})}$. Новая функция, которую назовем тоже $\cos\theta(z)$, будет аналитической во всей z-плоскости, а значит, целой.

Далее, $\theta(z) = ci \int\limits_{\alpha_0}^{z} \frac{R_{n-1}(\xi)}{\sqrt{R_{2n}(\xi)}} d\xi$, где $R_k(z)$ — многочлен степени k.

При $|z| \gg 1$ $\theta(z) \sim ci \int\limits^{z} \frac{\xi^{n-1}}{\xi^n} d\xi = ci \ln z$ и $u(z) = 0(z^c)$ ведет себя как степенная функция.

Отсюда и из того, что $u(z)$ — целая функция, заключаем, что она является многочленом степени c, где c — целое число.

Покажем теперь, что $c = n$, пересчитав корни многочлена $u(z)$. Функция $\theta(z)$ переводит $(n+1)$ точку α_k $(k = 0, 1, \ldots n-1)$, β_n вещественной оси в точки $k\pi$ $(k = 0, \ldots n)$ соответственно, следовательно, $\cos\theta(\alpha_k) = (-1)^k$ $(k = 0, \ldots n-1)$, $\cos\theta(\beta_n) = -1$, причем если $\cos\theta(\alpha_k) = +1$, то $\cos\theta(\alpha_{k+1}) = -1$, а так как между $k\pi$ и $(k+1)\pi$ находится только одна точка $k\pi + \frac{\pi}{2}$ $(k = 0, \ldots n-1)$, то функция $u(z)$ на вещественной оси n раз обращается в ноль. Значит, степень многочлена $u(z)$ не меньше n. Но комплексных корней у многочлена $u(z)$ нет.

Действительно, если бы точка $\tilde{z}$ была комплексным корнем функции $\cos\theta(z)$, то из того, что $\cos\theta(\tilde{z}) = 0$, следовало бы, что $\theta(\tilde{z}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Значит, точка $\tilde{z}$ должна была бы быть комплексным прообразом вещественной точки, а это противоречит тому факту, что вещественным θ отвечают вещественные z. Тот факт, что уравнение $u^2(z) = 1$ имеет $2n$ вещественных корня, следует из равенств $\cos\theta(\alpha_k) = (-1)^k$ $(k = 0, \ldots n-1)$, $\cos\theta(\beta_k) = (-1)^k$ $(k = 1, \ldots n)$.

Теорема доказана.

2. Обратная задача для периодической J-матрицы. Пусть имеется бесконечная периодическая J-матрица A вида (1) и $\mu_k^{\pm}$ $(k = 0, 1, \ldots n)$ — края зон ее спектра, ν_k $(k = 1, 2, \ldots n-1)$ — корни многочлена $P_{n-1}(z)$, построенного по этой матрице, $\sigma_k = \operatorname{sign} u_-(\nu_k)$ $(k = 1, \ldots n-1)$, где $u_-(z) = \frac{P_n(z) - Q_{n-1}(z)}{2}$.

Набор чисел $\mu_k^{\pm}$ $(k=0, \ldots n)$, ν_k, σ_k $(k=1, \ldots n-1)$ **(2.1)** называется спектральными данными рассматриваемой матрицы, и обратная задача состоит в восстановлении матрицы A по этим данным.

Заметим, что если последовательность $-\infty < \mu_0 < \mu_1^- \leqslant \mu_1^+ < < \mu_2^- \leqslant \mu_2^+ < \ldots < \mu_{n-1}^- \leqslant \mu_{n-1}^+ < \mu_n$ состоит из границ зон спектра матрицы A, то последовательность $0 < \mu_1^- - \mu_0 \leqslant \mu_1^+ - \mu_0 < \mu_2^- - \mu_0 \leqslant \mu_2^+ - \mu_0 < \ldots < \mu_n - \mu_0$ состоит из границ зон спектра матрицы $A - \mu_0 E$. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать $\mu_0 = 0$, а коэффициенты a_k матрицы A положительными.

Действительно, числа $\mu_{2k+1}^{\pm}$ $\left(k=0, \ldots \frac{n-1}{2}\right)$ являются собственными значениями антипериодической задачи $\overrightarrow{Ay} = \mu\overrightarrow{y}$, $y_{-1} = -y_{n-1}$, $y_0 = -y_n$ для бесконечной периодической J-матрицы (1). Последняя легко сводится к зrдаче с конечной матрицей $A_3\overrightarrow{y} = \mu\overrightarrow{y}$, где $\overrightarrow{y} = (y_0, y_1, \ldots y_{n-1})$, а

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \ldots & & -b_{n-1} \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & \ldots & \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & 0 \ldots & \\ \hline \ldots & 0 & b_{n-3} & a_{n-2} & & b_{n-2} \\ -b_{n-1} & \ldots & 0 & b_{n-2} & & a_{n-1} \end{pmatrix},$$

причем, если $\mu_0 = 0$, то A_3 положительно определена.

Свойство положительной определенности A_3, примененное к каноническому базису e_k $(k=1, \ldots n)$, дает $(A_3 e_k, e_k) = a_{k-1} > > 0$ $(k=1, \ldots n)$.

2.1. Алгоритм восстановления A. 1. Восстановим $u_+(z)$ по числам $\mu_k^{\pm}$ $(k=0, \ldots n)$. Так как $\mu_k^{\pm}$ являются корнями уравнения $u_+^2(z) - 1 = 0$, то

$$u_+(z) - 1 = c(z-\mu_0) \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (z-\mu_{2k}^-)(z-\mu_{2k}^+),$$

$$\text{а } u_+(z) + 1 = c \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (z-\mu_{2k-1}^-)(z-\mu_{2k-1}^+)(z-\mu_n),$$

откуда следует тождество

$$2 = c\Big[-(z-\mu_0) \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (z-\mu_{2k}^-)(z-\mu_{2k}^+) + \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (z-\mu_{2k-1}^-)(z-\mu_{2k-1}^+)(z-\mu_n)\Big],$$

из которого мы заключаем, что

$$c = \frac{2}{\left[\mu_0 \prod\limits_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (\mu_{2k}^{-} \cdot \mu_{2k}^{+}) - \mu_n \prod\limits_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (\mu_{2k-1}^{-} \cdot \mu_{2k-1}^{+})\right]}.$$

Следовательно,

$$u_+(z) = 1 + \frac{2}{\left[\mu_0 \prod\limits_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (\mu_{2k}^{-} \cdot \mu_{2k}^{+}) - \mu_n \prod\limits_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (\mu_{2k-1}^{-} \cdot \mu_{2k-1}^{+})\right]} \times$$

$$\times (z - \mu_0) \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (z - \mu_{2k}^{-})(z - \mu_{2k}^{+}).$$

2. Числа ν_k вместе с σ_k дают нам возможность найти $Q_{n-1}(z)$. Функция $u_-(z)$, являющаяся как и $u_+(z)$ многочленом n-й степени, связана с последней соотношением

$$u_+^2(\nu_k) - u_-^2(\nu_k) = 1 \quad (k = 1, \dots n - 1). \tag{2.2}$$

Чтобы убедиться в этом, используем частный случай формулы (1.3) для периодической матрицы

$$P\ (z) Q_{n-1}(z) - Q_n(z) P_{n-1}(z) = 1. \tag{2.3}$$

Положим в тождестве (2.3) $\mu = \nu_k$, тогда из равенства $u_+^2(z) - u_-^2(z) = P_n(z) Q_{n-1}(z)$ прямо следует соотношение (2.2), определяющее

$$u_-(\nu_k) = \sigma_k \sqrt{u_+^2(\nu_k) - 1} \quad (k = 1, \dots n - 1). \tag{2.4}$$

Следовательно, по известным числам ν_k и σ_k $(k = 1, \dots n - 1)$ и многочлену $u_+(z)$ мы можем найти значения

$$Q_{n-1}(\nu_k) = u_+(\nu_k) - \sigma_k \sqrt{u_+^2(\nu_k) - 1} \quad (k = 1, \dots n - 1), \tag{2.5}$$

а сам многочлен $(n-2)$-й степени $Q_{n-1}(z)$ восстанавливается по интерполяционной формуле Лагранжа

$$Q_{n-1}(z) = \sum_{k=1}^{n-1} Q_{n-1}(\nu_k) \frac{\omega_{n-1}(z)}{(z - \nu_k)\,\omega_{n-1}'(\nu_k)}, \text{ где } \omega_{n-1}(z) = \prod_{k=1}^{n-1} (z - \nu_k).$$

3. Зная $u_+(z)$ и $Q_{n-1}(z)$, находим

$$P_n(z) = 2u_+(z) - Q_{n-1}(z). \tag{2.6}$$

4. По корням ν_k $(k = 1, \dots n - 1)$ многочлена $P_{n-1}(z)$ восстанавливаем также нормированный многочлен $\widehat{P}_{n-1}(z) = \prod\limits_{k=1}^{n-1} (z - \nu_k)$.

5. Перейдем теперь к восстановлению матрицы A по найденным многочленам $P_n(z)$ и $\widehat{P}_{n-1}(z)$. Для этого пронормируем многочлен $P_n(z)$, обозначив нормированный многочлен $\widehat{P}_n(z)$.

Обозначим также $\widehat{P}_k(z) = z^k + c_k^{k-1} z^{k-1} + \cdots + c_k^1 z + c_k^0$ нормированный многочлен $P_k(z)$. Многочлены $P_k(z)$ удовлетворяют системе уравнений

$$b_{k-1}P_{k-1}(z) + a_k P_k(z) + b_k P_{k+1}(z) = zP_k(z) \quad (k = n-1, \ldots 0) \quad (2.7)$$

с искомой матрицей A, притом $P_k(z) = \frac{1}{b_0 \ldots b_{k-1}} z^k + \cdots$.

Следовательно, многочлены $\widehat{P}_k(z)$ должны удовлетворять системе уравнений $b_{k-1}^2 \widehat{P}_{k-1}(z) + a_k \widehat{P}_k(z) + \widehat{P}_{k+1}(z) = z\widehat{P}_k(z)$ $(k = n-1, \ldots 0)$.

Выразим в k-м уравнении этой системы $\widehat{P}_{k-1}(z)$ через $\widehat{P}_k(z)$ и $\widehat{P}_{k+1}(z)$ и соберем коэффициенты при одинаковых степенях z, тогда

$$\widehat{P}_{k-1}(z) = \frac{1}{b_{k-1}^2} [z^k (c_k^{k-1} - c_{k+1}^k - a_k) + z^{k-1}(c_k^{k-2} - c_{k+1}^{k-1} - a_k c_k^{k-1}) + \ldots].$$

Из этого выражения, учитывая, что $\widehat{P}_{k-1}(z)$ является многочленом $(k-1)$-й степени со старшим коэффициентом, равным 1, мы определяем

$$a_k = c_k^{k-1} - c_{k+1}^k, \quad b_{k-1} = -\sqrt{c_k^{k-2} - a_k c_k^{k-1} - c_{k+1}^{k-1}} \qquad (2.8)$$

и сам многочлен $\widehat{P}_{k-1} = z^{k-1} + c_{k-1}^{k-2} z^{k-2} + \cdots + c_{k-1}^0$.

Проведя этот процесс последовательно для $k = n-1, n-2, \ldots 0$, мы найдем коэффициенты a_k $(k = n-1, \ldots 0)$ и b_k $(k = n-2, \ldots 0)$. Коэффициент b_{n-1} находим, используя старший коэффициент многочлена $P_n(z)$, по формуле $b_{n-1} = (c_n^n \cdot b_0 \cdots b_{n-2})^{-1}$.

Найдя таким образом a_k и b_k $(k = 0, \ldots n-1)$ и учитывая свойство периодичности коэффициентов, мы восстанавливаем матрицу A.

Замечание. При восстановлении матрицы на ЭВМ удобнее алгоритм, использующий непрерывную дробь. В этом случае по корням ν_k $(k = 1, \ldots n-1)$ следует восстановить многочлен

$$P_{n-1}(z) = c_{n-1}^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (z - \nu_k).$$

Коэффициент c_{n-1}^{n-1} этого многочлена определяется через коэффициенты найденных ранее многочленов

$$Q_{n-1}(z) = -\frac{b_{n-1}}{b_0 b_1 \ldots b_{n-2}} z^{n-2} + \cdots = q_{n-1}^{n-2} z^{n-2} + \cdots$$

и

$$P_n(z) = \frac{1}{b_0 \dots b_{n-1}} z^n + \dots = c_n^n z^n + \dots$$

по формулам

$$b_{n-1}^2 = -\frac{q_{n-1}^{n-2}}{c_n^n}, \quad c_{n-1}^{n-1} = c_n^n b_{n-1},$$

причем в качестве b_{n-1} мы выбираем $-\sqrt{b_{n-1}^2}$. Заменим теперь J-матрицу A системы (2.7) формальной непрерывной дробью. Для этого, разделив обе части $n-1$-го уравнения этой системы на $P_{n-1}(z)$, получим

$$b_{n-1}\frac{P_n(z)}{P_{n-1}(z)} = z - a_{n-1} - \frac{b_{n-2}P_{n-2}(z)}{P_{n-1}(z)} = z - a_{n-1} - \cfrac{b_{n-2}^2}{b_{n-2}\cfrac{P_{n-1}(z)}{P_{n-2}(z)}}.$$

При $k = n-2$ проделаем то же самое для $P_{n-1}(z)$ и $P_{n-2}(z)$ тогда

$$b_{n-2}\frac{P_{n-1}(z)}{P_{n-2}(z)} = z - a_{n-2} - \cfrac{b_{n-3}^2}{b_{n-3}\cfrac{P_{n-2}(z)}{P_{n-3}(z)}}.$$

Продолжив этот процесс последовательно до $k = 0$, получим разложение $b_{n-1}\frac{P_n(z)}{P_{n-1}(z)}$ в непрерывную дробь

$$b_{n-1}\frac{P_n(z)}{P_{n-1}(z)} = (z - a_{n-1}) - \cfrac{b_{n-2}^2}{(z-a_{n-2}) - \cfrac{b_{n-3}^2}{(z-a_{n-3}) - \cfrac{b_{n-4}^2}{(z-a_{n-4}) - \dots - \cfrac{b_0^2}{z-a_0}}}}.$$

Следовательно, для того чтобы найти коэффициенты матрицы A, достаточно разложить отношение $\frac{b_{n-1}P_n(z)}{P_{n-1}(z)}$ в непрерывную дробь. В качестве b_k, как и прежде, будем брать $-\sqrt{b_k^2}$ ($k = n-2, \dots 0$).

2.2. Свойства спектральных данных. В предыдущем разделе было установлено, что для восстановления J-матрицы A достаточно знать ее спектральные данные (2.1).

Рассмотрим теперь вопрос о том, какими свойствами должен обладать этот набор чисел, для того чтобы он был спектральным набором некоторой J-матрицы. Для этого представим данные (2.1) в следующей эквивалентной форме, считая $\mu_0 = 0$. Числа $\mu_k^{\pm}$ ($k = 0, \dots n$) определяют точки z-плоскости, являющиеся границей

зон спектра матрицы A, при этом, как видно из формулы (2.2), $\nu_k \in [\mu_k^-, \mu_k^+]$ $(k = 1, \ldots n-1)$.

Разрежем z-плоскость вдоль промежутков

$$(-\infty,\ 0],\ [\mu_k^-,\ \mu_k^+]\ (k = 1, \ldots n-1),\ [\mu_n,\ \infty) \qquad (2.9)$$

и поместим точку $\nu_k = (k = 1, \ldots n-1)$ на верхний (нижний) берег разреза $[\mu_k^-, \mu_k^+]$, если $\sigma_k = +1\,(-1)$.

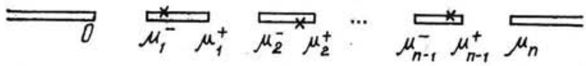

Рис. 3

Тогда данным (2.1) будет отвечать z-плоскость с разрезами (2.9) и отмеченными на ней точками $\nu_k\,(k = 1, \ldots n-1)$ (рис. 3).

Вместе с тем числа $\mu_k^\pm$ $(k = 0, \ldots n)$ однозначно определяют многочлен $u_+(z)$, а следовательно, и функцию $\theta(z)$, конформно отображающую z-плоскость с разрезами (2.9) на область

$$\theta\{h_k\} = \{\theta : 0 < \operatorname{Re}\theta < n\pi\} \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} \{\theta : \operatorname{Re}\theta = k\pi,\ -h_k \leqslant \operatorname{Im}\theta \leqslant h_k\}. \qquad (2.10)$$

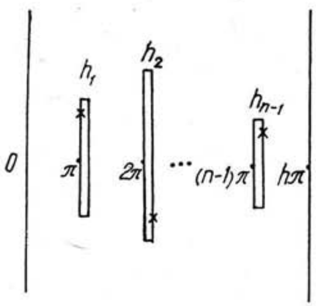

Рис. 4

При этом отображении точкам ν_k z-плоскости отвечают точки $\theta_k = k\pi + ih_k'$, $-h_k \leqslant h_k' \leqslant h_k$ области $\theta\{h_k\}$, которые попадают на верхнюю (нижнюю) часть разреза $[k\pi - ih_k, k\pi + ih_k]$, если ν_k находятся на верхнем (нижнем) береге разреза $[\mu_k^-, \mu_k^+]$ $(k = 1, \ldots n-1)$ (рис. 4).

Будем в дальнейшем называть область $\Theta\{h_k\}$ с отмеченными на ней точками $\theta_k\,(k = 1, \ldots n-1)$ и точку μ_n спектральным набором матрицы A. Для восстановления матрицы A по этим данным определим $3(n-1)$ неизвестных величины $\mu_k^\pm$, $\gamma_k\,(k = 1, \ldots n-1)$ из соотношений $\theta(\mu_k^\pm) = k\pi$, $\theta(\gamma_k) = k\pi + ih_k\,(k = 1, \ldots n-1)$, где

$$\theta(z) = n\int_0^z \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(\xi - \gamma_k)}{\sqrt{\xi\prod_{k=1}^{n-1}(\xi - \mu_k^-)(\xi - \mu_k^+)(\mu_n - \xi)}}\,d\xi.$$

Затем найдем ν_k $(k=1, \dots n-1)$ из системы уравнений $\theta(\nu_k) = k\pi + ih'_k$ $(k=1, \dots n-1)$ и, положив $\sigma_k = \operatorname{sign} h'_k$ $(k = 1, n-1)$, воспользуемся алгоритмом восстановления, описанным в разделе 2.1.

Пусть теперь область $\Theta\{h_k\}$ вида (2.10) и точка μ_n заданы произвольно. Выберем на одной из сторон каждого вертикального разреза $[k\pi - ih_k, k\pi + ih_k]$ этой области некоторую точку $\theta_k = k\pi + ih'_k$, $-h_k \leqslant h'_k \leqslant h_k$ $(k=1, \dots n-1)$. По этим данным определим описанным выше способом $\mu_k^{\pm}$, ν_k, σ_k $(k=1, \dots n-1)$, а затем и $u_{+(z)}^{(1)}$, $Q_{n-1}^{(1)}(z)$, $P_n^{(1)}(z)$, $\hat{P}_{n-1}^{(1)}(z)$.

Лемма 2.1. *Корни $\lambda_k^{(n)}$ $(k=1, \dots n)$ многочлена n-й степени $P_n^{(1)}(z)$ различны, вещественны и перемежаются с ν_k $(k=1, \dots n-1)$.*

Доказательство. Функция $P_n^{(1)}(z)$ является многочленом n-й степени в силу формулы (2.6). Многочлен $Q_{n-1}^{(1)}(z)$ восстанавливался по своим значениям (2.5) в точках ν_k $(k=1. \dots n-1)$, значит $P_n^{(1)}(\nu_k) = u_+^{(1)}(\nu_k) + \sigma_k \sqrt{u_+^{(1)2}(\nu_k) - 1}$ $(k=1, \dots n-1)$, откуда следует, что $[P_n^{(1)}(\nu_k) - u_+^{(1)}(\nu_k)]^2 = u_+^{(1)2}(\nu_k) - 1$ или, что то же, $P_n^{(1)2}(\nu_k) - 2P_n^{(1)}(\nu_k)\,u_+^{(1)}(\nu_k) + 1 = 0$ $(k=1, \dots n-1)$.

Определив из последнего равенства

$$u_+^{(1)}(\nu_k) = \frac{P_n^{(1)2}(\nu_k) + 1}{2P_n^{(1)}(\nu_k)}, \tag{2.11}$$

заключаем, что

$$\operatorname{sign} u_+^{(1)}(\nu_k) = \operatorname{sign} P_n^{(1)}(\nu_k) \quad (k=1, \dots n-1). \tag{2.12}$$

Точки $\nu_k \in [\mu_k^-, \mu_k^+]$, значит $u_+^{(1)}(\nu_k)\,u_+^{(1)}(\nu_{k+1}) < 0$, а вместе с ними в силу (2.12) и $P_n^{(1)}(\nu_k)\,P_n^{(1)}(\nu_{k+1}) < 0$ $(k=1, \dots n-1)$, т. е. в каждом интервале (ν_k, ν_{k+1}) у многочлена $P_n^{(1)}(z)$ есть, по крайней мере, один корень $\lambda_k^{(n)}$ $(k=2, \dots n-1)$.

Кроме того, по построению $u_+^{(1)}(\mu_1^-) = -1$, а так как $\nu_1 \in [\mu_1^-, \mu_1^+]$, то $u_+^{(1)}(\nu_1) < -1$, значит $P_n^{(1)}(\nu_1) < 0$ **(2.13)**.

Подобные рассуждения, проведенные для ν_{n-1}, позволяют заключить, что $P_n^{(1)}(\nu_{n-1}) > 0$ **(2.14)**.

Но $u_+^{(1)}(z) \to \pm\infty$ при $z \to \mp\infty$, значит многочлен $P_n^{(1)}(z)$ в силу своего определения через $u_+^{(1)}(z)$ при $z \to \mp\infty$ ведет себя так же, что вместе с неравенствами (2.13) и (2.14) позволяет заключить, что у $P_n^{(1)}(z)$ есть корень левее ν_1 и правее ν_{n-1}. Других корней у $P_n^{(1)}(z)$ нет. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Наименьший корень $\lambda_1^{(n)}$ многочлена $P_n^{(1)}(z)$ положителен.*

Доказательство. Рассмотрев подобно тому, как в лемме 2.1, вопрос о расположении корней многочлена $Q_{n-1}^{(1)}(z)$, мы убеждаемся,

что в каждом интервале (ν_k, ν_{k+1}) $(k=1, \dots n-2)$ у многочлена $Q_{n-1}^{(1)}(z)$ есть один корень и $\operatorname{sign} Q_{n-1}^{(1)}(\nu_k) = \operatorname{sign} u_+^{(1)}(\nu_k)$ $(k=1, \dots n-1)$ **(2.15)**.

Обозначим через α_1 самый левый корень $u_+^{(1)}(z)$. Так как $u_+^{(1)}(z) > 1$ при $z<0$, а $u_+^{(1)}(\mu_1^-) = -1$, то $0 < \alpha_1 < \mu_1^-$. Но в силу (2.6) $P_n^{(1)}(\alpha_1) = -Q_{n-1}^{(1)}(\alpha_1)$, а согласно (2.12) и (2.15) $\operatorname{sign} P_n^{(1)}(\nu_1) = \operatorname{sign} u_+^{(1)}(\nu_1) = \operatorname{sign} Q_{n-1}^{(1)}(\nu_1)$ и это знак «—».

Учитывая, что левее ν_1 у $Q_{n-1}(z)$ корней нет, заключаем, что $Q_{n-1}^{(1)}(\alpha_1) < 0$, $P_n^{(1)}(\nu_1) < 0$, $P_n^{(1)}(\alpha_1) > 0$, т. е. между α_1 и ν_1 у $P_n^{(1)}(z)$ есть корень, и это $\lambda_1^{(n)}$. Значит, положение $\lambda_1^{(n)}$ следующее: $0 < \alpha_1 < \lambda_1^{(n)} < \nu_1$. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Многочлен k-й степени $P_k^{(1)}(z)$ имеет k различных вещественных корней, перемежающихся с корнями $P_{k+1}^{(1)}(z)$ $(k = 1, \dots n-1)$.*

Доказательство следует из леммы 2.1 по индукции.

Перейдем далее, согласно алгоритму восстановления, к определению матрицы, которую назовем A_1.

Лемма 2.4. *Получающиеся в процессе восстановления элементы матрицы A_1 обладают следующими свойствами: $a_k > 0$ $(k = n-1, \dots 0)$, $b_k^2 > 0$ $(k = n-2, \dots 0)$, $b_{n-1} > 0$.*

Доказательство. Воспользуемся соотношением между корнями многочленов и их коэффициентами, согласно которому у многочлена $\hat{P}_k(z) = z^k + c_k^{k-1} z^{k-1} + \dots + c_k^1 z + c_k^0$ с корнями $\lambda_i^{(k)}$ $(i = 1, \dots k)$; $c_k^{k-1} = -\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{(k)}$, $c_k^{k-2} = \sum_{\substack{i\neq j\\ i,\, j=1}}^{k} \lambda_i^{(k)} \lambda_j^{(k)}$.

Тогда для a_k $(k = n-1, \dots 0)$ в силу (2.8) получим

$$a_k = -\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{(k)} + \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{i+1}^{(k+1)} - \lambda_i^{(k)}) + \lambda_1^{(k+1)}.$$

Свойство $a_k > 0$ следует из лемм 2.2 и 2.3. Из формулы (2.8) следует также, что

$$b_{k-1}^2 = c_k^{k-2} + (c_{k+1}^{k} - c_k^{k-1})\, c_k^{k-1} - c_{k+1}^{k-1} =$$
$$= \sum_{\substack{i\neq j\\ i,\, j=1}}^{k} \lambda_i^{(k)} \lambda_j^{(k)} - \Big(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{(k)}\Big)^2 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{(k)} \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i^{(k+1)} - \sum_{\substack{i\neq j\\ i,\, j=1}}^{k+1} \lambda_i^{(k+1)} \lambda_j^{(k+1)}.$$

Упростим первые две суммы, тогда

$$b_{k-1}^2 = -\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i^{(k)})^2 \sum_{\substack{i\neq j\\ i,\, j=1}}^{k} \lambda_i^{(k)} \lambda_j^{(k)} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{(k)} \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i^{(k+1)} -$$
$$- \sum_{i<j}^{k+1} \lambda_i^{(k+1)} \lambda_j^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{k} \Big[(\lambda_j^{(k)} - \lambda_j^{(k+1)}) \sum_{i=j}^{k} (\lambda_{i+1}^{(k+1)} - \lambda_i^{(k)})\Big].$$

Последнее равенство легко проверяется поэлементно.

Учитывая перемежаемость корней $\lambda_i^{(k+1)}$ $(i=1, \ldots k+1)$ и $\lambda_i^{(k)}$ $(i=1, \ldots k)$, получаем $b_{k-1}^2>0$ $(k=n-1, \ldots 0)$. Элемент $b_{n-1}=(c_n^n b_0 \ldots b_{n-2})^{-1}$.

В лемме 2.1 показано, что $P_n^{(1)}(z)\to\pm\infty$, $z\to\mp\infty$, значит $c_n^n<0$. Отсюда и из $b_k<0$ $(k=0, \ldots n-2)$ заключаем, что $b_{n-1}<0$, и все утверждения леммы доказаны.

Нам осталось показать, что данные $\mu_k^{\pm}$ $(k=0, \ldots n)$, ν_k, σ_k $(k=1, \ldots n-1)$, полученные в процессе восстановления, являются спектральными данными A_1, тем самым будет установлена единственность этой матрицы.

Замечание. Так как точки θ_k $(k=1, \ldots n-1)$ выбирались нами на разрезах области $\Theta\{h_k\}$ произвольно, мы таким способом можем найти все матрицы с заданными краями зон спектра.

Решим прямую задачу, обозначив фундаментальную систему решений уравнения $A_1\vec{y}=z\vec{y}$ через $\{P_k(z)\}$ и $\{Q_k(z)\}$ $(k=0, 1, \ldots)$.

Лемма 2.5. *Спектр матрицы A_1 совпадает с $S=\bigcup\limits_{k=0}^{n-1}[\mu_k^+, \mu_{k+1}^-]$, корни $P_{n-1}(z)$ совпадают с ν_k $(k=1, \ldots n-1)$, $\operatorname{sign} u_-(\nu_k)$ совпадают с σ_k $(k=1, \ldots n-1)$.*

Доказательство. Многочлены $P_k(z)\equiv P_k^{(1)}(z)$ $(k=0, \ldots n)$ (2.16), так как удовлетворяют системам уравнений с одинаковыми матрицами и имеют одинаковые начальные значения. Значит, корни $P_{n-1}^{(1)}(z)$ и $P_{n-1}(z)$ совпадают, и это ν_k $(k=1, \ldots n-1)$. Покажем теперь, что $u_\pm(z)\equiv u_\pm^{(1)}(z)$.

По построению A_1 периодическая J-матрица, следовательно, для $Q_k(z)$ и $P_k(z)$ $(k=n, n-1)$ справедливо тождество (2.3).

Положим в (2.3) $z=\nu_k$ $(k=1, \ldots n-1)$, тогда $Q_{n-1}(\nu_k)=\frac{1}{P_n(\nu_k)}$ и

$$u_+(\nu_k)=\frac{P_n(\nu_k)+\frac{1}{P_n(\nu_k)}}{2} \quad (k=1, \ldots n-1). \tag{2.17}$$

Многочлен $P_n^{(1)}(z)$ определялся по формуле (2.6), т. е.

$$u_+^{(1)}(z)=\frac{P_n^{(1)}(z)+Q_{n-1}^{(1)}(z)}{2}$$

и в точках ν_k $(k=1, \ldots n-1)$ в силу (2.11) принимал значения

$$u_+^{(1)}(\nu_k)=\frac{P_n^{(1)}(\nu_k)+\frac{1}{P_n^{(1)}(\nu_k)}}{2}.$$

Отсюда и из (2.17) заключаем, что $u_+(\nu_k) = u_+^{(1)}(\nu_k)$ $(k = 1, \dots n-1)$ **(2.18)**. Но $u_-(\nu_k) = u_-^{(1)}(\nu_k)$ $(k = 1, \dots n-1)$ **(2.19)** также. Действительно, по определению функций $u_\pm(z)$ и $u_\pm^{(1)}(z)$ $P_n(z) = u_+(z) + u_-(z)$, $P_n^{(1)}(z) = u_+^{(1)}(z) + u_-^{(1)}(z)$.

Следовательно, $P_n(\nu_k) = u_+(\nu_k) + u_-(\nu_k)$, $P_n^{(1)}(\nu_k) = u_+^{(1)}(\nu_k) + u_-^{(1)}(\nu_k)$ $(k = 1, \dots n-1)$, что вместе с (2.16) и (2.18) дает (2.19). Функции $u_\pm(z)$ и $u_\pm^{(1)}(z)$ определяют также $Q_{n-1}(z) = u_+(z) - u_-(z)$, $Q_{n-1}^{(1)}(z) = u_+^{(1)}(z) - u_-^{(1)}(z)$.

Отсюда и из равенств (2.18), (2.19) следует, что $Q_{n-1}(z) \equiv Q_{n-1}^{(1)}(z)$, а вместе с ними в силу (2.16) и $u_+(z) \equiv u_\pm^{(1)}(z)$.

Из последнего тождества следуют все остальные утверждения леммы.

Теорема 2.1. *Для того, чтобы последовательность* $0 < \mu_1^- \leqslant \mu_1^+ < \mu_2^- \leqslant \mu_2^+ < \dots < \mu_{n-1}^- \leqslant \mu_{n-1}^+ < \mu_n$ *состояла из границ зон спектра оператора, порожденного бесконечной периодической J-матрицей A, необходимо и достаточно, чтобы она задавалась формулой* $\mu_k^\pm = z(k\pi \pm 0)$ $(k = 0, \dots n)$, *где* $z(\theta)$ — *функция, осуществляющая конформное отображение области* $\theta\{h_k\}$ *вида* (см. рис. 1) *на верхнюю полуплоскость, переводящее бесконечно удаленную точку полуполосы θ-плоскости в бесконечно удаленную точку z-плоскости.*

Доказательство необходимости этих условий проведено в теореме 1.1, а достаточность следует из алгоритма восстановления и лемм 2.1—2.5.

Рассмотрим якобиевы матрицы

$$A^\pm = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{-1}^\pm & a_0 & b_0^\pm & & & \\ & b_0^\pm & a_1 & b_1^\pm & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & b_{k-1}^\pm & a_k & b_k^\pm & \end{pmatrix},$$

у которых $a_{k+n} = a_k > 0$, $b_{k+n}^+ = b_k^+ > 0$, $b_{k+n}^- = b_k^- < 0$ соответственно.

При восстановлении матрицы мы выбирали $b_k < 0$, т. е. в качестве A рассматривали матрицу A^- как отвечающую физическому смыслу исходной задачи.

Лемма 2.6. *Многочлены* $P_k^\pm(z)$ *и* $Q_k^\pm(z)$, *построенные для матриц* $A^\pm$ *соответственно, совпадают с точностью до знака, при этом* $P_k^+(z) = (-1)^k P_k^-(z)$ $(k = 0, 1, \dots)$, $Q_k^+(z) = (-1)^{k+1} Q_k^-(z)$ $(k = -1, 0, \dots)$.

Доказательство. Многочлены $P_k^\pm(z)$ $(k = 1, \dots)$ являются решениями систем уравнений $A^\pm \vec{P}^\pm = z\vec{P}^\pm$ соответственно, отве-

чающими начальным значениям $P_{-1}^{\pm}(z)=0$, $P_0^{\pm}(z)=1$ и строятся по формулам

$$P_k^{\pm}(z)=\frac{z-a_{k-1}}{b_{k-1}^{\pm}}P_{k-1}^{\pm}(z)-\frac{b_{k-2}^{\pm}}{b_{k-1}^{\pm}}P_{k-2}^{\pm}(z)\ (k=1,2,\ldots).$$

Поэтому для P_k^{+} $(k=1, 2)$ имеем

$$P_1^{+}(z)=\frac{z-a_0}{b_0^{+}}=\frac{z-a_0}{-b_0^{-}}=-P_1^{-}(z),\ P_2^{+}(z)=$$

$$=\frac{z-a_1}{b_1^{+}}P_1^{+}(z)-\frac{b_0^{+}}{b_1^{+}}P_0^{+}(z)=\frac{z-a_1}{b_1^{-}}P_1^{-}(z)-\frac{b_0^{-}}{b_1^{-}}P_0^{-}(z)=P_2^{-}(z).$$

Положив $P_i^{+}(z)=(-1)^i P_i^{-}(z)$ при $i=k-2,\ k-1$, для $i=k$ получим

$$P_k^{+}(z)=\frac{z-a_{k-1}}{b_{k-1}^{+}}P_{k-1}^{+}(z)-\frac{b_{k-2}^{+}}{b_{k-1}^{+}}P_{k-2}^{+}(z)=$$

$$=\frac{z-a_{k-1}}{b_{k-1}^{-}}(-1)^k P_{k-1}^{-}(z)-\frac{b_{k-2}^{-}}{b_{k-1}^{-}}(-1)^{k-2}P_{k-2}^{-}(z)=(-1)^k P_k^{-}(z).$$

Отсюда заключаем, что $P_k^{+}(z)=(-1)^k P_k^{-}(z)$ при всех $k=0, 1, \ldots$.

Проделав то же самое для многочленов $Q_k^{\pm}(z)$ $(k=1, \ldots)$, получим второе утверждение леммы.

Следствие 2.5.

$$u_{+}^{+}(z)=-u_{+}^{-}(z),\quad u_{-}^{+}(z)=-u_{-}^{-}(z). \tag{2.20}$$

Теорема 2.2. *Границы зон спектра матриц A^{+} и A^{-} совпадают.*

Доказательство теоремы следует из того факта, что границы зон спектра матриц $A^{\pm}$ являются корнями уравнений $u_{+}^{\pm 2}(z)-1=0$ соответственно и следствия 2.5.

Отметим также, что если набор $\mu_k^{\pm}$ $(k=0, 1, \ldots n)$, ν_k, σ_k $(k=1, \ldots n-1)$ отвечает матрице A^{-}, то в силу леммы 2.5 и равенств (2.20) спектральными данными матрицы A^{+} являются числа $\mu_k^{\pm}$ $(k=0, \ldots n)$, ν_k, $-\sigma_k$ $(k=1, \ldots n-1)$, если же спектральные данные A^{-} представлены в виде области $\Theta\{h_k\}$ вида (2.10) с отмеченными на ней точками $\theta_k^{-}=k\pi+ih_k'$ $(k=1, \ldots n-1)$, то матрице A^{+} отвечает та же область $\Theta\{h_k\}$, а точки $\theta_k^{+}=k\pi-ih_k'$ $(k=1, \ldots n-1)$.

Список литературы; 1. *Марченко В. А.* Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения.— К.: Наук. думка, 1977.— 329 с.
2. *Марченко В. А., Островский И. В.* Характеристика спектра оператора Хилла.— Мат. сб., 1975, **97**, вып. 4, с. 540—606.
3. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов.— М.: Физматгиз, 1961.— 310 с.

Поступила в редколлегию 10.11.82.

УДК 517.9

Е. И. ТАРАПОВА

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА

Настоящая статья посвящена интегрированию обобщенного нелинейного уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial q(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x^2} + q(x, t)\,\beta_2 q^*(x, t)\,\beta_1 q(x, t)$$

(β_1, β_2 — произвольные самосопряженные операторы) методом, общая схема которого изложена в работах [1—3].

1. Рассмотрим кольцо K операторнозначных функций $\Gamma(x, t)$, в котором обычным образом определены операции дифференцирования по x и t.

Пусть обратимый элемент $\Gamma \in K$ удовлетворяет уравнениям

$$\varepsilon\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x^2} = \frac{\partial\Gamma}{\partial t}\cdot B, \tag{I}$$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial x} = A\Gamma B, \tag{II}$$

где A, B, ε — постоянные элементы кольца K, причем $[\varepsilon, X] = 0$ и $B^2 = I$ для всех $X \in K$.

Из уравнения (I) вытекает, что логарифмические производные $\gamma = \Gamma^{-1}\frac{\partial\Gamma}{\partial x}$ и $\gamma_1 = \Gamma^{-1}\frac{\partial\Gamma}{\partial t}$ удовлетворяют уравнению

$$\varepsilon\left(\gamma^2 + \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) = \gamma_1 B, \tag{1}$$

а из уравнения (II) нетрудно получить, что

$$\gamma^2 + \frac{\partial\gamma}{\partial x} = \gamma B\gamma B. \tag{2}$$

Далее из (1), (2) вытекают такие соотношения:

$$\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2} = \frac{\partial\gamma}{\partial x}(B\gamma B - \gamma) + \gamma B\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \gamma\frac{\partial\gamma}{\partial x},\ \frac{\partial\gamma}{\partial t} = \varepsilon\gamma B\frac{\partial\gamma}{\partial x},$$

а также, что $\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2} = -2\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial x}$.

Следовательно,

$$\varepsilon\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2} - \frac{\partial\gamma}{\partial t} = \varepsilon\left[\frac{\partial\gamma}{\partial x}(B\gamma B - \gamma) - \gamma\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right] =$$

$$= 2\varepsilon\frac{\partial\gamma}{\partial x}(B\gamma B - \gamma) = 2\varepsilon\frac{\partial\gamma}{\partial x}[B, \gamma]\,B.$$

Коммутируя это уравнение с оператором B, имеем

$$\varepsilon\left[B, \frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right] - 2\left[B, \frac{\partial\gamma}{\partial t}\right]B + 2\varepsilon B\left\{\frac{\partial\gamma}{\partial x}, B\right\}[B, \gamma] = 0. \tag{3}$$

и поскольку из (2) следует, что

$$\left\{\frac{\partial\gamma}{\partial x}, B\right\} = B[B, \gamma][B, \gamma],$$

то уравнение (3) эквивалентно такому:

$$\varepsilon\left[B, \frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right] - 2\left[B, \frac{\partial\gamma}{\partial t}\right]B + 2\varepsilon[B, \gamma]^3 = 0.$$

Обозначая $[B, \gamma] = u$, получаем уравнение

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}\cdot B + 2\varepsilon u^3 = 0. \tag{III}$$

Пусть элемент $\Gamma \in \mathrm{K}$, являющийся решением уравнений (I), (II), удовлетворяет также следующему условию:

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial x}(1-P) = \Gamma S(1-P), \tag{IV}$$

где P — постоянный проектор из кольца K, S — постоянный элемент K.

Из этого уравнения следует, что $\gamma(1-P) = S(1-P)$ и следовательно, $\partial\gamma = \partial\gamma\cdot P$. Умножая уравнение (III) слева и справа на P, по учаем с учетом последнего соотношения, что элемент $U = PuP = P[B, \gamma]P = [PBP, P\gamma P]$ удовлетворяет такому уравнению:

$$\varepsilon\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2\frac{\partial U}{\partial t}\cdot B + 2\varepsilon U^3 = 0 \tag{III''}$$

в подкольце PKP кольца K.

Таким образом, решения нелинейного уравнения (III′) в подкольце PKP можно получать из решений уравнений (I), (II), к которым присоединено условие (IV) в более широком кольце K. Чем шире кольцо K, тем больше мы получим решений нелинейного уравнения в подкольце.

Эту схему мы реализуем в кольцах матриц конечного порядка и в операторных алгебрах. Основную трудность представляет выбор оператора $P\,(P^2 = P)$ и доказательство обратимости операторов Γ в соответствующих кольцах.

2. Обозначим через $K = \mathrm{Mat}_N(K_r)$ — кольцо всех квадратных матриц N-го порядка с элементами из кольца K_r, а в качестве кольца K_r выберем алгебру матриц r-го порядка с элементами из $C^\infty(R^2)$.

Зададим оператор P так:

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 \end{pmatrix},$$

где I — единичная матрица r-го порядка. Мы будем иметь решения линейных уравнений (I), (II) в кольце K в виде матриц Вронского, т. е. матриц следующего вида:

$$W = W(f_1, f_2, \ldots, f_N) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^{N-1}}{\partial x^{N-1}} f_1 & \ldots & \ldots & f_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^{N-1}}{\partial x^{N-1}} f_N & \ldots & \ldots & f_N \end{pmatrix},$$

где $f_i(x, t)$ — матрицы r-го порядка из K_r.

Такие матрицы автоматически удовлетворяют дополнительному условию (IV), в котором

$$S = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & I \\ I & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно показать, что если матрица W обратима в K, то ее логарифмическая производная имеет такой вид:

$$\gamma = W^{-1}\frac{\partial W}{\partial x} = \begin{vmatrix} \gamma_1 & I & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ & & \ddots & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & \ddots & \\ \gamma_{N-1} & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & I \\ \gamma_N & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{vmatrix},$$

причем элементы $\gamma_i(x, t)$ находятся из системы уравнений

$$\frac{\partial^N}{\partial x^N}(f_i(x, t)) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^{N-j}}{\partial x^{N-j}}(f_i(x, t))\,\gamma_j(x, t) \tag{4}$$

и

$$P\gamma P = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Решая систему (4) относительно $\gamma_1(x, t)$, получаем (с учетом свойств матриц Вронского), что

$$\gamma_1 = (\operatorname{Det} W)^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{Det} W).$$

Выберем в уравнениях (I), (II) матрицу B так:

$$B = \operatorname{diag}(\underbrace{b, \ldots, b}_{N}),$$

$$b = \operatorname{diag}(\underbrace{I, I, \ldots, I}_{r_1}, \underbrace{-I, -I, \ldots, -I}_{r_2}) \quad (r_1 + r_2 = r).$$

Тогда, если матрица W обратима и удовлетворяет уравнениям (I), (II), (IV), то матрица $U = U(x, t) = [\gamma_1, b]$ является регулярным решением уравнения

$$-2i\frac{\partial U}{\partial t}\cdot b = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2U^3 \ (\varepsilon = i). \qquad (\mathrm{III}'')$$

Выбирая в качестве A диагональную матрицу $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_N)$, получаем, что уравнения (I), (II) распадаются на систему линейных уравнений относительно матриц $f_s = f_s(x, t)$. Решения этой системы имеют такой вид:

$$f_s = f_s q_1 + f_s q_2 = \exp(a_s x + i a_s^2 t)\, c_s^{(1)} q_1 + \exp(-(a_s x + \\ + i a_s^2 t))\, c_s^{(2)} q_2, \qquad (5)$$

где $c_s^{(1)}$, $c_s^{(2)}$ — произвольные постоянные матрицы K_r, $q_1 = 1/2\,(I + b)$ $q_2 = 1/2\,(I - b)$. Можно доказать, что если выбрать $a_s = \lambda_s q_1 - \bar{\lambda}_s q_2$, $c_s^{(1)} = \exp(\alpha_s)\, q_1 - \exp(-\alpha_s)\, q_2 c_s^* q_1$, $c_s^{(2)} = \exp(\bar{\alpha}_s)\, q_2 + \exp(-\alpha_s)\, q_1 c_s q_2$, где α_s, λ_s ($\operatorname{Re}\lambda_s > 0$) — произвольные комплексные числа; c_s — произвольные постоянные матрицы r-го порядка, то матрицы Вронского $W(f_1, f_2, \ldots, f_N)$, в которых $f_s(x, t)$ определены формулой (5), обратимы и удовлетворяют уравнениям (I), (II), (IV). Кроме того, при таком выборе c_s и a_s, $U(x, t) = U^*(x, t)$. Из этого равенства и вида матрицы b следует, что

$$U(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & V(x, t) \\ V^*(x, t) & 0 \end{pmatrix},$$

где матрица-функция $V(x, t)$ имеет r_1 строк и r_2 столбцов. Подставляя ее в уравнения (III″), находим, что

$$-2i\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} + 2V(x, t)\, V^*(x, t)\, V(x, t).$$

Обозначив через $\vec{y}_s$ r_2-мерный вектор, образованный элементами s-ой строки матрицы $V(x, t)$, мы можем записать последнее уравнение в следующей эквивалентной форме:

$$-2i\frac{\partial \vec{y}_s}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{y}_s}{\partial x^2} + 2\sum_{j=1}^{r_1} (\vec{y}_s, \vec{y}_j)\, \vec{y}_j$$

относительно r_2-мерных вектор-функций $\vec{y}_s = \vec{y}_s(x, t)$ $(1 \leqslant s \leqslant r_1)$.

При $N = 1$ получаем аналог односолитонного решения уравнения (III″)

$$V(x, t) = 2(\lambda + \bar{\lambda})\, e^{-2\varphi(x, t)} C\,(I + e^{-4\operatorname{Re}\varphi(x, t)} CC^*)^{-1},$$

где λ — произвольное число из открытой правой полуплоскости, $\varphi(x, t) = \lambda x + i\lambda^2 t + \alpha$; C — произвольная постоянная матрица с r_1 строками и r_2 столбцами.

3. Пусть E — произвольное банахово пространство и $L(E)$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов, отображающих E в себя. Выберем в качестве кольца $K = M_{L(E)}(C^\infty(R^2))$ алгебру операторнозначных функций $f(x, t)$, принимающих значения из $L(E)$ и бесконечно дифференцируемых по x и t.

Пусть оператор $\Gamma \in K$ удовлетворяет системе уравнений (I), (II), в которых $A, B \in L(E)$, $B^2 = I$ и ε — число. Поскольку операторы $Q_1 = \frac{I+B}{2}$ и $Q_2 = \frac{I-B}{2}$ являются проекторам $(Q_i^2 = Q_i)$, то уравнения (I), (II) здесь эквивалентны таким:

$$(-1)^{i+1}\varepsilon \frac{\partial^2 (\Gamma Q_i)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial t}(\Gamma Q_i), \tag{I'}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Gamma Q_i) = (-1)^{i+1} A (\Gamma Q_i). \tag{II'}$$

Решения этих уравнений имеют такой вид: $\Gamma Q_i = \exp(Ax + \varepsilon A^2 t) \times \times CQ_1 + \exp(-(Ax + \varepsilon A^2 t))CQ_2$. Следовательно, общим решением уравнений (I), (II) являются операторы $\Gamma(x, t) = \exp(Ax + \varepsilon A^2 t) \times \times CQ_1 + \exp(-(Ax + \varepsilon A^2 t))CQ_2$, где C — произвольный оператор из $L(E)$.

Разложим пространство E в прямую сумму $E = E_1 \oplus E_2$ его подпространств $E_1 = Q_1 E$, $E_2 = Q_2 E$ и положим

$$Q_1 = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix},$$

где I_i — единичный оператор в пространстве E_i. Пусть, кроме этого

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix},$$

где $a_1 \in L(E_1)$, $a_2 \in L(E_2)$.
Тогда

$$\Gamma(x, t) = \begin{pmatrix} \exp(a_1 x + \varepsilon a_1^2 t) & \exp(-(a_1 x + \varepsilon a_1^2 t))\, C_{12} \\ \exp(a_2 x + \varepsilon a_2^2 t)\, C_{21} & \exp(-(a_2 x + \varepsilon a_2^2 t)) \end{pmatrix},$$

мы положили

$$C = \begin{pmatrix} I_1 & C_{12} \\ C_{21} & I_2 \end{pmatrix}$$

или $\Gamma(x, t) = \mathscr{E} + \mathscr{E}^{-1} C = \mathscr{E} T$, $T = T(x, t) = I + \mathscr{E}^{-2} C$, где

$$\mathscr{E} = \begin{pmatrix} \exp(a_1 x + \varepsilon a_1^2 t) & 0 \\ 0 & \exp(-(a_2 x + \varepsilon a_2^2 t)) \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} \\ C_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что так как оператор $P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$ $(P_i^2 = P_i)$ в дополнительном условии (IV) перестановочен с B, то это условие будет

выполнено, если $S=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{pmatrix}$ и операторы C_{ij} удовлетворяют таким уравнениям: $a_1C_{12}-C_{12}a_2=r_{12}P_2$, $a_2C_{21}-C_{21}a_1=r_{21}P_1$, где r_{ij} — произвольные операторы, отображающие E_j в E_i. Решения таких уравнений находятся по формулам М. Г. Крейна [4]. Для того чтобы двигаться дальше, необходимо надлежащим образом выбрать пространство E. Выберем в качестве E гильбертово пространство $L_2(E_0,\ d\mu)$ вектор-функций $\vec{f}(z)$ со значениями из E_0 — сепарабельного гильбертова пространства со скалярным произведением $(\cdot,\ \cdot)_0$. Определим скалярное произведение в E так: $(\vec{f},\vec{g})_\mu=\mu^{-1}\int\limits_M(\vec{f}(z),\vec{g}(z))_0 d\mu(z)$ $(\mu=\int\limits_M d\mu(z))$, где $d\mu(z)$ — конечная неотрицательная мера с компактным носителем M. Пространство E_0 очевидным образом отождествляется с подпространством пространства E, состоящим из постоянных вектор-функций, а оператор $P(\vec{f})=\mu^{-1}\int\limits_M\vec{f}(z)\,d\mu(z)$ является ортопроектором на это подпространство.

Пусть в уравнениях (I′), (II′) операторы a_1, a_2 есть операторы умножения на функции $i(z+i\rho)$, $i\overline{(z+i\rho)}$, где $\rho>0$. Если носитель M меры $d\mu(z)$ компактен лежит в замкнутой верхней полуплоскости, то эти операторы ограничены и их спектры лежат в полуплоскостях $\operatorname{Re}z\leqslant-\rho$, $\operatorname{Re}z\geqslant\rho$. Поэтому можно применить формулы М. Г. Крейна, которые после вычисления соответствующих контурных интегралов принимают такой вид:

$$C_{12}=\mu^{-1}\hat{r}_{12}(z)\Lambda_2^{(\rho)}q_2,\quad C_{21}=\mu^{-1}\hat{r}_{21}(z)\Lambda_1^{(\rho)}q_1$$

$$\Lambda_2^{(\rho)}(\vec{f})=\int\limits_M\frac{\vec{f}(\xi)}{i(z-\xi+2i\rho)}d\mu(\xi),\quad \Lambda_1^{(\rho)}(\vec{f})=\int\limits_M\frac{\vec{f}(\xi)}{i(z-\bar{\xi}-2i\rho)}d\mu$$

(через $\hat{r}_{ij}(z)$ будем обозначать операторнозначные функции). Таким образом, справедлива

Лемма. *Пусть* $E=L_2(E_0,\ d\mu)$, *причем носитель* M *меры* $d\mu$ *компактен и лежит в замкнутой верхней полуплоскости. Тогда операторы*

$$\Gamma^{(\rho)}=\Gamma^{(\rho)}(x,t)=\mathscr{E}_\rho+\mathscr{E}_\rho^{-1}\mu^{-1}\hat{r}(z)\Lambda^{(\rho)}$$

$$\hat{r}(z)=\begin{pmatrix}0 & \hat{r}_{12}(z)\\ \hat{r}_{21}(z) & 0\end{pmatrix},\quad \Lambda^{(\rho)}=\begin{pmatrix}\Lambda_1^{(\rho)} & 0\\ 0 & \Lambda_2^{(\rho)}\end{pmatrix},\quad \mathscr{E}_\rho=\begin{pmatrix}e_1^{(\rho)} & 0\\ 0 & e_2^{(\rho)}\end{pmatrix}$$

удовлетворяют уравнениям (I′), (II′) и дополнительному условию (IV), если

$$e_1^{(\rho)}=\exp\{i(z+i\rho)x-\varepsilon(z+i\rho)^2t\};$$
$$e_2^{(\rho)}=\exp\{-i\overline{(z+i\rho)}x+\varepsilon\overline{(z+i\rho)^2}t\}.$$

Далее, необходимо выяснить, когда оператор $\Gamma(x, t)$ обратим в алгебре $M_{L(E)}(C^\infty(R^2))$. Ясно, что при $\rho > 0$ оператор Γ^{-1} существует не при всех значениях переменных x и t. Следовательно, оставляя $\rho > 0$ и переходя к логарифмическим производным с последующим проектированием, мы будем получать решения нелинейного уравнения с особенностями. Чтобы избавиться от этих особенностей, нужно в полученных формулах сделать предельный переход при $\rho \to +0$. Выясним, какими свойствами должна обладать мера $d\mu(z)$, чтобы такой предельный переход можно было осуществить.

Обозначим через $H^2(\operatorname{Im} z \geqslant 0)$ пространство Харди аналитических в верхней полуплоскости функций $x(z)$ вида $x(z) = \int\limits_0^\infty \tilde{x}(t) \times$ $\times e^{itz} dt$ $(\tilde{x}(t) \in L_2)0, \infty))$ со скалярным произведением

$$(x(z),\ y(z))_{H^2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(z)\,\overline{y(z)}\,dz = \int\limits_0^\infty \tilde{x}(t)\,\overline{\tilde{y}(t)}\,dt$$

и через $\overline{H}^2(Im\, z \geqslant 0)$ пространство функций вида $f(z) = \overline{x(z)}$, где $x(z) \in H^2(\operatorname{Im} z \geqslant 0)$ со скалярным произведением $(f(z), g(z))_{\overline{H^2}} =$ $= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z)\,\overline{g(z)}\,dz$. Оказывается, что если

1) носитель M меры $d\mu(z)$ лежит в полуплоскости $Imz \geqslant 0$,
2) на множестве $M_0 = M \cap \{z : Imz = 0\}$ $d\mu(z) = (2\pi)^{-1}dz$,
3) на множестве $M_1 = M \cap \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ $\int\limits_{M_1} (I\mathrm{m}\, z)^{-1} d\mu(z) = c <$ $< \infty$, то $H^2 \subset L_2(d\mu)$, $\overline{H^2} \subset L_2(d\mu)$ и операторы $\Lambda_1^{(\rho)}$, $\Lambda_2^{(\rho)}$ при $\rho \to +0$ сильно сходятся к операторам

$$\Lambda_1(f) = \int\limits_M \frac{f(\xi)}{i\,\overline{(z - \xi - i0)}}\,d\mu(\xi),\quad \Lambda_2(f) = \int\limits_M \frac{f(\xi)}{i\,(z - \bar{\xi} + i0)}\,d\mu(\xi),$$

отображающим $L_2(d\mu)$ соответственно в $\overline{H}^2$ и H^2. Далее, имеет место

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия.*

1. *Носитель M меры $d\mu(z)$ компактен и состоит из множества $M_0 \subset \{z : I\mathrm{m}\, z = 0\}$ и множества $M_1 \subset \{z : I\mathrm{m}\, z > 0\}$, причем на M_0; $d\mu(z) = (2\pi)^{-1}dz$, а на $M_1 \int\limits_{M_1} (I\mathrm{m}\, z)^{-1} d\mu(z) < \infty$.*

2. *Непрерывная (по норме) операторнозначная функция $\hat{r}(z)$ при каждом $z \in M$ является компактным оператором в пространстве E_0, $\hat{r}(x) = 0$ при $x \in (-\infty, \infty)/M_0$ и либо $\hat{r}^*(z) = \hat{r}(z)$, либо $M_1 = \varnothing$*

$$\inf_{x \in M_0} \| r^*(x) - r(x) \|_{E_0} < r;\ \sup_{x \in M_0} \| r^*(x) - r(x) \|_{E_0} \leqslant r.$$

Тогда операторы $\Gamma(x, t) = \mathscr{E} + \mathscr{E}^{-1}\hat{r}(z)\Lambda$

$$\hat{r}(z) = \begin{pmatrix} 0 & \mu^{-1}r_{12}(z) \\ \mu^{-1}r_{21}(z) & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{E} = \begin{pmatrix} e(z) & 0 \\ 0 & \overline{e(z)} \end{pmatrix},$$

где $e(z) = \exp i(zx - z^2t)$, *принадлежат алгебре* $M_{L(E_0)}(C^\infty(R^2))$ *и обратимы в ней. Кроме того, они удовлетворяют уравнениям*

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial x} = \hat{z}\Gamma b, \ i\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x^2} = \frac{\partial\Gamma}{\partial t}\cdot b \ \frac{\partial\Gamma}{\partial x}(I - P) = \Gamma\hat{z}(I-P), \ \hat{z} = \begin{pmatrix} iz & 0 \\ 0 & \overline{iz} \end{pmatrix}.$$

Получим формулу для решения нелинейного уравнения. Если выполнены условия теоремы, то оператор $U = U(x, t) = P[\gamma, b]P$ принадлежит алгебре $M_{L(E_0)}(C^\infty(R^2))$ и удовлетворяет такому нелинейному уравнению

$$-i\frac{\partial U}{\partial t}\cdot b = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + U^3.$$

Из формулы (7) следует, что $\frac{\partial\Gamma}{\partial x}\mathscr{E}\hat{z} - \mathscr{E}^{-1}\hat{r}(z)\Lambda$; $\hat{z}\hat{r}(z) = r(z)\hat{\hat{z}}$, $-\hat{\hat{z}}\Lambda = \Lambda\hat{z} + \mu bP$, $\hat{z} = \begin{pmatrix} iz & 0 \\ 0 & \overline{iz} \end{pmatrix}$.

Поэтому

$\frac{\partial\Gamma}{\partial x} = \Gamma\hat{z} + \mu\mathscr{E}^{-1}\hat{r}(z)bP$, $\gamma = \hat{z} + \mu\Gamma^{-1}\mathscr{E}^{-1}\hat{r}(z)bP$. Обозначая далее $T = I + \hat{\rho}\Lambda$, где $\hat{\rho} = \mathscr{E}^{-2}\hat{r}$, получим $\Gamma = \mathscr{E}T$, $\Gamma^{-1} = T^{-1}\mathscr{E}^{-1}$, следовательно, $\gamma = \hat{z} + \mu T^{-1}\hat{\rho}bP$. Нетрудно показать, что $T^{-1}\hat{\rho} = \hat{\rho}\tilde{T}^{-1}$, где $\tilde{T} = I + \Lambda\hat{\rho}$, тогда $\gamma = \hat{z} + \mu\hat{\rho}\tilde{T}^{-1}bP$ и $U = \mu P \times [\hat{\rho}\tilde{T}^{-1}, b] bP$ (8). Выберем операторы $\hat{r}(z) = \begin{pmatrix} 0 & \mu^{-1}\hat{r}_{12}(z) \\ \mu^{-1}\hat{r}_{21}(z) & 0 \end{pmatrix}$ так, чтобы выполнялось равенство $\hat{r}_{21}(z) = \beta_2\hat{r}_{12}{}^*(z)\beta_1$ **(9)**, где β_2, β_1 — произвольные самосопряженные операторы. Это соотношение, очевидно, влечет за собой аналогичное соотношение для операторов $\hat{\rho}_{12}(z)$, $\hat{\rho}_{21}(z)$, $\hat{\rho}_{21}(z) = \beta_2\hat{\rho}_{12}{}^*(z)\beta_1$.

Из последнего равенства и формулы (8) нетрудно получить

$$U = \begin{pmatrix} 0 & q \\ \beta_2 q^*\beta_1 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда следует, что оператор $q = q(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$i\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + q\beta_2 q^*\beta_1 q, \tag{10}$$

являющемуся обобщением нелинейного уравнения Шредингера. Выясним, какие уравнения надо решить, чтобы найти оператор U. Можно показать, что оператор U действует в пространстве E_0 по таким правилам:

$$U(\vec{C}) = 2\lim_{|z|\to\infty}\{\overline{iz\vec{x}_1(z, \vec{c}_2)} - iz\vec{x}_2(z, \vec{c}_1)\},$$

где $\vec{x}_i(z, \vec{c}_i)$ — решения следующих систем:

$$\vec{x}_1(z, \vec{c}_1) + \int\limits_M \frac{\hat{\rho}_{12}(\xi)\,\vec{x}_2(\xi, \vec{c}_1)}{i(\bar{z} - \xi + i0)}\, d\mu(\xi) = \vec{c}_1, \tag{11}$$

$$\vec{x}_2(z, \vec{c}_1) + \int\limits_M \frac{\hat{\rho}_{21}(\xi)\,\vec{x}_1(\xi, \vec{c}_1)}{i(z - \bar{\xi} - i0)}\, d\mu(\xi) = 0;$$

$$\vec{x}_1(z, \vec{c}_2) + \int\limits_M \frac{\hat{\rho}_{12}(\xi)\,\vec{x}_2(\xi, \vec{c}_2)}{i(z - \xi + i0)}\, d\mu(\xi) = 0, \tag{11'}$$

$$\vec{x}_2(z, \vec{c}_2) + \int\limits_M \frac{\hat{\rho}_{21}(\xi)\,\vec{x}_1(\xi, \vec{c}_1)}{i(z - \bar{\xi} - i\theta)}\, d\mu(\xi) = \vec{c}_2.$$

Если пространство E_0 двумерно, то матрица оператора U имеет вид $U = \begin{pmatrix} 0 & U_{12} \\ U_{12} & 0 \end{pmatrix}$, где $U_{12} = 2 \lim\limits_{|z| \to \infty} \bar{i} z y_1(z)$, $U_{21} = -2 \lim\limits_{|z| \to \infty} i z x_2(z)$ и функции $x_i(z), y_i(z)$ находятся из уравнений (11), (11′), в которых $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$ нужно заменить на 1. Тогда условие (9) примет вид: $r_{12}(z) = (-1)^m r_{21}(r)(z) = r_m(z)$ и следовательно, $U_{21} = (-1)^m \overline{U_{12}}$, так что матрица U имеет такую структуру:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & q \\ (-1)^m \bar{q} & 0 \end{pmatrix},$$

где $q = (-1)^{m-1} \cdot 2 \cdot \lim\limits_{|z| \to \infty} \overline{i z x_2(z)}$ и функции $x_2(z)$ находятся из системы

$$x_1(z) + \int\limits_M \frac{e(\xi)\, r_m(\xi)\, x_2(\xi)}{i(\bar{z} - \xi + i0)}\, d\mu(\xi) = 1, \tag{12}$$

$$x_2(z) + (-1)^m \int\limits_M \frac{\overline{e(\xi)\, r_m(\xi)}\, x_1(\xi)}{i(z - \bar{\xi}\, i0)}\, d\mu(\xi) = 0.$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема. *Пусть выполнены условия:*

1. Мера $d\mu(z)$ сосредоточена в замкнутой верхней полуплоскости и $d\mu(x) = (2\pi)^{-1}\, dx$, $(-\infty < x < \infty)$ $\int\limits_{\operatorname{Im} z > 0} (\operatorname{Im} z)^{-1} d\mu(z) < \infty$.

2. Функция $r_2(z)$ непрерывна и финитна.

3. Функция $r_1(z)$ равна нулю при $\operatorname{Im} z > 0$, непрерывна и финитна на вещественной оси и $\sup\limits_{-\infty < x < \infty} |r_1(x)| \leqslant 1$.

Тогда система уравнений (12) однозначно разрешима и функции $q = q(m, x, t) = (-1)^{m-1} \cdot 2 \cdot \lim\limits_{|z| \to \infty} i z x_2(z)$ являются регулярными решениями следующего уравнения:

$$i \frac{\partial q(m)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q(m)}{\partial x^2} + (-1)^m |q(m)|^2 q(m).$$

Список литературы: *1. Марченко В. А., Тарапова Е. И.* Новый подход к задаче интегрирования некоторых нелинейных уравнений. — Усп. мат. наук, 1981, 36, № 4, с. 227—228. 2. *Тарапова Е. И.* N-солитонные решения одной нелинейной системы уравнений. — Теория функций, функцион. анализ и их приложения, 1981, вып. 36, с. 103—111. 3. *Тарапова Е. И.* Об интегрировании N-волновой задачи. — Теория функций, функцион. анализ и их приложения, 1982, вып. 38, с. 103—111. 4. *Крейн М. Г.* Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — К.: Наука, 1964. — 186 с.

Поступила в редколлегию 11.11.82.

УДК 517.958

А. Г. ЧЕРНЯВСКИЙ

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ

Обратную задачу теории дифракции естественно охарактеризовать как задачу определения поверхности рассеивающего тела по данным о рассеянии на этом теле известных полей. В работах [1—3] эта задача решалась, исходя из представлений для рассеянных полей, полученных в приближении физической оптики. Первое исследование единственности решения обратной задачи дифракции, в котором не использовалось высокочастотное приближение, было проведено в работе [4].

Как и в работе [4], будем рассматривать скалярную задачу с краевым условием Дирихле. Пусть G — фиксированная ограниченная область в R^3 (во всех формулируемых ниже утверждениях размерность пространства не существенна), и $D \subset \subset G$ есть некоторая ее односвязная подобласть с кусочно-гладкой границей S. Пусть в области G задана функция $v(x)$, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta v(x) + k^2 v(x) = 0, \quad x \in G, \tag{1}$$

которая имеет смысл внешнего поля в отсутствие рассеивателя D. Рассеянное поле $u(x)$ во внешности области D удовлетворяет краевой задаче

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0, \quad x \in R^3 \setminus D; \quad u(x) = -v(x), \quad x \in S \tag{2}$$

и условиям излучения. Как известно, справедливо представление

$$u(x) = e^{ik|x|} A(\tau)/|x| + o(|x|^{-1}), \quad |x| \to \infty, \tag{3}$$

в котором $|x|$ — длина вектора x, $\tau = x/|x|$, $|\tau| = 1$.

В работе [4] было показано, что, если для фиксированных функций $v(x)$ и $A(\tau)$ существует область D, во внешности которой решение $u(x)$ задачи (2) допускает представление (3), то такая область определяется, вообще говоря, неоднозначно, и в G может существовать конечное число таких областей. Для однозначного восстановления области D в [4] была предложена методика, основанная на измерении диаграммы рассеяния $A(\tau)$ для

различных частот k. В [4] было показано, что для любого частотного интервала $I = [k_1, k_2]$ существует такая зависящая только от G и I константа M, что по любому набору внешних полей $\{v_i\}_1^M$ и соответствующих диаграмм $\{A_i\}_1^M$, измеренных на любых M различных частотах k_i из интервала I, область D определяется однозначно.

В настоящей заметке рассматривается вопрос о единственности восстановления области D по результатам измерений при фиксированном k, что часто требуется в прикладных задачах. Отметим, что в заметке использована найденная в [4] связь единственности определения D с свойствами спектра внутренних краевых задач для оператора Лапласа.

Теорема. Существует зависящая только от фиксированного k и области G константа m, обладающая следующим свойством. Для любых m линейно независимых функций $v_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, удовлетворяющих уравнению (1), и функций $A_i(\tau)$, $i = 1, \ldots, m$, $|\tau| = 1$, существует не более одной области D, во внешности которой решение $u = u_i$ краевой задачи (2) с $v = v_i$ допускает асимптотическое представление (3) с диаграммой $A = A_i$, $i=1,\ldots,m$.

Доказательство. Для произвольной подобласти $G' \subset G$ с кусочно-гладкой границей обозначим через $\nu(k, G')$ кратность точки спектра $\lambda = -k^2$ оператора Лапласа в области G' с нулевым условием на $\partial G'$ (возможно, $\nu(k, G') = 0$). Из минимаксного принципа для собственных чисел оператора Лапласа следует (см.[5]), что

$$\mu(k, G) = \sup_{G' \subset G} \nu(k, G') < \infty. \tag{4}$$

В качестве требуемой константы возьмем

$$m = m(k, G) = \mu(k, G) + 1 \tag{5}$$

и покажем, что определенного таким образом числа наборов исходных данных $\{v_i\}_1^m$, $\{A_i\}_1^m$ достаточно для однозначного восстановления области D.

Действительно, предположим, что кроме области D имеется другая область D_1 с кусочно-гладкой границей S_1 и решения $\tilde{u}_i$ краевых задач

$\Delta\tilde{u}_i(x) + k^2 u_i(x) = 0,\ x \in R^3 \setminus D;\ \tilde{u}_i(x) = -v_i(x),\ x \in S_1,\ i=1,\ldots,m,$
удовлетворяющие условиям излучения, допускают представления (3) с $A = A_i$, $i = 1, \ldots, m$. Не ограничивая общности, предположим, что $D^* = D_1 \setminus D \neq \varnothing$. Множество D^* есть объединение непересекающихся областей D_l^*. Выберем одну такую область. Повторяя рассуждение работы [4], получим, что в области D_l^* функции $w_i(x) = u_i(x) + v_i(x)$ удовлетворяют соотношениям $\Delta w_i(x) + k^2 w_i(x) = 0,\ x \in G \setminus D;\ w_i(x) = 0,\ x \in \partial D_l^*,\ i = 1, \ldots, m$. Таким образом, $w_i(x)$ являются собственными функциями оператора Лапласа в области D_l^* с нулевым условием на ее границе, отвечаю-

щими собственному значению $\lambda = -k^2$. Такие собственные функции образуют конечномерное пространство [5]. Пусть $\{f_l(x)\}_1^r$ — базис этого пространства. Тогда справедливы представления

$$u_i(x) = -v_i(x) + \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} f_j(x),\ x \in D_i^*,\ i = 1,\ \ldots,\ m. \tag{6}$$

Из формул (4), (5) следует, что $r < m$, поэтому ранг матрицы α_{ij} меньше m, и существуют такие числа $\{\gamma_i\}_1^m$, что

$$\sum_{i=1}^{m} \gamma_i \alpha_{ij} = 0,\ j = 1, \ldots, r. \tag{7}$$

Из соотношений (6), (7), пользуясь аналитичностью функций v_i, u_i в области $G \setminus D$ [6], получим

$$\sum_{i=1}^{m} \gamma_i u_i(x) = -\sum_{i=1}^{m} \gamma_i v_i(x),\ x \in G \setminus D. \tag{8}$$

Рассмотрим функцию

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i u_i(x).$$

Эта функция в области $R^3 \setminus D$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца и условию излучения. Из равенства (8), учитывая уравнение (1) для функций v_i, получим, что функция $F(x)$ продолжается до функции, удовлетворяющей в R^3 уравнению $\Delta F + k^2 F = 0$ и условию излучения на бесконечности. Поэтому $F \equiv 0$ [6], и из равенств (8) получим, что функции $v_i(x)$ линейно зависимы, что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

В задачах дифракции в качестве функций $v_i(x)$ обычно рассматривают плоские волны:

$$v_i(x) = \exp(ik\langle \sigma_i, x\rangle),\ |\sigma_i| = 1$$

с различными направлениями σ_i волнового вектора, или сферические волны:

$$v_i(x) = \exp(ik|x - x_i|)/|x - x_i|$$

при различных положениях x_i точечного источника, $x_i \bar{\in} G$.

Список литературы: 1. *Рамм А. Г.* Определение формы отражающего тела по характеристике рассеяния. — Изв. вузов. Радиофизика, 1970, **13**, № 5, с. 727—731. 2. *Аниконов Ю. Е., Марчук А. Г.* К обратной задаче дифракции.— В кн.: Математические проблемы геофизики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1975, вып. 6, ч. 2, с. 54—62. 3. *Левис Р.* Приближение физической оптики в обратных задачах дифракции. — Зарубежная радиоэлектроника, 1970, № 2, с. 100—112. 4. *Свешников А. Г., Еремин Ю. А., Чивилев А. В.* Исследование единственности решения одной обратной задачи теории дифракции. — Диф. уравнения, 1979, **15**, № 12, с. 2205—2209. 5. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. — М.; Л.: Гостехиздат, 1951, **1**. — 476 с. 6. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964. — 830 с.

Поступила в редколлегию 01.12.82.

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Выпуск 42

Редактор *Л. Ф. Кизилова*
Художественный редактор *Т. П. Воробиенко*
Технический редактор *Г. П. Александрова*
Корректоры *В. Л. Светличная, Л. А. Федоренко*

Информ. бланк № 8346

Сдано в набор 04.08.83. Подп. в печать 02.12.83. БЦ 09486. Формат 60×90/16. Бумага типогр. № 3. Лит. гарн. Выс. печать. 8,5 печ. л. 8,75 кр.-отт. 10 уч.-изд. л. Тираж 1000 экз. Изд. № 1192. Зак. 3-307. Цена 1 р. 40 к.

Издательство при Харьковском государственном университете издательского объединения «Вища школа»
310003. Харьков, 3, ул. Университетская, 16

Отпечатано с матриц книжной фабрики им. М. В. Фрунзе в Харьковской городской типографии № 16
310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16 Зак. 109.

РЕФЕРАТЫ

УДК 517.5

Эрмитово-положительные функции и позитивные функционалы. II. Артеменко А. П. — Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1984, вып. 42, с. 3—21.

Основной результат составляет следующая теорема:

Пусть $\varphi(x)$ — непрерывная э. п. функция неоднозначно продолжаемая из интервала (-A, -a); $y(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ — ограниченная непрерывная функция, $\Sigma\psi$ — совокупность неубывающих функций, задающих представления $\psi(x)$ в виде интеграла Фурье-Стильтьеса. Если интегралы $\int\limits_{-\infty}^{\infty} y(t)\,dr(t)$ совпадают для всех $r \in \Sigma\psi$, то существует целая функция степени не выше a, совпадающая на вещественной оси с $y(t)$.

Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.946

Осреднение эллиптических систем дифференциальных уравнений в областях с пустотами. Чудинович И. Ю. — Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1984, вып. 42, с. 21—26.

Предложен способ осреднения самосопряженных краевых задач для эллиптических систем уравнений произвольного порядка в областях с большим числом мелких пустот.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 517.535.4

О сложении нижних индикаторов целых функций. Гинер В. Б., Подошев Л. Р., Содин М. Л. — Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1984, вып. 42, с. 27—36.

Пусть $A(\rho)$ — множество целых функций нормального типа нецелого порядка $\rho > 0$ и при фиксированной $f \in A(\rho)$ выполняется условие

$$\begin{aligned} &\underline{h}_{fg}(\psi) = \underline{h}_f(\psi) + \underline{h}_g(\psi), \ \forall g \in A(\rho), \\ &\forall e^{i\psi} \in F \subset \{|z| = 1\}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Показано, что если E неразрежено в точке $e^{i\psi}$, то f является функцией вполне регулярного роста (в. р. р.) на луче $\{\arg z = \psi\}$.

Если E разрежено во всех точках единичной окружности, приводится пример $f \in A(\rho)$, для которой выполняется (1), но f не является функцией в. р. р. ни на каком луче.

Библиогр.: 10 назв.

УДК 517.53

О множествах регулярного роста целых функций. III. Гришин А. Ф.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1984, вып. 42, с 37—43.

Работа является продолжением статей, опубликованных в вып. 40, 41 данного сборника.

Библиогр.: 3 назв.

УДК 513.77

Теорема о многогранных конусах. Гурарий В. И., Левенталь В. И.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1984, вып. 42, с. 43—46.

Установлен критерий того, что данный вектор х единичной длины в нормированном пространстве принадлежит конической оболочке фиксированной, системы S векторов единичной сферы. С помощью этого критерия приводится простое доказательство плоского варианта теоремы Борсука.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.54

Индефинитная метрика в интерполяционной проблеме Шура для аналитических функций. IV. Дубовой В. К. — Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1984, вып. 42, с. 46—57.

В статье методами j — теории решается вырожденная проблема Шура. Множество решений описывается при помощи элементарного кратного множителя неполного ранга.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 517.5

К теории целых функций класса Картрайт. Кацнельсон В. Э. — Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1984, вып. 42, с. 57—62.

Целая функция $C(z)$ называется гребенчатой, если она представима в виде $C(z) = \cos\theta(z)$, где $\theta(z)$ — функция, конформно отображающая полуплоскость $\mathrm{Im} z > 0$ на полуплоскость с разрезами $\mathrm{Re}\, z = k\pi$, $0 \leqslant \mathrm{Im} z \leqslant h_k$, где $0 \leqslant h_k < \infty$.

Доказано, что всякая вещественная целая функция $f(z)$ экспоненциального типа, удовлетворяющая условию $\int_{-\infty}^{\infty} \ln + |f(x)|$ может быть представлена в виде $f(z) = C_1(z) + C_2(z)$, где C_1, C_2 — гребенчатые целые функции.

Библиогр.: 9 назв.

УДК 513.88

О границе Шилова в симплексе Шоке. Кесельман Д. Г. — Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1984, вып. 42, с. 62—67.

Показано, что в метризуемом S каждая точка из $\overline{E(S)}$ обладает регулярной последовательностью, которую можно выбрать из произвольного плотного в S подмножества Д. В случае, когда Д выпукло, доказано, что $(\forall x \in S)$ и вероятностной меры ν, сосредоточенной на $E(S)$ и представляющей x существует последовательность $\{x_n\} \subset$ Д, которая сходится к x и $\mu_{x_n} \xrightarrow{\text{слабо}} \nu$.

Библиогр.: 3 назв.

УДК 503.88

О произведении одномерных сингулярных интегральных операторов. Лифанов И. К. — Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1984, вып. 42, с. 67—71.

Для широкого класса характеристических сингулярных интегральных уравнений второго рода с двукратными интегралами типа Коши найдены решения в замкнутой форме.

Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.53

Исследование устойчивости динамики рациональных функций. Любич М. Ю.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1984, вып. 42, с. 72—91.

Рассматривается произвольное многопараметрическое семейство рациональных функций комплексного переменного, голоморфно зависящее от параметров. Рассмотрено однопараметрическое семейство $f_w(z) = 1 + wz^{-2}$. Показано, что в этом семействе для типичной в категорном смысле неустойчивой функции f_w множество $P(f_w)$ совпадает со всей сферой. При этом критические точки 0, ∞ движутся по сфере топологически транзитивно.

Библиогр.: 14 назв.

УДК 517.982

О структуре подпространств пространств $\Lambda_p(\mu)$. Новиков С. Я., Семенов Е. М., Токарев Е. В. — Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1984, вып. 42, с. 91—97.

Изложены результаты, анонсированные в статье [1]. Изложение ведется для более общего случая пространств $\Lambda_p(\psi, \mu)$ измеримых функций на пространстве (T, Σ, μ) с положительной вероятностной мерой.

Библиогр.: 9 назв.

УДК 513.88

О свойствах раствора и связанных с ним характеристик близости банаховых пространств. Островский М. И. — Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1984, вып. 42, с. 97—107.

Исследуются свойства характеристик близости банаховых пространств и доказывается, что они разделяют пространства различной структуры (рефлексивные и нерефлексивные, суперрефлексивные и не суперрефлексивные, B — выпуклые и не B — выпуклые). Библиогр.: 9 назв.

УДК 517.984

Обратная задача для периодической матрицы Якоби. Перколаб Л. В. — Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1984, вып. 42, с. 107—121.

Найдены необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять последовательность сегментов для того, чтобы она была спектром некоторой якобиевой матрицы, и дан способ восстановления этой матрицы

Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.9

Интегрирование обобщенных нелинейных уравнений Шредингера. Тарапова Е. И. — Теория функций, функциональный анализ и их приложения 1984, вып. 42, с. 122—131.

Рассматривается уравнение $i\ \dfrac{\partial q}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\ \dfrac{\partial^2 q}{\partial x^2} + q\beta_2\, q^* \beta_1 q,$

где $q = q(x, t)$ — операторнозначная функция со значениями в алгебре ограниченных операторов, β_1, β_2 — произвольные постоянные самосопряженные операторы.

Методом, изложенным в [1—3], найдены решения этого уравнения.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.958

О единственности решения одной обратной задачи теории дифракции. Чернявский А. Г. — Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1984, вып. 42, с. 131—133.

Рассматривается скалярная задача Дирихле для уравнения Гельмгольца во внешности неизвестной ограниченной области D с кусочно-гладкой границей при фиксированном волновом числе k. Предполагается известной некоторая ограниченная область $G \supset D$. Библиогр.: 6 назв.