УДК 514.43

Л. А. САХНОВИЧ

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ С РАЗНОСТНЫМ ЯДРОМ

Введение. В пространстве $L^p(0, \omega)$ $1 \leqslant p \leqslant 2$ рассмотрим ограничный оператор вида

$$Sf = \frac{d}{dx}\int_0^\omega f(t)\, s(x-t)\, dt, \quad s(x) \in L^q(-\omega, \omega), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \qquad (1)$$

Методам решения уравнения $Sf = \varphi$ (2) посвящена работа [1]. В данной статье находятся условия ограниченности, неотрицательности решения $f(x)$ выясняется поведение $f(x)$ на концах отрезка $[0, \omega]$. Такого типа вопросы возникают в ряде прикладных задач [2—5]. Отдельно изучаются уравнения вида (2), решения которых лежат в классе обобщенных функций.

1. Введем обозначения [1] $(0 \leqslant x \leqslant \omega)$; $M(x) = s(x)$; $N(x) = -s(-x)$ **(3).** В дальнейшем существенную роль играет (см. [1])

Теорема 1. *Пусть в* $L^p(0, \omega)$ *существуют функции* $N_1(x)$ $N_2(x)$, *удовлетворяющие соотношениям* $SN_1 = M(x)$; $SN_2 = 1$ **(4).** Если уравнение $Sf = 0$ **(5)** имеет в $L^p(0, \omega)$ только тривиальное решение и $\varphi''(x) \in L^q(0, \omega)$, то уравнение (2) имеет в $L^p(0, \omega)$ одно и только одно решение:

$$f(x) = T\varphi = \int_0^\omega \varphi'(t)\, r(x, t)\, dt + \varphi(\omega) N_2(x) -$$

$$- \int_x^\omega \varphi'(x - t + \omega) N_2(t)\, dt - \int_x^\omega \int_{\omega - x}^\omega \varphi''(x - t + s)\, r(t, s)\, ds dt, \quad (6)$$

где $r(x, t) = N_2(\omega - t) N_1(x) - N_1(\omega - t) N_2(x)$ **(7).**

Положим теперь

$$P(\varphi) = \int_0^\omega \varphi'(t) N_2(\omega - t)\, dt, \;\; Q(\varphi) = \varphi(\omega) - \int_0^\omega \varphi'(t) N_1(\omega - t)\, dt. \quad (8)$$

Тогда из теоремы 1 непосредственно вытекает, что $f(x) = P(\varphi) N_1(x) + Q(\varphi) N_2(x) + o(1)$, $0 \leqslant x \leqslant \omega$ **(9).**

Значит, справедливы утверждения:

Следствие 1. *Пусть выполняются условия теоремы 1 и любая нетривиальная линейная комбинация* $N_1(x)$ *и* $N_2(x)$ *является неограниченной функцией. Тогда для ограниченности* $f(x)$ *уравнения (2) необходимо и достаточно, чтобы верны были равенства* $P(\varphi) = 0$, $Q(\varphi) = 0$ **(10).**

Следствие 2. *Пусть выполняются условия теоремы 1 и равенства (10). Тогда решение* $f(x)$ *уравнения (2) является непрерывной на сегменте* $[0, \omega]$ *функцией, причем* $f(0) = f(\omega) = 0$ **(11).**

Характеристику поведения $f(x)$ на концах сегмента $[0, \omega]$ можно уточнить. Снова, прибегая к формулам (6), (7) получаем

Следствие 3. *Пусть выполняются условия следствия 2 и* $\varphi(x) \in C^{(2)}[0, \omega]$. *Тогда*

$$f(x) = -P(\varphi') \int_x^\omega N_1(t)\, dt - Q(\varphi') \int_x^\omega N_2(t)\, dt + o\left[\int_x^\omega h(x)\, dx\right],$$

$$x \to \omega;$$

$$f(x) = -P(\varphi') \int_0^x [1 - N_1(t)]\, dt + Q(\varphi') \int_0^x N_2(t)\, dt +$$

$$+ o\left[\int_0^x h(x)\, dx\right], \;\; x \to \omega,$$

где $h(x) = |N_1(x)| + |N_2(x)| + 1$.

2. Пусть обратимый оператор

$$Sf = f(x) + \int_0^\omega f(t)\, k(x-t)\, dt,\ k(x) \in L(-\omega, \omega) \tag{12}$$

действует в $L(0, \omega)$. Тогда функции $N_1(x)$, $N_2(x)$ [1] абсолютно непрерывны, причем $N_1(\omega) N_2(0) - N_2(\omega)[N_1(0) - 1] = 1$ **(13).**

Из (13) следует, в частности, что $N_2(x)$ не обращается в нуль одновременно на обоих концах сегмента $[0, \omega]$. Пользуясь абсолютной непрерывностью $N_1(x)$ и $N_2(x)$, запишем функционалы $P(\varphi)$ и $Q(\varphi)$ в виде

$$P(\varphi) = \varphi(\omega) N_2(0) - \varphi(0) N_2(\omega) + \int_0^\omega \varphi(\omega - t) N_2'(t)\, dt;$$

$$Q(\varphi) = \varphi(\omega)[1 - N_1(0)] + \varphi(0) N_1(\omega) - \int_0^\omega \varphi(\omega - t) N_1'(t)\, dt.$$

Если $\varphi(x)$ — непрерывная функция, то функционалы $P(\varphi)$ и $Q(\varphi)$ определены. Согласно (6) функция $f(x)$ непрерывна, причем $f(\omega) = P(\varphi) N_1(\omega) + Q(\varphi) N_2(\omega)$ **(14);** $f(0) = P(\varphi)[N_1(0) - 1] + Q(\varphi) N_2(0)$ **(15).**

Из (13)—(15) вытекает

Следствие 4. *Пусть обратимый оператор S, действующий в $L(0, \omega)$, имеет вид (12). Если $\varphi(x)$ — непрерывная функция, то решение $f(x)$ уравнения (2) является непрерывной функцией. При этом соотношения (10) необходимы и достаточны для справедливости равенств (11).*

Аналогом следствия 3 является

Следствие 5. *Пусть оператор S удовлетворяет условиям следствия 4 и $\varphi'(x)$ — непрерывная функция. Если верны равенства (11), то* $f(x) = -[P(\varphi') N_1(\omega) + Q(\varphi') N_2(\omega) + o(1)](\omega - x)$, $x \to \omega$; $f(x) = \{P(\varphi')[N_1(0) - 1] + Q(\varphi') N_2(0) + o(1)\} x$, $x \to 0$.

3. Во многих задачах [2—5] физический смысл имеют лишь неотрицательные решения $f(x)$ уравнения (2). Найдем условия неотрицательности $f(x)$. Для этого, предполагая

$$R = \int_0^\omega N_2(t)\, dt \neq 0, \tag{16}$$

рассмотрим функции

$$q_1(x, t) = [\boldsymbol{L}_1(\omega - t) \boldsymbol{L}_2(x) - \boldsymbol{L}_2(\omega - t) \boldsymbol{L}_1(x)]/R; \tag{17}$$

$$q_2(x, t) = \Big[\boldsymbol{L}_1(\omega - t) \int_x^\omega \boldsymbol{L}_1(u)\, du + \int_0^{\omega - t} \boldsymbol{L}_1(u)\, du \boldsymbol{L}_1(x)\Big]/R. \tag{18}$$

Здесь функции $L_k(x)$ определены равенством $SL_k = x^{k-1}$, $k=1$, 2, ... (Легко видеть, что $N_2(x) = L_1(x)$).

Учитывая равенство (см. [1] с. 93)

$$N_1(x) = \left[\int_x^\omega L_1(t)\,dt + L_2(x)\right]/R, \tag{19}$$

перепишем формулу (6) в виде

$$f(x) = P(\varphi)\,N_1 + Q(\varphi)\,L_1 - \int_x^\omega \varphi'(\omega - t)\,L_1(t)\,dt -$$
$$-\int_x^\omega \int_{\omega-x}^\omega \varphi''(x - t + s)\,[q_1(t,\ s) + q_2(t,\ s)]\,dsdt. \tag{20}$$

Непосредственным подсчетом из (18) выводим

$$-\int_x^\omega \varphi'(\omega - t)\,L_1(t)\,dt - \int_x^\omega \int_{\omega-x}^\omega \varphi''(x - t + s)\,q_2(t,\ s)\,dsdt =$$
$$= -\frac{1}{R}P(\varphi)\int_x^\omega L_1(u)\,du. \tag{21}$$

В силу формул (19)—(21) верно равенство

$$f(x) = P(\varphi)\,L_2(x)/R + Q(\varphi)\,L_1(x) - \int_x^\omega \int_{\omega-x}^\omega \varphi''(x - t +$$
$$+ s)\,q_1(t,\ s)\,dsdt), \tag{22}$$

откуда получаем

Следствие 6. *Пусть оператор S удовлетворяет условиям теоремы 1, причем выполняется (16) и $q_1(x,\ t) \geqslant 0$ при $x + t \geqslant$* $\geqslant 0$ **(23).**

Если функция $\varphi(x)$ такова, что справедливы равенства (10) и $\varphi''(x) \leqslant 0$, $\varphi''(x) \in L^q(0,\ \omega)$ **(24)**, то решение $f(x)$ уравнения (2) является непрерывной и неотрицательной функцией.

Условие (23) выполняется, в частности, для операторов

$$S_h f = \int_0^\omega f(t)\,\frac{a_2 + a_1\,\mathrm{sign}\,(x - t)}{|x - t|^h}\,dt,\ 0 < h < 1,\ a_2 > a_1 \geqslant 0.$$

Следствия 1—6 допускают перенос на случай систем уравнений с разностным ядром. При этом аналог теоремы 1 для систем содержится в работе [6].

4. Изучим теперь уравнения

$$Sf = \int_0^\omega f(t)\,k(x - t)\,dt = \varphi(x), \tag{25}$$

где $k(x)$ — непрерывная на сегменте $[-\omega, \omega]$ функция. Через **Д** обозначим множество обобщенных функций вида $f(x) = \alpha\delta(x) + \beta\delta(\omega - x) + f_1(x)$, при этом $f_1(x) \in L(0, \omega)$, $\delta(x)$ — дельта-функция. Для уравнения (25) в работе [1] доказана

Теорема 2. *Пусть в* **Д** *существуют функции* $N_j(x) = \alpha_j\delta(x) + \beta_j\delta(\omega - x) + f_j(x)$, $f_j(x) \in L(0, \omega)$, $j = 1, 2$ **(26)**, *удовлетворяющие соотношениям (4). Если* $\varphi(x) \in C^{(2)}$, *то уравнение (25) имеет в* **Д** *одно и только одно решение, определяемое формулами (6), (7).*

Из теоремы 2 вытекает, что соотношения (8), (9) сохраняются и в рассматриваемом случае.

Следствие 7. *Пусть выполняются условия теоремы 2 и* $k(x), k(-x) \in C^{(2)}$. *Тогда верно неравенство* $\Delta = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$ **(27).**

В самом деле, справедливы равенства $S[\delta(x)] = k(x)$; $S[\delta(\omega - x)] = k(x - \omega)$.

Значит, из (9) и (26) получаем, что $\delta(x)$ и $\delta(\omega - x)$ являются линейными комбинациями функций $\alpha_j\delta(x) + \beta_j\delta(\omega - x)$ $(j = 1, 2)$, откуда следует неравенство (27).

Пользуясь формулами (6), (7), (26), выводим утверждения:

Следствие 8. *Пусть выполняются условия теоремы 2 и* $\Delta \neq 0$. *Для того чтобы решение* $f(x)$ *уравнения (25) принадлежало* $L(0, \omega)$, *необходимо и достаточно выполнение равенств (10).*

Следствие 9. *Пусть выполняются условия теоремы 2 и верны равенства (10). Тогда решение* $f(x)$ *уравнения (25) является непрерывной функцией.*

5. В качестве примера запишем уравнение

$$Sf = \int_0^{\omega} f(t)\, k(x - t)\, dt = \varphi(x), \tag{28}$$

$$\text{где } k(x) = \int_0^{\infty} \frac{G(u)}{u} \cos uxdu. \tag{29}$$

Будем предполагать, что

$$G(u) \geqslant 0, \ \int_0^{\delta} [G(u)/u]\, du < \infty \ \ \delta > 0; \tag{30}$$

$G(u) = 1 + O(u^{-\nu})$ $u \to \infty$, $\nu > 1$ **(31).** Тогда ядро $k(x)$ допускает представление $k(x) = -\ln|x| + h(x)$, причем $h'(x)$ — ограниченная функция.

Используя теоремы регуляризации [1] и положительность оператора S, убеждаемся, что уравнение (28) удовлетворяет условиям теоремы 1. Уравнения с ядрами вида (29) встречаются в ряде задач теории упругости. В книге [4] анализируется случай, когда $G_1(u) = (\operatorname{ch} 2u - 1)/(\operatorname{sh} 2u + 2u)$.

В монографии [5] существенную роль играют уравнения с ядрами

$$G_2(u) = \frac{\operatorname{sh} 2u - 2u}{2 \operatorname{sh}^2 u}; \quad G_3(u) = 2\frac{\operatorname{sh}^2 u - u^2}{\operatorname{sh} 2u + 2u}.$$

Легко видеть, что функции $G_1(u)$, $G_2(u)$, $G_3(u)$ удовлетворяют условиям (30), (31). Значит, для соответствующих уравнений (28) верна теорема 1 и следствия 1—3.

6. В задачах оптимального синтеза [7] используется уравнение

$$\int_0^\omega f(t)\, e^{-\nu|x-t|} dt = \varphi(x) \quad \nu > 0.$$

Здесь верна теорема 2, причем

$$N_1(x) = -\frac{1}{\nu}\delta(x), \quad N_2(x) = \frac{1}{2}[\nu + \delta(x) + \delta(\omega - x)].$$

Значит, выполняются следствия 7—9.

Список литературы: 1. *Сахнович Л. А.* Уравнения с разностным ядром на конечном отрезке.— Усп. мат. наук, 1980, **35**, вып. 4, с. 69—129. 2. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости.— М.: Гостехиздат, 1949.— 210 с. 3. *Косевич А. М.* Дислокация в теории упругости.— К.: Наук. думка, 1978.— 168 с. 4. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабенко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости.— М.: Наука, 1979.— 221 с. 5. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.— К.: Наук. думка, 1976.— 186 с. 6. *Сахнович Л. А.* Системы уравнений с разностными ядрами.— Укр. мат. журн., 1980, **32**, № 1, с. 61—68. 7. *Солодовников В. В.* Статистическая динамика линейных систем автоматического управления.— Физ. математика, 1960, с. 22—25.

Поступила в редколлегию 27.01.82.