УДК 517.53

А. М. РУССАКОВСКИЙ

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В КЛАССЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ ИНДИКАТОР НЕ ВЫШЕ ДАННОГО. 2

Статья является дополнением к [1], где были получены достаточные условия разрешимости кратной интерполяционной задачи в классе $[\rho(r), H(\theta)]$ целых функций, имеющих при уточненном порядке $\rho(r)$ $(\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r)=\rho\in(0, \infty))$ индикатор не выше $H(\theta)$. Здесь устанавливаем необходимость этих условий в случае, когда узлы интерполяции правильно распределены (в случае простых узлов этот результат был получен в [2]; см. также [3]).

Поскольку необходимым условием разрешимости интерполяционной задачи в рассматриваемом классе является включение множества $\{s_k; q_k\}$ (узлов с кратностями) в дивизор функции этого класса, будем всюду ниже говорить об «интерполяционности дивизора в классе $[\rho(r), H(\theta)]$», понимаемой в следующем смысле:

Определение. *Дивизор* $\{s_k; q_k\}$ *назовем интерполяционным в классе* $[\rho(r), H(\theta)]$, *если для любой последовательности комп-*

лексных чисел $\{\lambda_{k,j}\}$ $(j=1, \ldots, q_k,\ k=1, 2, \ldots)$, *удовлетворяющей условию*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left[|s_k|^{-\rho(|s_k|)}\ln\max_{1\leqslant j\leqslant q_k}\frac{|\lambda_{k,j}|}{(j-1)!}-H(\psi_k)\right]\leqslant 0\ (\psi_k=\arg s_k),$$

найдется функция $F(z)\in[\rho(r), H(\theta)]$ *со свойством* $F^{(j-1)}(s_k)=\lambda_{k,j}$.

В [1] была показана достаточность для интерполяционности в классе $[\rho(r), H(\theta)]$ дивизора целой функции $f(z)$, имеющей индикатор $H(\theta)$, совокупности следующих двух условий:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left[|s_k|^{-\rho(|s_k|)}\ln\max_{1\leqslant j\leqslant q_k}|\gamma_{k,j}|+H(\psi_k)\right]\leqslant 0, \tag{1}$$

где

$$\gamma_{k,j}=\frac{1}{(j-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{j-1}\frac{(z-s_k)^{q_k}}{f(z)}\bigg|_{z=s_k};$$

и

$$\lim_{k\to\infty}\frac{q_k\ln|s_k|}{|s_k|^{\rho(|s_k|)}}=0.$$

В [1] было показано также, что в случае, когда упомянутая выше целая функция $f(z)$ имеет вполне регулярный рост, достаточно одного условия (1).

Из результатов А. Ф. Гришина [4] непосредственно следует, что выполнение условия (1) влечет за собой включение множества $\{s_k;\ q_k\}$ в дивизор целой функции $\tilde{f}(z)$, имеющий индикатор $H(\theta)$ и вполне регулярный рост.

Повторяя доказательство теоремы 2 из [1] с учетом последнего замечания, можно получить следующий результат:

Теорема 1. *Условие* (1) *является достаточным для интерполяционности в классе* $[\rho(r), H(\theta)]$ *дивизора целой функции* $f(z)$, *имеющей индикатор* $H(\theta)$ *при порядке* $\rho(r)$.

Ниже покажем, что в случае, когда $f(z)$ имеет вполне регулярный рост, условие (1) является также необходимым, что вместе с теоремой 1 дает следующий критерий интерполяционности:

Теорема 2. *Для того, чтобы дивизор целой функции* $f(z)$, *имеющей вполне регулярный рост и индикатор* $H(\theta)$, *был интерполяционным в классе* $[\rho(r), H(\theta)]$, *необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял условию* (1).

Для доказательства последней теоремы понадобится следующая

Лемма. *Пусть* $\varphi(z)$ — *целая функция с индикатором* $h_\varphi(\theta)$ *при порядке* $\rho(r)$, *корни которой* $\{\mu_k;\ j_k\}$ *правильно распределены, причем круги радиуса* $c|\mu_k|$ *с центрами в* μ_k *не пересекаются для некоторого* $c\in(0, 1)$, *и пусть* $\psi(z)\in[\rho(r), h_\varphi(\theta)]$. *Положим*

$$\Phi_k(z)=\frac{\psi(z)(z-\mu_k)^{j_k}}{\varphi(z)}.$$

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln \dfrac{|\Phi_k^{(j_k-1)}(\mu_k)|}{(j_k-1)!}}{|\mu_k|^{\rho(|\mu_k|)}} \leqslant 0.$$

Доказательство. Заметим, что корни $\varphi(z)$ образуют R-множество*, причем окружности $U_k = \{|z-\mu_k| = c|\mu_k|\}$ лежат вне исключительных C_R-кружков. Поэтому при $z \in U_k$ выполняются асимптотические неравенства:

$$\left.\begin{aligned} \ln|\varphi(z)| &\geqslant (h_\varphi(\arg z) - \varepsilon_1)|z|^{\rho(|z|)} \\ \ln|\psi(z)| &\leqslant (h_\psi(\arg z) + \varepsilon_2)|z|^{\rho(|z|)} \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Имеем

$$\frac{1}{(j_k-1)!}\Phi_k^{(j_k-1)}(\mu_k) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{U_k} \frac{\psi(z)(z-\mu_k)^{j_k}}{\varphi(z)(z-\mu_k)^{j_k}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{U_k}\frac{\psi(z)}{\varphi(z)}\,dz.$$

Утверждение леммы следует теперь из (2) и неравенства $h_\psi(\theta) \leqslant \leqslant h_\varphi(\theta)$.

Доказательство теоремы 2. В силу сказанного выше нужно доказать только необходимость условия (1). Предположим, что для некоторых последовательностей $\{a_l\} \subset \{s_k\}$ и $\{m_l\}$ $(m_l \leqslant \leqslant q_l)$ выполнено соотношение $\lim\limits_{k\to\infty}[|a_k|^{-\rho(|a_k|)}\ln|\gamma_{k,m_k}| + H(\psi_k)] > > \delta > 0$ (3), но дивизор $\{s_k;\ q_k\}$ является интерполяционным в классе $[\rho(r),\ H(\theta)]$. В силу правильной распределенности множества $\{s_k;\ q_k\}$ имеем $q_k = 0\,(|s_k|^{\rho(|s_k|)})$ при $k \to \infty$. Поэтому, переходя, если нужно, к подпоследовательности (беря, например, $|a_{k_{j+1}}| > |a_{k_j}|^2$), можем считать, что множество $\{a_k;\ m_k\}$ имеет нулевую плотность при порядке $\rho(r)$, и круги $|z - a_k| \leqslant \frac{|a_k|}{2}$ не пересекаются. Теперь, если $\rho \overline{\in} N$, положим $\mu_k = a_k$; $j_k = m_k$, если же $\rho \in N$, положим $\mu_{(k-1)2\rho+l} = a_k e^{i\frac{\pi}{\rho}l}$, $j_{(k-1)2\rho+l} = m_k$ $(l = = 1, \ldots, 2\rho)$. Множество $\{\mu_k;\ j_k\}$ является правильно распределенным при порядке $\rho(r)$. Пусть $\varphi(z)$ — каноническая функция этого множества, а $c = \min\left(\frac{1}{2},\ \sin\frac{\pi}{2\rho}\right)$. Тогда, очевидно, кружки $|z - \mu_k| \leqslant c|\mu_k|$ не пересекаются.

Возьмем функцию $F(z)$ класса $[\rho(r),\ H(\theta)]$, решающую нашу интерполяционную задачу для последовательности $\{\lambda_{k,j}\}$, определяемой следующим образом: $\lambda_{k,j} = 0$, $\forall k,\ j$, кроме случая, когда $s_k \subset \{a_l\}$ и $j = q_l - m_l + 1$; $\lambda_{l,q_l-m_l+1} = (q_l - m_l + 1)!\exp[H(\psi_l) \times \times |a_l|^{\rho(|a_l|)}]$. Положим $\psi(z) = f^{-1}(z)\varphi(z)F(z)$. Очевидно, $\psi(z)$ — целая функция с индикатором $h_\psi(\theta) = h_{f^{-1}\varphi F}(\theta) = h_{\varphi F}(\theta) - h_f(\theta) \leqslant$

---

* См. [3].

$\leqslant h_\varphi(\theta) + h_F(\theta) - h_f(\theta) \leqslant h_\varphi(\theta) + H(\theta) - H(\theta) = h_\varphi(\theta)$, т. е. $\psi \in [\rho(r),\ h_\varphi(\theta)]$.

В окрестности точки μ_k функция $F(z)$ представляется в виде $F(z) = \exp(H(\psi_k)\,|\,\mu_k|^{\rho(|\mu_k|)})\,(z-\mu_k)^{q_k - j_k} + (z-\mu_k)^{q_k} g_k(z)$, где $g_k(z)$ — некоторая функция. Имеем $f^{-1}(z)\,F(z)\,(z-\mu_k)^{j_k} = \exp[H(\psi_k)\,|\,\mu_k|^{\rho(|\mu_k|)}]\,\dfrac{(z-\mu_k)^{q_k}}{f(z)} + (z-\mu_k)^{j_k}\Omega_k(z)$, где $\Omega_k(z)$ — некоторая функция. Дифференцируя обе части этого равенства $j_k - 1$ раз и полагая $z = \mu_k$, получаем

$$\frac{1}{(j_k-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{j_k-1}\left[\frac{F(z)\,(z-\mu_k)^{j_k}}{f(z)}\right]\Bigg|_{z=\mu_k} = \exp[H(\psi_k)\,|\,\mu_k|^{\rho(|\mu_k|)}]\,\gamma_{k,j_k},$$

откуда

$$|\mu_k|^{-\rho(|\mu_k|)}\ln|\gamma_{k,j_k}| + H(\psi_k) = |\mu_k|^{-\rho(|\mu_k|)}\ln\left[\frac{1}{(j_k-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{j_k-1}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{F(z)\,(z-\mu_k)^{j_k}}{f(z)}\Bigg|_{z=\mu_k}\right] = |\mu_k|^{-\rho(|\mu_k|)}\ln\left[\frac{1}{(j_k-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{j_k-1}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\psi(z)\,(z-\mu_k)^{j_k}}{\varphi(z)}\Bigg|_{z=\mu_k}\right] = |\mu_k|^{-\rho(|\mu_k|)}\ln\left[\frac{1}{(j_k-1)!}\Phi_k^{(j_k-1)}(\mu_k)\right].$$

В силу леммы $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,[|\mu_k|^{-\rho(|\mu_k|)}\ln|\gamma_{k,j_k}| + H(\psi_k)] \leqslant 0$, что противоречит (3). Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Руссаковский А. М.* Об интерполяционности в классе целых функций, имеющих индикатор не выше данного.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1982, **37**, с. 111—114. 2. *Фирсакова О. С.* Некоторые вопросы интерполирования с помощью целых функций.— Докл. АН СССР, 1958, **120**, с. 477—480. 3. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.— М.: ГИТТЛ, 1956.—632 с. 4. *Гришин А. Ф.* О множествах регулярного роста целых функций.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1983, вып. 40, с. 36—46.

Поступила в редколлегию 06.07.82.