УДК 517.53

Л. И. РОНКИН

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЛЮРИСУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ЗАДАННЫМ ТИПОМ (ИНДИКАТОРОМ) ПРИ УТОЧНЕННОМ ПОРЯДКЕ ПО ВЫДЕЛЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

При использоваоии L^2-методов решения $\overline{\partial}$-проблемы в некоторых вопросах теории целых функций возникает необходимость в плюрисубгармонических функциях с «хорошим» поведением на бесконечности и, в частности, с заданным индикатором или типом при данном уточненном порядке*) $\rho(t)$. В случае радиального индикатора при дополнительном условии существования и ограниченности его первых произодных построение таких функций проведено в [3].

Рассмотрим вопрос о существовании плюрисубгармонических функций, имеющих при порядке $\rho(t)$ заданный тип или индикатор по выделенной переменной и в некотором смысле хорошо ведущих себя при стремлении этой выделенной переменной к бесконечности.

Пусть плюрисубгармоническая функция $u(z, w), z, \in \boldsymbol{C}^n, w \in \boldsymbol{C}$, имеет конечный верхний порядок**) ρ по переменной w и пусть $\rho(t)$ — какой-нибудь уточненный порядок, отвечающий порядку ρ, т. е. $\lim\limits_{t\to+\infty}\rho(t) = \rho$. Напомним, что регуляризованным индикатором функции $u(z, w)$ при порядке $\rho(t)$ по переменной w называется (см. [5], [6]) функция

$$h_u^*(z, w) = \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{|z'-z|<\varepsilon, |w'-w|<\varepsilon} h_u(z', w'), \text{ где } h_u(z, w) = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-\rho(t)} u(z, tw).$$

Эта функция является плюрисубгармонической и позитивно однородной порядка ρ по переменной w (т. е. $h_u^*(z, tw) = t^\rho h_u^*(z, w), t > 0$).

Типом (регулиризованным) функции $u(z, w)$ при порядке $\rho(t)$ по переменной w называется функция $\sigma_u^*(z) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \sup\limits_{|z'-z|<\varepsilon} \sigma_u(z')$, где $\sigma_u(z) = \overline{\lim\limits_{w\to\infty}} |w|^{-\rho} u(z, w)$.

---

*) Определение и свойства уточненного порядка см., например, в [1, 2].
**) Определение и свойства порядка по переменной см. в [4].

Тип $\sigma_u^*(z)$ является логарифмически плюрисубгармонической функцией.

Теорема 1. *Пусть $\varphi(z)$ — логарифмически плюрисубгармоническая функция в $\mathbf{C}^n$. Тогда существует такая плюрисубгармоническая в $\mathbf{C}^{n+1}$ функция $u(z,w)=u(z,|w|)$*), что на каждом компакте в $\mathbf{C}^n$ $t^{-\rho(t)}u(z,t)\rightrightarrows\varphi(z)$, когда $t\to\infty$. В частности, $\sigma_u^*(z)=\varphi(z)$.*

Соответствующая теорема для индикатора получена нами при некоторых ограничениях, касающихся его производных. Заметим, что у любой плюрисубгармонической функции первые производные в смысле обобщенных функций являются обычными локально суммируемыми функциями. Обозначим $grad_z=\left(\frac{\partial}{\partial z_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial z_n}\right)$. Здесь, как и всюду в дальнейшем, символы $\frac{\partial}{\partial z_j}$, как и $\frac{\partial}{\partial \bar z_j}$, означают соответствующее дифференцирование в пространстве обобщенных функций.

Теорема 2. *Пусть плюрисубгармоническая в $\mathbf{C}^{n+1}$ позитивно однородная по w порядка ρ функция $\varphi(z,w)$ удовлетворяет условию.*

$$\sup_{|z|<R}\ \sup_{0<\theta<2\pi}|\mathrm{grad}_z\,\varphi(z,e^{i\theta})|<\infty,\ \forall R>0.$$

Пусть далее, $\rho(t)$ — какой-нибудь уточненный порядок, отвечающий порядку ρ. Тогда существует плюрисубгармоническая в $\mathbf{C}^{n+1}$ функция $u(z,w)$, имеющая по w конечный порядок ρ, и такая, что на каждом компакте в $\mathbf{C}^{n+1}$ $t^{-\rho(t)}u(z,tw)\rightrightarrows\varphi(z,w)$, когда $t\to\infty$. В частности, $h_n^*(z,w)=\varphi(z,w)$.

Доказательства теорем 1 и 2 близки, и поэтому здесь приведем полное доказательство лишь одной из них, а именно теоремы 1, ограничившись по поводу доказательства теоремы 2 краткими замечаниями.

Функцию $u(z,w)$, существование которой утверждается в теореме 1, будем искать в виде $u(z,w)=\varphi(z)|w|^{\rho(|w|)}+\alpha(z)\beta(|w|)\times\times|w|^{\rho(|w|)}+u_0(z)+\ln(1+|w|^2)$ **(1)**, где $\alpha(z)$, $\beta(t)$ и $u_0(z)$ — функции, конкретный выбор которых будет сделан в процессе доказательства.

Обозначим через $L_{(z,w)}(u;\zeta,\nu)$, где $\zeta\in\mathbf{C}^n$, $\nu\in\mathbf{C}$, форму Леви функции u. Иными словами, положим $L_{(z,w)}(u;\zeta,\nu)=L_z(u;\zeta)+$
$$+2\mathrm{Re}\left\{\sum_j\frac{\partial^2u}{\partial z_j\,\partial\bar w}\zeta_j\bar\nu\right\}+|\nu|^2\frac{\partial^2u}{\partial w\partial\bar w},\ \text{где}\ L_z(u;\zeta)=\sum_{j,i}\frac{\partial^2u}{\partial z_j\partial\bar z_i}\zeta_j\bar\zeta_i,$$
и производные рассматриваются в смысле обобщенных функций, что было оговорено ранее.

---

*) В [4] множество функций $u(z,t)$, $z\in\mathbf{C}^n$, $t>0$, удовлетворяющих условию: функция $u(z|w|)$, $w\in\mathbf{C}$, является плюрисубгармонической в $\mathbf{C}^{n+1}$, названо классом $\boldsymbol{B}$ (готическое).

Неотрицательность формы Леви вместе с полунепрерывностью сверху является необходимым и достаточным условием плюрисубгармоничности рассматриваемой функции. Оценим «меру неплюрисубгармоничности» функции $\varphi(z)|w|^{\rho(|w|)}$, т. е. «меру» возможной отрицательности ее формы Леви. При этом будем предполагать, что $\rho(t) \in C^\infty(R_+)$, $\rho^{(n)}(+0) = 0$, $\forall n = 0,1,\dots$ и что $\lim\limits_{t\to\infty} t^2\rho''t)\ln t = 0$.

Эти предположения не нарушают общности, поскольку, как известно, всегда существует уточненный порядок, эквивалентный исходному и удовлетворяющий указанным требованиям.

При сделанных предположениях относительно гладкости $\rho(t)$ обобщенные производные функции $\varphi(z)|w|^{\rho(|w|)}$ вычисляются как производные от произведения и после ряда элементарных выкладок, в процессе которых учитывается, что $\lim\limits_{t\to\infty}\rho(t) = \rho$; $\lim\limits_{t\to\infty} t\rho'(t)\ln t = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} t^2 \ln t\rho''(t) = 0$.

Получим следующее неравенство:

$L_{(zw)}(\varphi z)|w|^{\rho(|w|)}; \zeta, \nu) \geqslant L_z(\varphi;\zeta)|w|^{\rho(|w|)} + |\nu|^2\varphi(z)|w|^{\rho(|w|)-2}\left(\frac{1}{4}\rho^2 + \right.$ $\left.+\gamma_1(|w|)\right) - |\nu|\,|< \mathrm{grad}_z\varphi, \zeta >|\,|w|^{\rho(|w|)-1}(\rho + \gamma_2(|w|))$, где $\gamma(t)\to 0$ при $t\to\infty$, $j = 1,2$.

Отсюда, учитывая вытекающее из логарифмической плюрисубгармоничности $\varphi(z)$ неравенство $L_z(\varphi;\zeta) \geqslant \frac{1}{\varphi(z)}|< \mathrm{grad}_z\varphi, \zeta >|^2$, заключаем, что $L_{(z,w)}(\varphi|w|^{\rho(|w|)};\ \xi,\ \nu) \geqslant |\nu|(\rho + 0(1))|w|^{\rho(|w|)-1} \times$ $\times \sqrt{\varphi L_z(\varphi;\zeta)} - |\nu|\,|w|^{\rho(|w|)-1}(\rho + 0(1))|< \mathrm{grad}_z\varphi, \zeta >| \geqslant |\nu| \times$ $\times\ \gamma_3(|w|)\,|w|^{\rho(|w|)-1}|\langle \mathrm{grad}_z\varphi, \zeta >|$, где $\gamma_3(t)\to 0$ при $t\to\infty$. **(2).**

Теперь оценим снизу форму Леви функции $u_1 = \alpha(z)\beta(|w|)|w|^{\rho(|w|)}$. При этом будем предполагать, что $\alpha(z) \geqslant 0$, $\beta(t) \in C^\infty(R_+)$ и $\lim\limits_{t\to\infty}\beta(t) + 0$.

После некоторой цепочки вполне элементарных вычислений, которые опускаем, получим следующее неравенство: $L_{(z,w)}(u_1;\zeta,\nu) \geqslant \beta L_z(\alpha;$ $\zeta)|w|^{\rho(|w|)} + A_1(|w|)\frac{|\nu|^2}{4}|w|^{\rho(|w|)-2} - |\nu|\,|w|\,A_2(|w|)\,|w|^{\rho(|w|)-2} \times$ $\times |\langle \mathrm{grad}_z\alpha,\ \zeta\rangle|$, где $A_1(t) = \beta'' t^2 + \beta' t\{2(\rho(t) + t\rho'(t)\ln t) + 1\} +$ $+ \beta\{(\rho(t) + t\rho'(t)\ln t)^2 + 2t\rho'(t) + t\rho'(t)\ln t + t^2\rho''(t)\ln t$ и $A_2(t) =$ $= \beta' t + \beta(t\rho'(t)\ln t + \rho(t))$. До сих пор о функции $\beta(t)$ были сделаны лишь предположения о характере ее гладкости и о том, что $\lim\beta(t) = 0$. Зададим теперь произвольно функцию $\chi(t)\downarrow 0$ при $t\to\infty$ и потребуем, чтобы функция $\beta(t)$ была логарифмически выпуклой и удовлетворяла условиям $\beta(t) \geqslant \chi(t)$, $\forall t > 0$ **(3)**; $t\beta'/\beta \geqslant -|2t\rho'(t) + t\ln t\rho'(t) + t^2\rho''(t)\ln t|$ **(4)**. Из (4) и выпуклости функции $\beta(t)$ следует, что при $t\to\infty$ $\beta(t)A_1(t) \geqslant A_2^2(t) \times$ $\times (1 + \gamma_4(t))$, где $\gamma_4(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Следовательно, $L_{(z,w)}(u_1;$ $\zeta,\nu) \geqslant |\nu|\,|w|^{\rho(|w|)-1}\{\sqrt{\alpha(z)\beta(|w|)A_1(|w|)L_z(\alpha:\zeta)} - |A_2(|w|)|\langle \mathrm{grad}_z\alpha,$

$\zeta\rangle|\}\geqslant|\nu||w|^{\rho(|w|)-1}|A_2(|w|)|\{\sqrt{(1+\gamma_4(|w|))\alpha(z)\,L_z(\alpha;\zeta)}-|\langle \operatorname{grad}_z\alpha, \zeta\rangle|\}$.

Положим $\alpha(z)=e^{\varphi(z)}$, где функция $\varphi(z)$ та же, что и прежде. Тогда $L_z(\alpha;\zeta)=L_z(e^{e^{\ln\varphi}};\zeta)=e^{\varphi}\varphi^{-1}L_z(\ln\varphi;\zeta)+e^{\varphi}(1+\varphi^{-1})\times \times|\langle \operatorname{grad}_z\varphi, \zeta\rangle|^2\geqslant e^{\varphi}(1+\varphi^{-1})|\langle \operatorname{grad}_z\alpha, \zeta>|^2$ и, следовательно,

$$L_{(z,w)}(u_1;\zeta,\nu)\geqslant|\nu\|w|^{\rho(|w|)-1}A_2(|w|)|\langle \operatorname{grad}_z\varphi, \zeta>|\times \times\{\sqrt{(1+\gamma_4(|w|)(1+\varphi^{-1}(z))}-1\}\ (5).$$

Заметим теперь, что ввиду (4) для $A_2(t)$ при $t\to\infty$ верна оценка

$$A_2(t)\geqslant\frac{\rho}{2}\beta(t).$$

Отсюда и из (5), (2) для функции $u_2(z_2)=u_1(z,w)+\varphi(z)|w|^{\rho(|w|)}$ следует, что $L_{(z,w)}(u_2;\zeta,\nu)\geqslant|\nu||w|^{\rho(|w|)-1}|\langle \operatorname{grad}_z\varphi, \zeta\rangle|\left\{\frac{\rho\varkappa}{2}\times\right.$
$\left.\times\left(\sqrt{(1+\gamma_4(|w|)\left(1+\frac{1}{\varphi(z)}\right)}-1\right)+\gamma_3(|w|)\right\}$.

Выберем теперь функцию $\varkappa(t)$, удовлетворяющую условию $\frac{\rho}{2}\varkappa(t)\geqslant\sqrt{|\gamma_3(t)|}$. Это возможно, поскольку $\gamma_3(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Тогда $L_{(z,w)}(u_2;\zeta,\nu)\geqslant|\nu||w|^{\rho(|w|)-1}|\langle \operatorname{grad}_z\varphi, \zeta\rangle|\sqrt{|\gamma_3(|w|)|}\times$
$\times\left\{\sqrt{(1+\gamma_4(|w|))\left(1+\frac{1}{\varphi(z)}\right)}-1-\sqrt{|\gamma_3(|w|)}\right\}$ (6).

Ввиду локальной ограниченности функции $\varphi(z)$ следует, что для любого $r>0$ найдется такое число $R(r)$, что при $|z|<r$, $|w|<R(r)$ справедливо неравенство $L_{(z,w)}(u_2;\zeta,\nu)\geqslant 0$, $\forall\zeta\in\boldsymbol{C}^n$, $\nu\in\boldsymbol{C}$ и, значит, функция $u_2(z,w)$, определенная выше при всех $z\in\boldsymbol{C}^n$, $w\in\boldsymbol{C}$, является плюрисубгармонической в каждой области $\varphi\{(z,w);|z|<r, |w|>R(r)\}$. Не нарушая общности, можно считать функцию $R(r)$ монотонной и непрерывной. Тогда множество $\{(z,w):|w|>R(|z|)\}$ является областью, и функция $u_2(z,w)$ в ней плюрисубгармонична. Вне этой области, как следует из (6), форма Леви функции $u_2(z,w)$ оценивается следующим образом: $L_{(z,w)}(u_2;\zeta,\nu)\geqslant-\|\nu\|\langle \operatorname{grad}_z\varphi, \zeta\rangle|\Psi(|z|)$ (7), где $\Psi(t)$ — некоторая локально ограниченная положительная функция. В свою очередь из (7) следует, что при $|w|<R(|z|)\ L_{(z,w)}(u_2;\zeta,\nu)\geqslant-|\nu|^2(1+|w|^2)^{-2}-|\langle \operatorname{grad}_z\varphi, \zeta\rangle|^2\Psi^2(|z|)(1+R^2(|z|))^2=-|\nu|^2(1+|w|^2)^{-2}-\Psi_1(|z|)|\langle \operatorname{grad}_z\varphi, \zeta\rangle|^2$ (8).

Обозначим через $\Psi_2(t)$ какую-нибудь монотонно возрастающую выпуклую мажоранту функции $\ln\Psi_1(t)$ и положим $u_0=\exp\{e^{\varphi(z)}+\Psi_2(|z|)\}$. Тогда, поскольку $L_z(e^v;\zeta)=e^v(\mathrm{k}\operatorname{grad}_z v, \zeta\rangle|^2+L_z(v;\zeta)$, форма Леви функции $u_0(z)$ оценивается следующим образом: $L_z(u_0;\zeta)\geqslant\exp\{e^{\varphi(z)}+\Psi_2(|z|)\}\ L_z(e^{\varphi}+\Psi_2;\zeta)\geqslant\exp\{e^{\varphi}+\Psi_2\}e^{\varphi}|\langle \operatorname{grad}_z\varphi, \zeta\rangle|^2\geqslant\Psi_1(|z|)|\langle \operatorname{grad}_z\varphi, \zeta\rangle|^2$. Отсюда и из (7), (8) следует, что форма Леви функции $u(z,w)=u_2(z,w)+u_0(z)+\ln(1+|w|^2)$ положительна всюду в $\boldsymbol{C}^{n+1}$ и, значит, $u(z, w)$ — плюрисубгармоническая функция в $\boldsymbol{C}^{n+1}$. Вспоминая, что $u_0(z, t) = \alpha(z)\beta(z)t^{\rho(t)}$ и что $\rho(t) \to 0$ при $t \to \infty$, заключаем о наличии равномерного (на компактах в $\boldsymbol{C}^n$) предела $\lim\limits_{t \to \infty} t^{-\rho(t)} u(z, t) = \varphi(z)$.

Теорема 1 доказана.

По поводу доказательства теоремы 2, которое, как уже было отмечено, близко по характеру доказательству теоремы 1, укажем лишь на то, что искомая функция ищется в виде $u(z, w) = \alpha(z)\beta(|w|)|w|^{\rho(|w|)} + \varphi(z, w)|w|^{\rho(|w|)-\rho} + \ln(1 + |w|^2)$ и что оценке ее формы Леви предпослано замечание о справедливости следующих неравенств: $\sup\limits_{|z|<R} |\varphi(z, w)| \leqslant C_R^{(1)} |w|^{\rho}, \quad R > 0, \quad w \in \boldsymbol{C};$

$$\sup_{|z|<R} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right| \leqslant C_R^{(2)} |w|^{\rho}, \ R > 0, \ w \in \boldsymbol{C}.$$

Список литературы: 1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. —М.: Гостехиздат, 1956.—235 с. 2. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. —М.: Наука, 1976.—86 с. 3. *Агранович П. З.* О существовании голоморфной в конусе функции с заданным индикатором при уточненном порядке. — Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1975, вып. 24, с. 3—15. 4. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных. — М.: Наука, 1971. —112 с. 5. *Агранович П. З., Ронкин Л. И.* Об условиях плюрисубгармоничности индикатора голоморфной функции многих переменных.— Мат. сб., 1979, **98** (140), № 2, с. 319—332. 6. *Агранович П. З., Ронкин Л. И.* О функциях вполне регулярного роста многих переменных. — Annales polonici mathematici, 1981, **39**, с. 239—254.

Поступила в редколлегию 16.01.81.